Лекция 3. Монотонные последовательности. Число e.

§1. Монотонные последовательности.

Понятие монотонности числовой функции применимо и к последовательностям.

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ наз. возр / убыв. / невозр / неубыв., если $x_{n+1} > x_n$ / $x_{n+1} < x_n$ / $x_{n+1} \leq x_n$ / $x_{n+1} \geq x_n$.

Опр. Послед-ть $\{x_n\}$ наз. монотонной, если она возр, убыв, невозр. или неубыв.

Опр. Последов-ть $\{x_n\}$ наз. строго монотонной, если она возр или убыв.

Теор (о сходимости монотонной послед-ти). Монотонная послед-ть сходится $\Leftrightarrow$ она ограниченна. ∎

Примеры монотонных посл-тей:

① Посл-ть $\{x_n\}$, $x_n = \frac{1}{n}$ явл. убывающей.
В этом можно убедиться непосредственно:
$n+1 > n \Rightarrow 1/(n+1) < 1/n$.
Она ограниченна (снизу - нулем, сверху - единицей) $\Rightarrow$ сходится.

② $\{x_n = n\}$. явл. возрастающей
Она огр. снизу числом 1, а сверху не огр $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ расходится

③ $\{x_n = n/(n+1)\}$ явл. возрастающей
Она огр. сверху числом 1, а снизу нулем $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ сходится.

Как определить монотонность послед-ти?

1) Рассмотреть разность $x_{n+1} - x_n$ для произв. n.
Если удается показать, что эта разность
- >0 - послед-ть возр.
- <0 - послед-ть убыв.
- ≥ 0 - послед-ть неубыв.
- ≤ 0 - послед-ть невозр.

2) Если $x_n > 0$ $\forall n$, то можно рассмотреть отношение x_{n+1}/x_n. Если удается показать, что

это отношение:

>1 - послед-ть возр.

<1 - послед-ть убыв.

≥ 1 - послед-ть неубыв.

≤ 1 - послед-ть невозр.

Пример. Докажем монотонность посл-ти $\{x_n = n/(n+1)\}$. $\forall n \quad x_n > 0 \Rightarrow$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n+2} : \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$$

($\forall n$ числ-ль больше знам.) $\Rightarrow$ посл-ть возр.

Кроме того, в возрастании послед-ти можно убедиться непосредственно:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \underbrace{1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{убыв.}}}_{\text{возр.}}$$

Упражнения

① Определить, явл. ли посл-ть монотонной. Если да, опр-ть, какой именно (возр, убыв, невозр, неубыв) она является. ~~Если нет, указать номер N такой, что $|x_N \cdot x_{N+2}| > x_{N+1}^2$~~

ⓐ $x_n = \dfrac{4n+1}{5n+2}$ (возр) ⓑ $x_n = \dfrac{n+3}{5n+3}$ (убыв.)

§2. Нахождение пределов последовательностей

Пусть надо найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{m_1}(n)}{S_{m_2}(n)}$, где $S_{m_1}(n)$, $S_{m_2}(n)$ - многочлены степеней m_1 и m_2 соответственно. Этот предел равен:

1) ∞, если $m_1 > m_2$

2) 0, если $m_1 < m_2$

3) отношению коэф-тов при старших степенях многочлена, если $m_1 = m_2$.

Опр. Говорят, что $\lim x_n = \infty$, если $\forall M > 0 \ \exists N: \forall n \geq N$ ~~$\exists$~~ вып. $|x_n| \geq M$.

Упражнения

① Найдите предел послед-ти (К задаче 1)

ⓐ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+1}{7-9n} = -\frac{5}{9}$ ⓑ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^3} = 0$

ⓥ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{95n^3+39n} = 0$ ⓖ $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = 0$

ⓓ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n} = -1$ ⓔ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$

ⓙ $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2-7n+4}-2n) = -\frac{7}{4}$

② Дана последовательность $a_n = \frac{7n+4}{2n+1}$. Найти её предел. Определив для каждого $\varepsilon>0$ наименьшее число $N=N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n-a|<\varepsilon$ для всех $n\geq N(\varepsilon)$, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Заполнить таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$	2	24	249

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{7}{2}$. $n \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon}-1\right)$,

§3. Число e.

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что она сходится. Для этого рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и докажем, что она убывает.

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}$$

Неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx,\ n\in\mathbb{N},\ x>-1$.

$$\Rightarrow \frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \geq$$

$$\geq \left(1+\frac{n+1}{n^2+2n(+1)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} = 1$$

$\Rightarrow y_n > y_{n+1}$ – посл-ть убывает.

Посл-ть огр. (сверху – своим первым эл-том, снизу – единицей), след-но, она сходится.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$.

Таким же будет и предел посл-ти $\{x_n\}$.

В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

Итак, число e — это предел

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Вычислять число e научимся позднее.

$e \approx 2{,}718281828459045\ldots$

~~§4. Предел функции в точке.~~

§4 Понятие окрестности точки.

Пусть $x_0 \in R$

Опр Окрестностью т. x_0 наз. любой интервал, содержащий т. x_0.

Обозн.: $U(x_0)$

Опр ε-окрестностью т. x_0 наз. мн-во

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in R : x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon\}$$

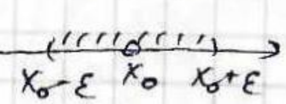
При этом

x_0 – центр интервала,

ε – радиус; 2ε – длина инт-ла

Опр. Проколотой ε-окрестностью т. x_0 наз. объединение интервалов $(x_0-\varepsilon; x_0)\cup(x_0; x_0+\varepsilon)$

Обозн.: $\mathring{U}_\varepsilon(x_0)$.



Опр. Окрестностью $+\infty$ наз. бесконечный интервал $(a; +\infty)$ при нек. $a>0$

Опр. Окрестностью $-\infty$ наз. бесконечный интервал $(-\infty; a)$ при $a>0$.

Опр. Окрестностью ∞ (без знака) наз. объединение интервалов $(-\infty; -a)\cup(a; +\infty)$ при нек. $a>0$.

§5. Предел функции в точке.

Пусть ф-я $f(x)$ определена в проколотой окрестности т. x_0.

Опр. (Коши). Число A наз. пределом ф-и $f(x)$ в т. x_0 (или при $x\to x_0$), если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0 : \forall x$
$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

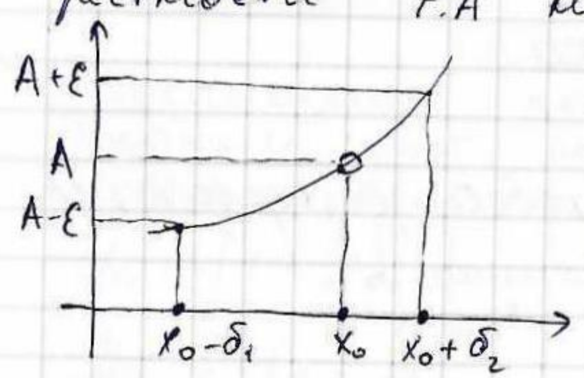
Обозн.: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Заметим, что нер-во $0<|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$, $|f(x)-A|<\varepsilon \Leftrightarrow f(x)\in U_\varepsilon(A)$.

Определение предела на языке окрестностей:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon) : \forall x\in\mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(A)}$$

Геометрическая интерпретация: для любой ε-окрестности т. A найдётся такая δ-окрестность т. x_0, что $\forall x$ из этой окрестности, за исключением, возможно, самой точки x_0, значения функции лежат в этой ε-окрестности т. A.



Опр. (Гейне). Число A наз. пределом функции $f(x)$ в т. x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n\neq x_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Теор Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны. □

Примеры. ① Покажем, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 2\cdot 2 = 4.$$

② Покажем, что $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

1) Пусть $x_n^{(1)} = \frac{1}{\pi n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(1)} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin \pi n = 0.$$

2) Пусть $x_n^{(2)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(2)} = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^{(1)}) \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n^{(2)}) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

КР3 "Предел числовой последовательности"

① Определить, явл. ли послед-ть монотонной:

$$x_n = \frac{3n+1}{5n+2} \qquad x_n = \frac{2n+2}{7n+1} \qquad x_n = \frac{3n^2+1}{4n^2+1}$$

② Найдите $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и определите номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N(\varepsilon)$, если $\varepsilon = 0{,}01$.

$$x_n = \frac{2n+2}{7n+1} \qquad x_n = \frac{3n+1}{5n+2} \qquad x_n = \frac{2n^2+3}{3n^2+1}$$