Лекция 4. Основные теоремы о пределах, односторонние пределы.

§1. Основные теоремы о пределах

① Теор (о единственности предела ф-ии в точке). Ф-я $f(x)$, определённая в т. x_0, может иметь не более одного предела при $x \to x_0$.

Д-во: "От противного".

Пусть $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $b = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $a \neq b$.

Для $\varepsilon = |a-b|/3 > 0$ $\exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

$\exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$ выполнены оба нер-ва: $|f(x) - a| < \varepsilon$, $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$|a - b| = |a - f(x) + f(x) - b| \leq |a - f(x)| + |f(x) - b| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b|$

Противоречие. ∎

② Теор (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел). Для ф-ии $f(x)$, имеющей конечный предел при $x \to x_0$, существ-ет проколотая окрестность данной точки, на которой эта функция огр.

Д-во: Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

Для $\varepsilon = 1$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$ $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Тогда для этих x:

$|f(x)| = |f(x) - a + a| < \varepsilon + |a| = 1 + |a| \Rightarrow f(x)$ огр в $\mathring{U}_\delta(x_0)$. ∎

③ Теор (о сохранении функцией знака своего пред.) Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0$. Тогда ф-я $f(x) > 0$ в некоторой окрестности т. x_0.

Д-во: Для $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - a| < \frac{a}{2}$. Для $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$:

$$-\frac{a}{2} < f(x) - a < \frac{a}{2} \quad \Big| +a$$

$$\frac{a}{2} < f(x) < \frac{3a}{2} \quad \Rightarrow f(x) > \frac{a}{2} > 0. \ ∎$$

④ Теор (о предельном переходе в нер-ве). Пусть ф-и $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окр-ти $\mathring{U}(x_0)$ т. x_0, причём $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$ вып. $f(x) \geq g(x)$.

Тогда, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, то $a \geq b$.

Д-во: "От противного".

Пусть усл-е теор вып., но $a < b$.

Пусть $\varepsilon = (b-a)/2 > 0$.

$\exists \delta_1$: при $0 < |x - x_0| < \delta_1$ вып. $|f(x) - a| < \varepsilon$

$\exists \delta_2$: при $0 < |x - x_0| < \delta_2$ вып. $|g(x) - b| < \varepsilon$

пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда вып. оба нер-ва.

Для $\forall x \in U_\delta(x_0)$:

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$
$$b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon$$

$$\Rightarrow a + \varepsilon = (a+b)/2, \quad b - \varepsilon = (a+b)/2 \Rightarrow$$

$$f(x) < \frac{a+b}{2} < g(x) \Rightarrow f(x) < g(x).$$ Противоречие. ■

Замечание. Если в формулировке теор. неравенство заменить на строгое, то из этого, вообще говоря, не следует $a < b$. Например, при $0 < x < 1$ $|x| > x^2$, но $\lim_{x\to 0} |x| = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$, т. е. $a = b$.

Следствие (теор о сохранении пределом знака функции) пусть $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $f(x) \geq 0$ в некоторой окрестности т. x_0. Тогда $a \geq 0$.

Д-во: Пусть в пред. теор $g(x) \equiv 0$. Тогда $a \geq 0$. ■

5) Теор (о пределе промежуточной функции). — "Лемма о двух милиционерах".

Пусть для $\forall x \in U(x_0)$ выполнено двойное неравенство $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, и пусть $\exists$ пределы: $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} h(x)$, причем $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a$

Тогда $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$.

Д-во: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Rightarrow$ Для нек. $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_1(\varepsilon) > 0$:

$\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

$\lim_{x\to x_0} h(x) = a \Rightarrow$ для этого $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_2(\varepsilon) > 0$:

$\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon$

$|f(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$

$|h(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon$.

пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда оба нер-ва вып. $\Rightarrow$

$$a - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < a + \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = a.$$ ■

⑥ Теор. (об арифм. операциях над ф-ями, имеющими предел). Пусть $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда:

1) $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

2) $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$

3) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ (если $B \neq 0$, $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$).

Д-во: Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последов-ть, кот. сходится к x_0. Тогда согласно определению предела по Гейне $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$; $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$. Тогда по теор. об арифм. операциях над сход. посл-тями:

1) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \pm g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A \pm B$

2) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \cdot g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A \cdot B$

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)} = \frac{A}{B}$ ■

Следствие. Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, то $\forall c \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to x_0} c\, f(x) = cA$.

Д-во: по пред. теор. для пост. ф-и $g(x) = c$ получим $\lim_{x\to x_0} c\, f(x) = cA$. ■

⑦ Теор. (о пределе сложной функции). Пусть ф-я $f(x)$ определена в проколотой окрестности т. x_0 $U(x_0)$ и принимает значения в проколотой окрестности $V(y_0)$ т. y_0, причем $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Тогда, если ф-я $g(y)$ определена на $V(y_0)$ и $\lim_{y\to y_0} g(y) = a$, то и $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = a$. □

Замечание. Ограничение $f(x_0) \neq y_0$ можно отбросить, если ф-я $g(y)$ определена при $y = y_0$ и $g(y_0) = a$.

Упражнения

Вычислить пределы

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2}{3x^2-5x+1} = -2$

② $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x} = 0$

③ $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10} = \dfrac{1}{6}$

④ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt[6]{2}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+2}{(x-1)(x-4)} + \dfrac{x-4}{3(x-1)(x-2)} \right) = 0$

(К задаче 3А)

⑥ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{x^3+3x^2+3x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)^2(x^2-2)}{(x+1)^3} = -\infty$

⑦ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)^2(x-2)}{x(x+1)} = 0$

⑧ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)^2(x^2+1)} = 2$

⑨ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)^2(x+1)}{(x+2)^2(x-1)} = \dfrac{1}{3}$

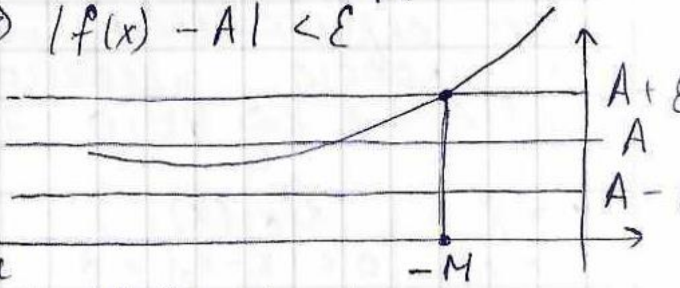
§2. Пределы при бесконечном стремлении аргумента.

Опр. Число A наз. пределом ф-ии $f(x)$ при $x\to+\infty$, если $\forall \varepsilon>0 \ \exists M>0 : \forall x>M \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

Обозн.: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

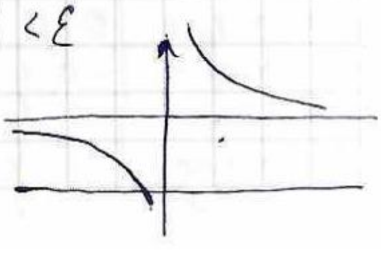
Опр. Число A наз. пределом ф-ии $f(x)$ при $x\to-\infty$, если $\forall \varepsilon>0 \ \exists M>0 : \forall x<-M \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

Обозн.: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$



Опр. Число A наз. пределом ф-ии $f(x)$ при $x\to\infty$, если $\forall \varepsilon>0 \ \exists M>0 : \forall x : |x|>M \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

Обозн.: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.



Упражнения

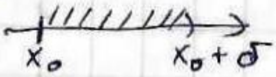
① $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\cos x+\frac{5x}{3x+7}\right)=\frac{5}{3}$

② $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^7+4x^4+1}{(x-2)^3(4x+5)^2(3x-1)^2}=\frac{7}{144}$

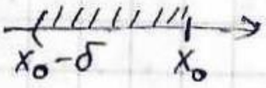
③ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+7x^2+\operatorname{arctg}x^5+e^{-x^2}}{\sqrt{x^3+x^4}}=7.$

§3. Односторонние пределы

Опр. Правой δ-полуокрестностью т. x_0 наз. мн-во $\mathring{U}_\delta^+(x_0)=\{x\in\mathbb{R}\mid x_0<x<x_0+\delta\}$



Опр. Левой δ-полуокрестностью т. x_0 наз. мн-во $\mathring{U}_\delta^-(x_0)=\{x\in\mathbb{R}\mid x_0-\delta<x<x_0\}$



Опр. Число A наз. правым пределом ф-и $f(x)$ в т. x_0, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in\mathring{U}_\delta^+(x_0)$: $|f(x)-A|<\varepsilon$

Обозн.: $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=A.$

Опр. Число A наз. левым пределом ф-и $f(x)$ в т. x_0, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in\mathring{U}_\delta^-(x_0):\ |f(x)-A|<\varepsilon$

Обозн.: $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=A.$

Теор. $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\iff\exists\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=A.$ □

Если воспользоваться общим определением предела на языке окрестностей, а потом определением окрестностей, можно составить определение любого предела по Коши.

$\lim\limits_{x\to\tilde{x}}f(x)=A\iff\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ x\in\mathring{U}_\delta(\tilde{x}):\ f(x)\in U_\varepsilon(A).$

$x\to\tilde{x}$	$\mathring{U}_\delta(\tilde{x})$
$x\to x_0$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$
$x\to x_0+$	$0<x-x_0<\delta$
$x\to x_0-$	$-\delta<x-x_0<0$
$x\to\infty$	$\lvert x\rvert>\delta$ б.
$x\to+\infty$	$x>\delta$ б.
$x\to-\infty$	$x<-\delta$ б.

A	$U_\varepsilon(A)$
a	$\lvert f(x)-a\rvert<\varepsilon$
∞	$\lvert f(x)\rvert>\varepsilon$ б.
$+\infty$	$f(x)>\varepsilon$ б.
$-\infty$	$f(x)<-\varepsilon$ б.

Упражнения

Вычислить односторонние пределы:

(1) $\lim\limits_{x\to 3\pm} \frac{x-3}{|x-3|} = \pm 1$ (2) $\lim\limits_{x\to 0\pm} (2+x)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{matrix} +\infty \\ 0 \end{matrix}\right]$

(3) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$ (4) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -1$

(5) $\lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right]$

КР4. "Предел функции в точке"

(1) Дать определение предела по Коши:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = a$ $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$

(2) Вычислить пределы функции

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-2x+1}$ $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$

$\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ (1/4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ (3/2)

$\lim\limits_{x\to 1\pm} \frac{x^2-2x+1}{|x-1|}$ $\lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ $\lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{2+3^{\frac{1}{x}}}$