Лекция 1. Элементарные функции и их свойства.

Литература:

1) Морозова В. И., "Введение в анализ", Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, т. 1 из серии "Мат-ка в техн. университете"
2) Чеванова Е. Е., "Дифференциальное исчисление функций одного переменного аргумента", Из-до МГТУ им. Н. Э. Баумана, т. 2 из серии "Математика в техн. университете"
3) Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы мат. анализа. / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича

Обозначения:

$\forall$ для любого, любой

$\exists$ существует

$\exists!$ существует единств-ый

$:$ такой, что

$\Rightarrow$ следует

$\Leftrightarrow$ равносильно, "тогда и только тогда, когда"

§1. Метод математической индукции.

Пусть надо показать, что некоторое утверждение A выполнено $\forall n \in \mathbb{N}$. Достаточно показать, что:

1) A выполнено при $n=1$
2) Предположив, что A выполнено при произвольном $n=k$, показать, что A выполнено и для $n=k+1$.

Докажем для примера нер-во Бернулли.

Теор (неравенство Бернулли). $(1+x)^n \geq 1+nx$, $n \in \mathbb{N}$, $x \geq -1$.

Д-во: 1) Пусть $n=1$

$1+x \geq 1+x$ – верно $\forall x$

2) Пусть выполнено $(1+x)^k \geq 1+kx$

Покажем, что $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x) =$

$= 1+(k+1)x + \underbrace{kx^2}_{\geq 0} \geq 1+(k+1)x \Rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx.$

§2. Высказывания и кванторы.

Опр. Высказывание — предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно.

Опр. Предикат — высказывание относительно переменной $P(x)$.

Например: $x>0$.

Как правило, ~~выска~~ предикат содержит кванторы: $\forall x\, P(x)$ $\exists x\, P(x)$

Как построить отрицание высказывания с квантором?

$\neg(\forall x\, P(x)) \to \exists x\, \neg P(x)$

$\neg(\exists x\, P(x)) \to \forall x\, \neg P(x)$

§3 Понятие функции.

Опр. Отображением (функцией) наз. правило A, которое каждому эл-ту x из мн-ва X ставит в соотв-е эл-т y из Y.

Обозн.: $f: X \to Y$, $y=f(x)$.

Если $y=f(x)$, то x наз. прообразом y, а y — образом x.

Опр Мн-во X наз. областью определения ф-и. Мн-вом значений наз. те значения из Y, для которых $\exists y: y=f(x)$.

Обозн.: $f(X)$.

x — независимая переменная,

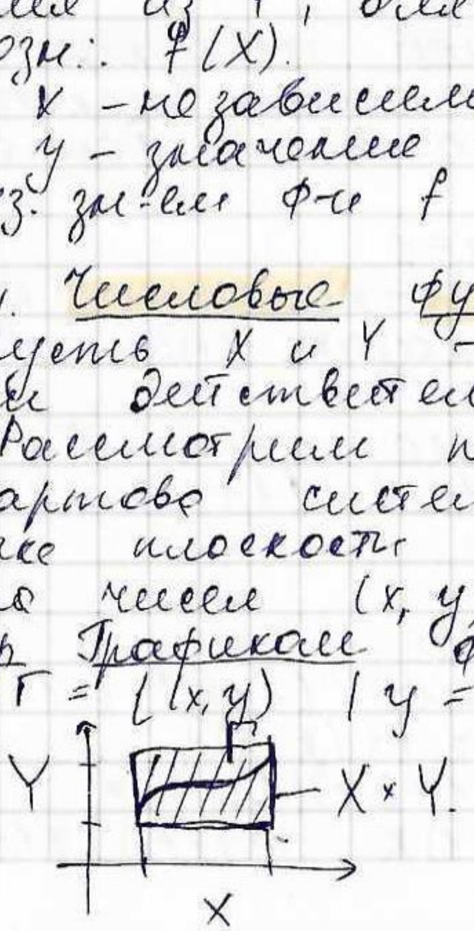
y — значение ф-и. Если $y_0=f(x_0)$, то y_0 наз. зн-ем ф-и f в т. x_0.

§4. Числовые функции.

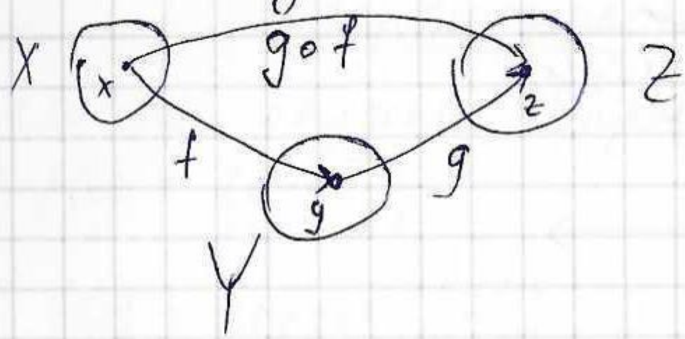
Пусть X и Y — числовые мн-ва, рассмотрим действительнозначные ф-и действ. перем.

Рассмотрим плоскость, на кот. введена декартова система координат, т.е. каждой точке плоскости поставлена в соотв-е пара чисел (x, y).

Опр. Графиком ф-и $y=f(x)$ наз. мн-во $\Gamma = \{(x,y) \mid y=f(x),\ x\in X\} \subset X\times Y$.



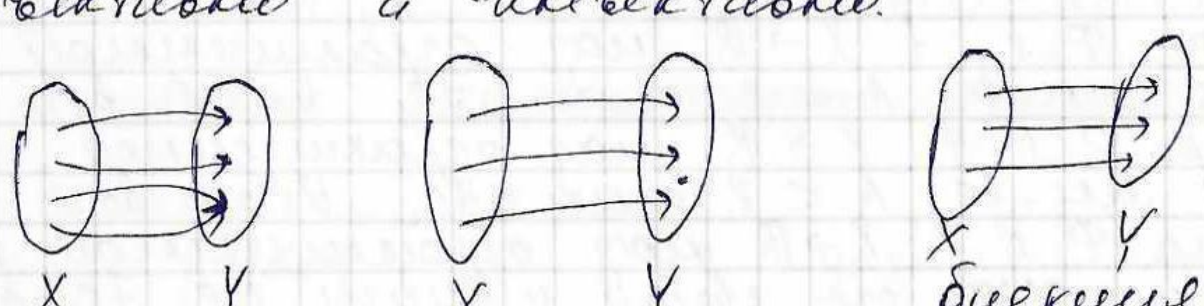
<u>Опр.</u> Пусть даны 2 отображения, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. С их помощью можно построить новое отображение $g \circ f: X \to Z$, кот. эл-ту $x \in X$ ставит в соотв-е $g(f(x))$. Такая операция над функциями наз. <u>композицией</u>, а ф-я $g(f(x))$ при этом наз. <u>сложной функцией</u>.



<u>Опр.</u> Отобр-е $f: X \to Y$ наз. <u>сюръективным</u>, если $\forall y \in Y$ $\exists x \in X$, такой, что $y = f(x)$ (т.е. $f(X) = Y$).

<u>Опр.</u> Отобр-е $f: X \to Y$ наз. <u>инъективным</u>, если $\forall x_1, x_2: x_1 \neq x_2$ зн-е ф-и на них не равны: $f(x_1) \neq f(x_2)$ (у разных прообразов разные образы).

<u>Опр.</u> Отобр-е f наз. <u>биективным</u>, если оно сюръективно и инъективно.



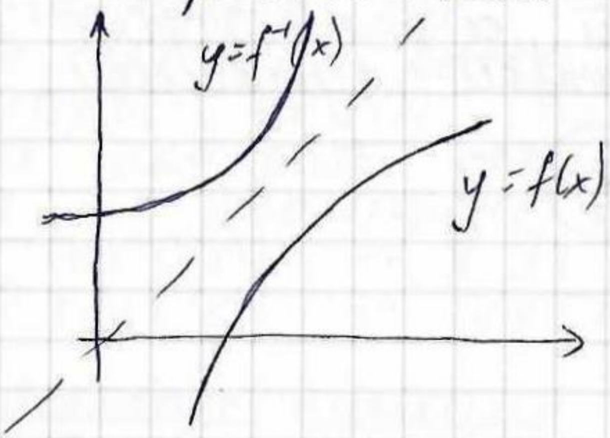
сюръекция инъекция биекция

<u>Примеры:</u>

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2$ — не сюръекция, не ин.
2) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ — инъекция
3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ — сюръекция
4) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ — биекция

<u>Опр.</u> Если $f: X \to Y$ биективно, то $\forall y \in Y$ соотв. единств. $x \in X$ $\Rightarrow$ опр-но отобр-е $f^{-1}: Y \to X$, кот. наз. <u>обратным</u> к отобр-ю f.

Если в обозн-и обр. ф-и независимую переменную обозн. через x, а зн-и ф-и через y, то графики ф-й $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$ симметричны отн-но биссектрис 1-го и 3-го координатных углов.



§5. Свойства числовых функций

Опр. Ф-я $f: X \to \mathbb{R}$ наз. возр / убыв / неуб. / невозр., если $\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ / $f(x_1) > f(x_2)$ / $f(x_1) \le f(x_2)$ / $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Опр. Ф-я f наз. монотонной, если она возр, убыв., неубыв. или невозр.

Опр. Ф-я f наз. строго монотонной, если она возр. или убыв.

Опр. Ф-я $f: X \to \mathbb{R}$ наз. ограниченной снизу на мн-ве $A \subset X$, если $\exists C_1: \forall x \in A$ вып. $f(x) \ge C_1$.

Опр Ф-я $f: X \to \mathbb{R}$ наз. ограниченной сверху на мн-ве $A \subset X$, если $\exists C_2: \forall x \in A$ вып. $f(x) \le C_2$.

Опр. Ф-я $f: X \to \mathbb{R}$ наз. ограниченной на $A \subset X$, если она огр. сверху и снизу, т.е. $\exists C_1, C_2: \forall x \in A$ вып. $C_1 \le f(x) \le C_2$.

Зам. Ограниченность ф-и эквив-на ограниченности сверху $|f(x)|$.

Рассмотрим ф-ю, опр-ную на симметричном отн-но начала координат пром-ке, т.е. $\forall x \in X$ $-x \in X$.

Опр. Ф-я $f(x)$ наз. чётной, если $f(x) = f(-x)$ $\forall x$

Опр Ф-я $f(x)$ наз. нечетной, если $f(-x) = -f(x)$ $\forall x$.

Пусть T — некоторое ненул. действ. число (обычно считают $T>0$). Пусть $X \subset \mathbb{R}$ таково, что из $x \in X$ следует $x+kT \in X$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Опр Ф-я f наз. T-периодической, если $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in X$. При этом число T наз. периодом функции.

Упражнения.

① Найти область определения ф-и

а) $f(x) = \lg \dfrac{x+4}{1-2x}$ в) $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$

б) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$ г) $f(x) = \log_x(4-4x+x^2)$

д) $f(x) = \sqrt{x - x^3 + x^5}$

② Исследовать ф-ю на чет/нечет.

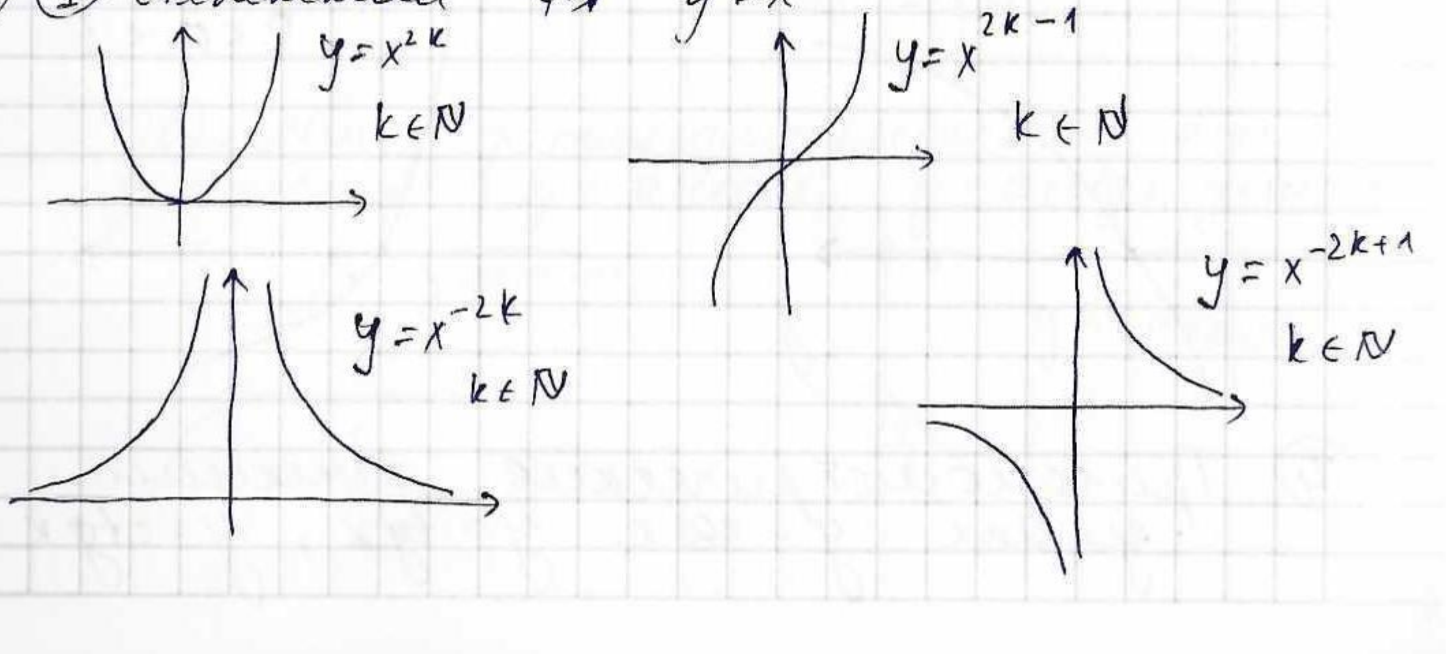
а) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x^2}{x^3+x}$ б) $f(x) = 2\sin x^2 \operatorname{tg} x^3$

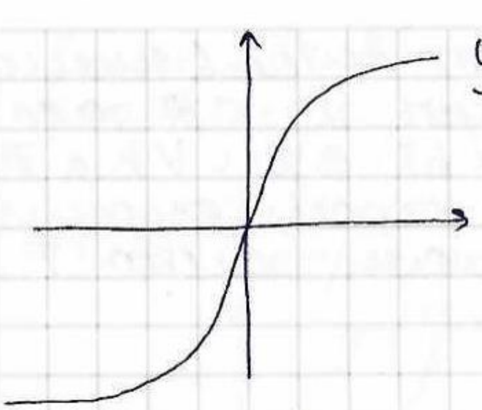
в) $f(x) = (x+x^2)^2$ г) $f(x) = \cos\sqrt{x^3+x}$

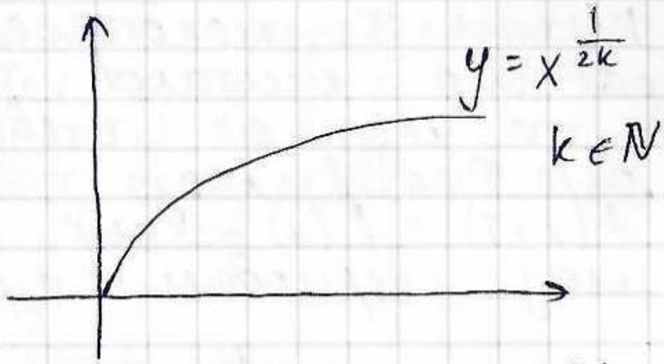
д) $f(x) = \arcsin(5^x + 5^{-x})$ е) $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{x^2+1}$

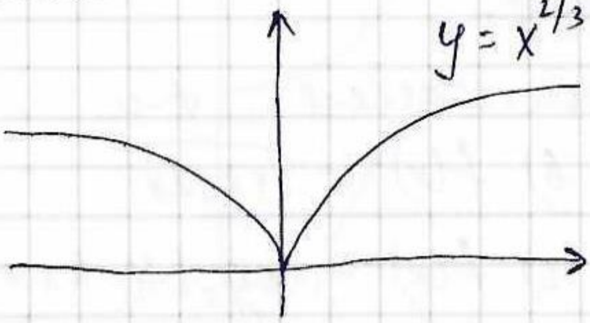
§6. Основные элементарные функции.

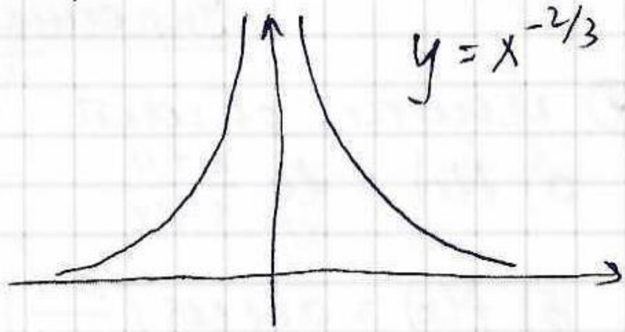
① Степенная ф-я $y = x^\alpha$



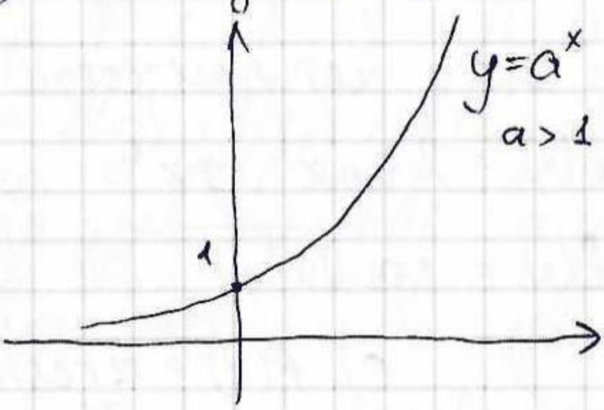


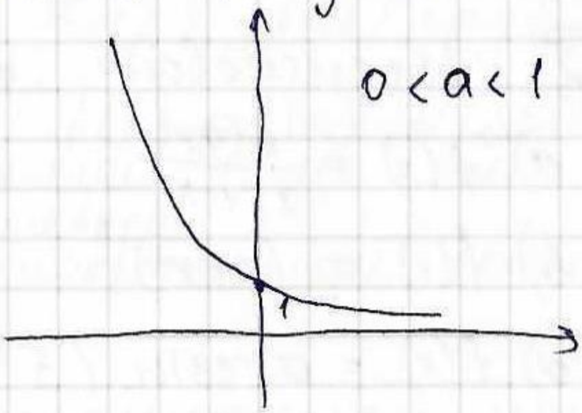




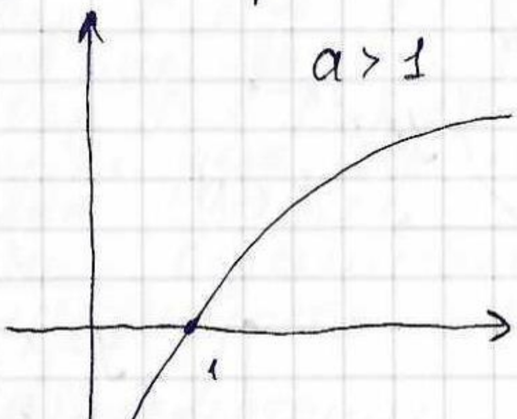


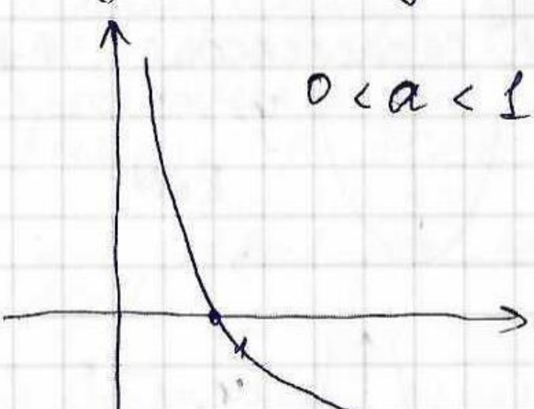
(2) Показательная функция $y = a^x$



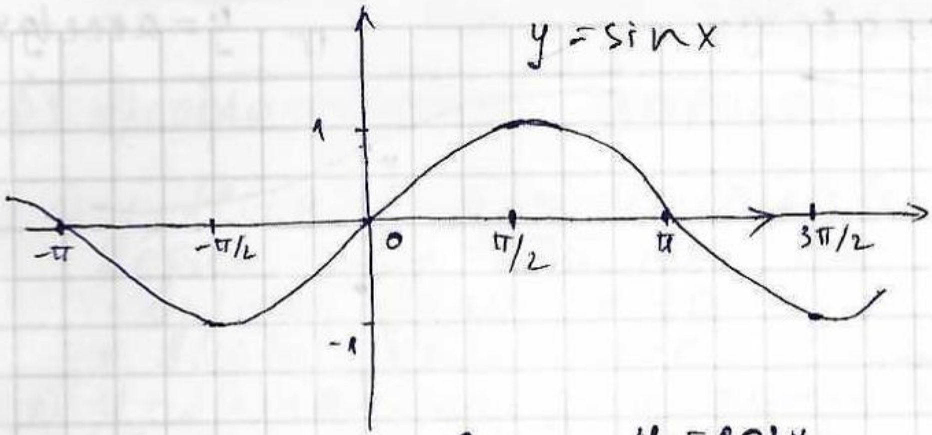


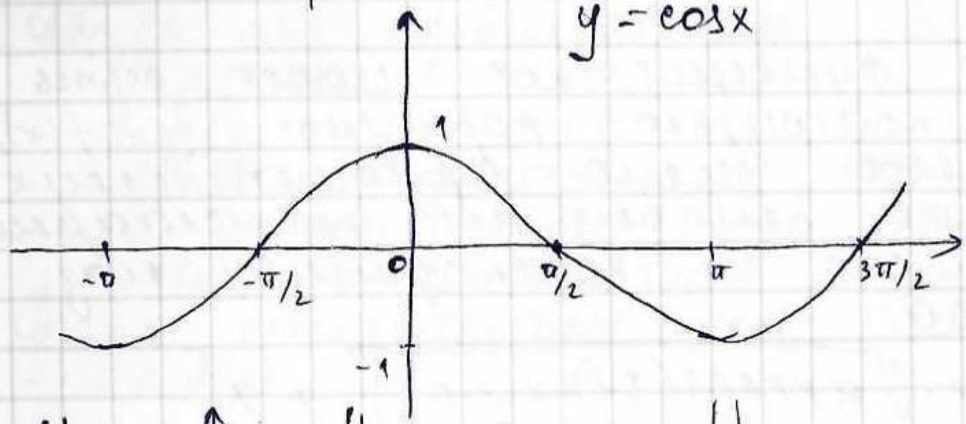
(3) Логарифмическая функция $y = \log_a x$

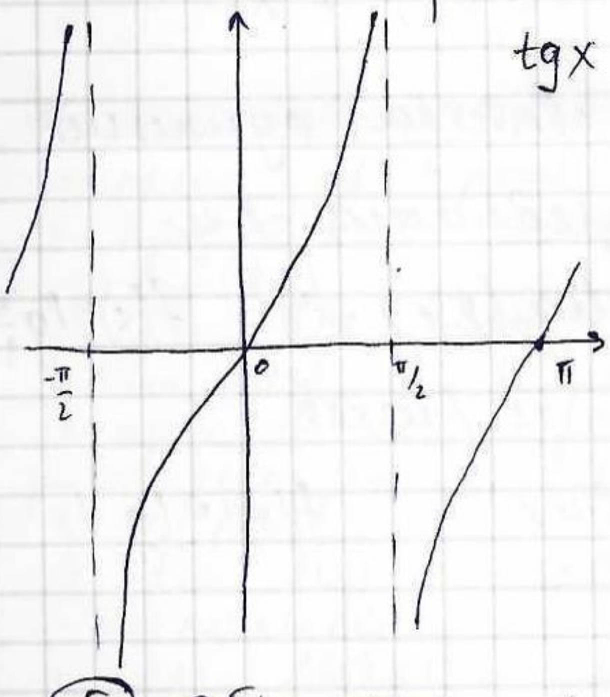


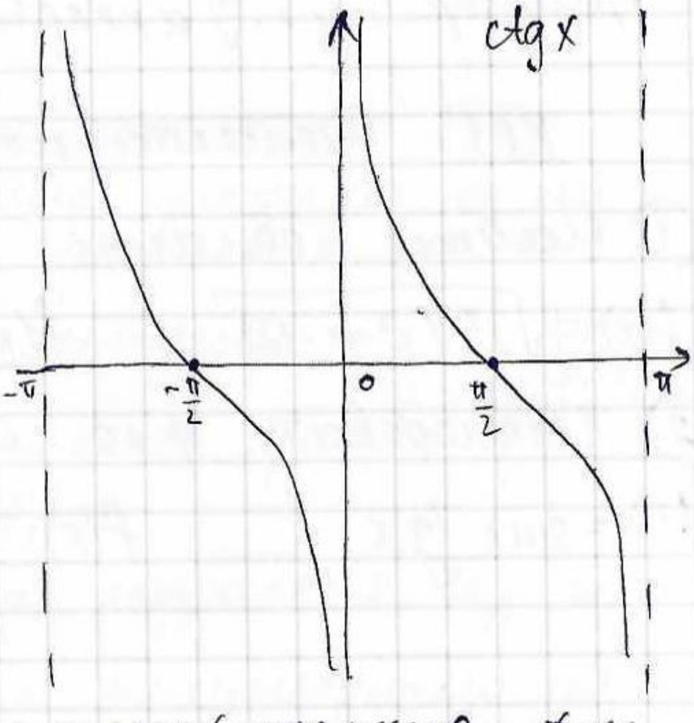


(4) Тригонометрические функции
$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$

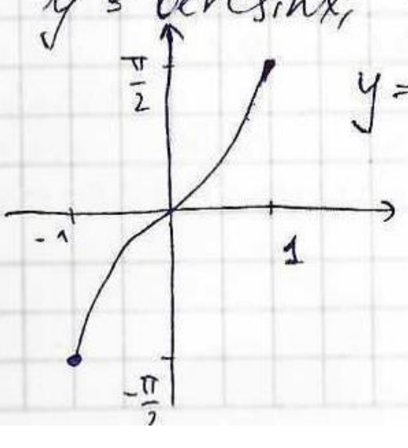


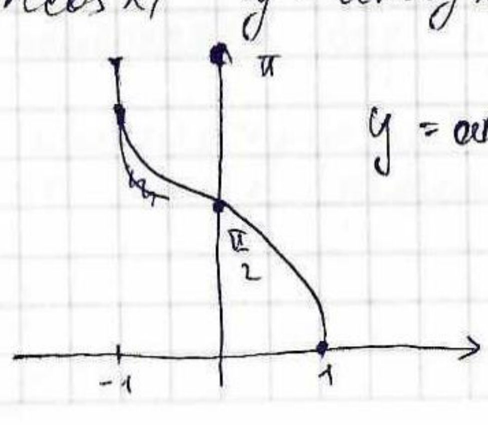


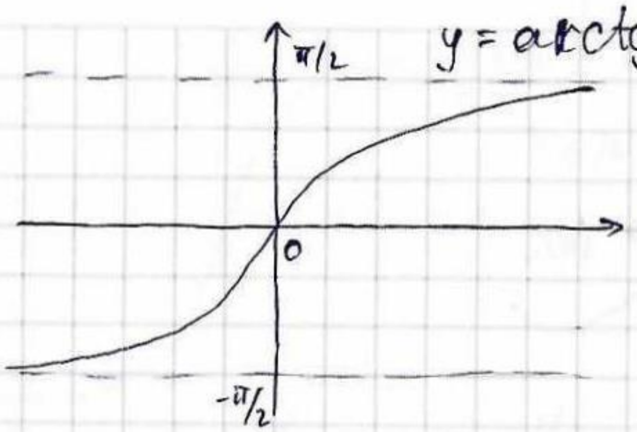


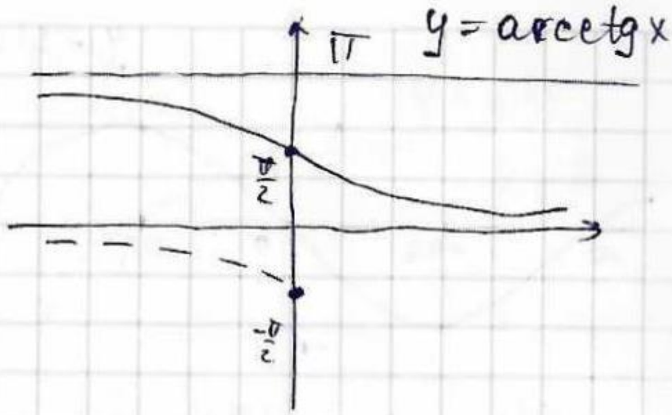


(5) Обратные тригонометрические ф-и
$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$









<u>Опр.</u> Всякая функция, кот. может быть задана с помощью формулы $y = f(x)$, содерж. конечное число арифметических действий над основными элементарными функциями и композиций, наз. <u>элементарной</u>.

<u>Пример</u> $y = \sqrt[3]{\arccos(3\ln x + e^x)} + x^5$

<u>КР1.</u> Элементарные свойства функций.

① Найти область определения ф-и

$f(x) = \sqrt{2^x(x^2 - x - 12)}$ $\qquad f(x) = \log_2(2 + x - x^2)$ $\qquad f(x) = \lg\frac{x+2}{3-x}$

② Исследовать ф-ю на чёт/нечёт.

$f(x) = \sin x \operatorname{tg} x^3$ $\qquad f(x) = x^3 \sin x^3$ $\qquad f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x^3}$