Лекция 2. Преобразование графиков. Понятие числовой послед-ти.

§1. Преобразование графиков функций.

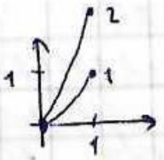
1) $y = f(x+a)$ - параллельный перенос графика вдоль оси абсцисс на $|a|$ единиц
   - вправо, если $a<0$
   - влево, если $a>0$

2) $y = f(x)+a$ - параллельный перенос графика вдоль оси ординат на $|a|$ единиц
   - вверх, если $a>0$
   - вниз, если $a<0$

3) $y = f(-x)$ - симметричное отражение графика относительно оси ординат

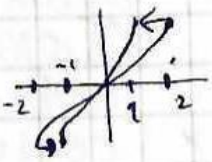
4) $y = -f(x)$ - симметричное отражение графика относительно оси абсцисс

5) $y = k\,f(x)$



   - при $k>1$ - растяжение графика от оси Ox
   - при $0<k<1$ - сжатие графика к оси Ox в $1/k$ раз

6) $y = f(kx)$



   - при $k>1$ - сжатие графика к оси Oy в k раз
   - при $0<k<1$ - растяжение графика от оси Oy в $1/k$ раз

7) $y = |f(x)|$
   - при $f(x) \geq 0$ - график остается без изменений
   - при $f(x)<0$ - график симметрично отражается относительно оси абсцисс

8) $y = f(|x|)$
   - при $x \geq 0$ - график остается без изменений
   - при $x<0$ - график симметрично отражается относительно оси ординат

Упражнение.

Построить эскизы графиков функций

① $f(x) = tg\,x + \sqrt{3}$ ② $y = ctg\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ③ $f(x) = -arcctg\,x$

④ $f(x) = 3\arcsin x$ ⑤ $f(x) = \arccos \frac{x}{2}$ ⑥ $f(x) = arctg(-x)$

⑦ $f(x) = |ctg\,x|$ ⑧ $f(x) = x^2 + 4|x| - 3$

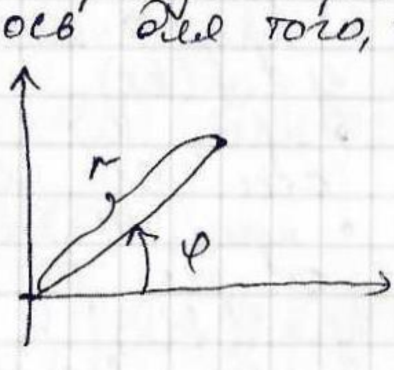
§2. Построение графиков в полярной СК.

Опр. Двумерная СК, в кот. каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.

Полярная СК определяется лучом, кот. называется полярной осью. Точка, из кот. выходит этот луч, наз. полюсом. Радиальная координата (r) — это расстояние от точки до начала координат. Угловая координата (φ) — угол, на кот. нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку.

Связь между декартовыми и полярными коор-тами:

$$\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} r^2 = x^2 + y^2 \\ \varphi = arctg(y/x) \end{matrix}$$

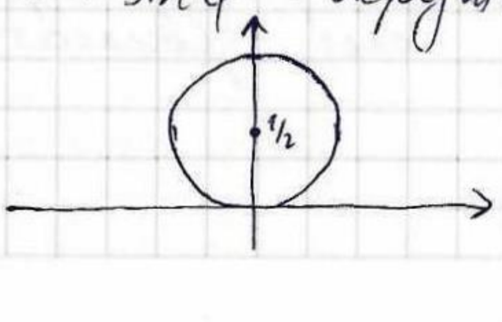


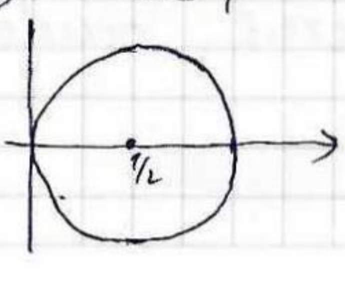
Упражнения

Построить кривую в полярной СК

① $r = 1$ — окружность

② $r = \sin\varphi$ — окружность ③ $r = \cos\varphi$ — окружность



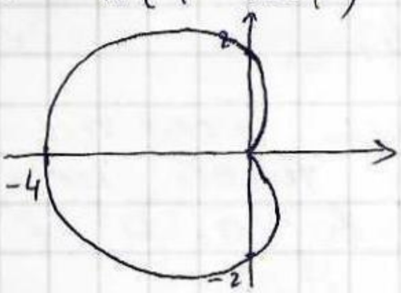


Можно получить ур-е окружности в ДСК: $x = r\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = x/r$

$y = r\sin\varphi \quad \sin\varphi = y/r \Rightarrow r = y/r$

$$r^2 = y$$
$$x^2 + y^2 = y$$
$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

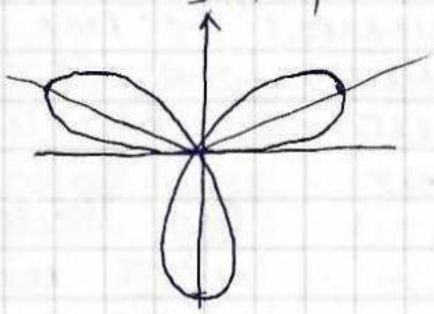
(4) $r = 2(1-\cos\varphi)$ - кардиоида



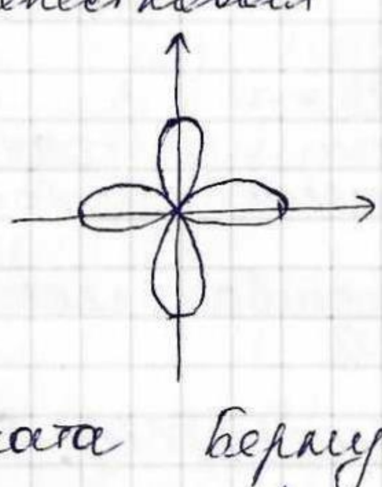
(5) $r = a(1+\cos\varphi)$ - тоже кардиоида (повернуть на 180°)

Если заменить $\cos\varphi$ на $\sin\varphi$, получится тоже кардиоида, но вытянутая вдоль Oy.

(6) Полярная роза (трёхлепестковая роза) $r = \sin 3\varphi$



(7) Четырёхлепестковая роза: $r = a\cos 2\varphi$



(8) Лемниската Бернулли: $r^2 = \cos^2\varphi$

§3. Понятие числовой послед-ти и её предела.

Опр. Последовательностью наз. числовую ф-ю натурального аргумента, т.е. отобр-е $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Обозначим $f(n) = a_n$, получим формулу n-го члена.

Сокращённо посл-ть обозн.: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Пример. $a_n = \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$

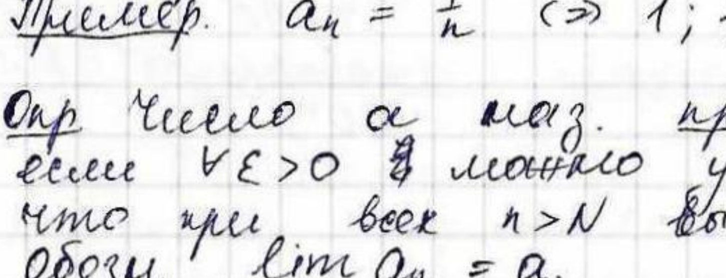
Опр. Число a наз. пределом посл-ти $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что при всех $n > N$ вып. нер-во $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозн. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$

$\forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon$

Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ означает, что все члены посл-ти, начиная с нек. номера $N+1$, попадают в ε-окрестность т. a (т.е. удалены от т. a на расстояние не больше ε).



Опр. Последовательность, имеющая предел, наз. сходящейся.

Пример 1) Пусть $a_n = n$

$\varepsilon = 1$. За пределами $(a-1; a+1)$ $\forall a$ находится ∞ много элементов $\Rightarrow$ послед-ть расх.

§4. Основные свойства сходящихся последовательностей.

Теор (о пределе постоянной). Если $x_n = c$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

Д-во: возьмём произв. $\varepsilon > 0$. Пусть $N = 1$. Тогда при $n \geq N$ имеем

$|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

По определению предела получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

<u>Теор</u> (<u>о единственности предела</u>). Последовательность не может иметь более одного предела (если $\exists \lim x_n$, то он единств.)

<u>Д-во</u>: Докажем теорему "от противного". Пусть посл-ть $\{x_n\}$ имеет 2 различных предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$.

Тогда для $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3} > 0$ имеем

$\exists N_1 : \forall n \geq N_1$ вып. $|x_n - a| < \varepsilon$

$\exists N_2 : \forall n \geq N_2$ вып. $|x_n - b| < \varepsilon$

Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для $\forall n \geq N$ оба неравенства выполнены.

$|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon =$
$= \frac{2}{3}|a-b| \Rightarrow |a-b| \leq \frac{2}{3}|a-b|$. Противоречие ∎

Понятия ограниченности, введённые для числовых ф-ий, естественным образом распространяются на числовые посл-ти.

<u>Опр</u> послед-ть $\{x_n\}$ наз. <u>ограниченной снизу</u>, если $\exists C_1 : x_n \geq C_1 \ \forall n$

<u>Опр</u>. посл-ть $\{x_n\}$ наз. <u>ограниченной сверху</u>, если $\exists C_2 : x_n \leq C_2 \ \forall n$

<u>Опр</u> посл-ть $\{x_n\}$ наз. <u>ограниченной</u>, если $\exists C_1, C_2 : \forall n \ \ C_1 \leq x_n \leq C_2$

<u>Теор</u>. (<u>об ограниченности сходящейся послед-ти</u>). Всякая сходящаяся посл-ть ограничена.

<u>Д-во</u>: Пусть $\{x_n\}$ сходится и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Для $\varepsilon = 1 \ \exists N : \forall n \geq N$ вып. $|a - x_n| < 1$.

$\Rightarrow |x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$.

Значит, $|x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, 1+|a|\}$, т.е. посл-ть ограничена. ∎

<u>Замечание</u>. Отбрасывание кон. числа членов посл-ти не влияет ни на сход-ть, ни на огр-ть посл-ти.

Теор. (о пределе неотрицательной посл-ти). Пусть $\forall n > N_0$, $a_n \geq 0$. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Тогда $A \geq 0$.

Д-во: "От противного". Пусть $A < 0$. Возьмем $\varepsilon = -A > 0$. Для него $\exists N : \forall n \geq N$ $|x_n - A| < -A \Rightarrow$

$$-(-A) < x_n - A < -A \quad |+A$$
$$2A < \underline{x_n < 0}.$$ Противоречие. ∎

§ 5. Арифметические операции над последовательностями.

Пусть даны посл-ти $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда можно составить посл-ти $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$, кот. наз. соот-но суммой, разностью, произведением и частным посл-тей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теор. (об арифм. операциях над сход. посл-тями). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда посл-ти $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$ сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$; $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$ (последнее верно, если $y_n \neq 0$ $\forall n$ и $b \neq 0$).

Д-во. Докажем теор. только для суммы. Пусть задано $\varepsilon > 0$.

Тогда для $\varepsilon/2 > 0$ $\exists N_1 : \forall n \geq N_1$ $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists N_2 : \forall n \geq N_2$ $|y_n - b| < \varepsilon/2$.

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для $n \geq N$ выполнены оба неравенства.

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leq$$
$$|x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Отсюда по определению предела получаем требуемое. ∎

§6. Понятие фундам. послед-ти.

Опр Посл-ть $\{x_n\}$ наз. фундаментальной, если $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall m \geq N,\ n \geq N$ вып. $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Теор (критерий Коши сходимости посл-ти). Посл-ть сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна. □

КР2. Построение эскизов графиков функций

① $y=\frac{\pi}{3}+\arccos x$ ① $y=\operatorname{ctg}x-1$ ① $y=\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{3})$

② $y=\operatorname{tg}2x$ ② $y=\frac{2}{\pi}\arcsin x$ ② $y=2\cos 2x$

③ $y=|\ln x|$ ③ $y=|\operatorname{arctg}x|$ ③ $y=e^{|x|}$