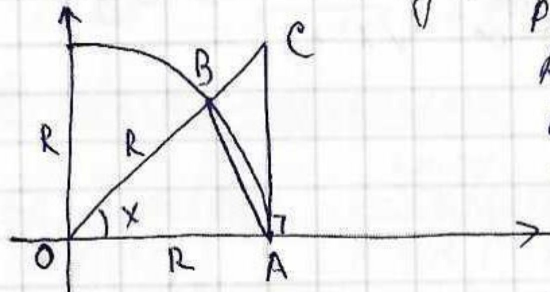
Лекция 5. Замечательные пределы.

§1. Первый замечательный предел и его следствия

Теор (первый зам. предел). Имеет место тождество

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

Д-во: пусть $0 < x < \pi/2$.



Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в т. A, пусть $\angle OAB$ равен x.
Пусть CA — перпендикуляр к оси.

Тогда:

$$S_{\Delta AOB} < S_{\text{сек. } AOB} < S_{\Delta AOC}$$

$$S_{\Delta AOB}=\frac12 R\cdot R\cdot\sin x=\frac12R^2\sin x$$
$$S_{\text{сек. } AOB}=\frac{\pi R^2}{2\pi}\cdot x=\frac12R^2x$$
$$S_{\Delta AOC}=\frac12 OA\cdot AC=\frac12R^2\,\mathrm{tg}\,x\ \Rightarrow$$

$$\frac12R^2\sin x\le\frac12R^2x\le\frac12R^2\,\mathrm{tg}\,x\ \Rightarrow\ \sin x\le x\le\mathrm{tg}\,x\ \Big|:\sin x$$

$$1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}\ \Rightarrow\ \cos x\le\frac{\sin x}{x}\le1$$

$\lim_{x\to0}1=1,\ \lim_{x\to0}\cos x=1$ $\Rightarrow$ по теор о пределе промежуточной функции получим $\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=1.$ ∎
Аналогично $\lim_{x\to0-}\frac{\sin x}{x}=1$

Следствия:

1) $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$

Д-во: $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\{x=\sin t\}=\lim_{t\to0}\frac{\arcsin(\sin t)}{\sin t}=1.$ ∎

2) $\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=1.$

Д-во: $\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac1x=\frac{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}{\lim_{x\to0}\cos x}=1.$ ∎

3) $\cancel{\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1.}$

$\cancel{\text{Д-во: }\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\left|\begin{matrix}\arcsin x=y\\ y\to0\end{matrix}\right|=\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y}=1.}$ ∎

③ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = y \\ y \to 0 \end{array} \right| = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1.$ ■

④ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \overset{\to 1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} \cdot \overset{\to 1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ■

§2. Второй замечательный предел и его сл-я

Теор (второй зам. предел). Имеет место тожд-во:

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$ или $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$ □

Следствия:

① $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} =$
$= \log_a e = \frac{1}{\ln e}$ ■

② $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln e} = 1.$ ■

③ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \left| \begin{array}{c} a^x - 1 = y \\ y \to 0 \\ x = \log_a (1+y) \end{array} \right| = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y}{\log_a (1+y)} = \ln e.$ ■

④ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1.$ ■

§3. Раскрытие неопределённости $[1^\infty]$.

Пусть надо вычислить $\lim\limits_{x\to a} [\varphi(x)]^{\psi(x)} = [1^\infty]$.

~~По теореме~~ Функцию $\varphi(x)$ представляем в виде:
$\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$. Тогда

$\lim\limits_{x\to a} [1+\alpha(x)]^{\psi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \left\{ [1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right\}^{\alpha(x)\cdot\psi(x)} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)\cdot\psi(x)}$,

после чего остается только раскрыть неопр-ть $[0\cdot\infty]$

Упражнения

① $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1} = [1^\infty] = e^{10}$

② $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty] = \frac{1}{\sqrt{e}}$

③ $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(2+x)-\ln x) = 2$

④ $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e$

§4. Бесконечно малые функции

Опр. Ф-ия $\varphi(x)$ наз. бесконечно малой при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$.

Теор. (о связи функции, ее предела и бесконечно малой) Ф-я $f(x)$ имеет предел, равный a, при $x\to x_0$ $\Leftrightarrow$ $f(x)=a+\varphi(x)$, $\varphi(x)$ – б.м. при $x\to x_0$

Д-во: ($\Rightarrow$) необходимость

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$. Значит $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$:

$\forall x: 0<|x-x_0|<\delta$ вып. $|f(x)-a|<\varepsilon$

пусть $\varphi(x)=f(x)-a \Rightarrow |\varphi(x)|<\varepsilon \Rightarrow \varphi(x)$ – б.м.

($\Leftarrow$) Достаточность

Пусть $f=a+\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – б.м. при $x\to x_0$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(a+\varphi(x))=\lim\limits_{x\to x_0}a+\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$. ■

§5. Свойства бесконечно малых функций

① Теор (о сумме конечного числа б.м.). Пусть ф-ии $\varphi_1(x),..,\varphi_n(x)$ – б.м. при $x\to x_0$. Тогда их алгебраическая сумма $\Sigma\pm\varphi_i(x)$ – тоже б.м. при $x\to x_0$.

Д-во: по теореме об арифм. операциях над функциями, имеющими предел

$\lim\limits_{x\to x_0}(\Sigma\pm\varphi_i(x))=\Sigma\lim\limits_{x\to x_0}(\pm\varphi_i(x)) = \pm\Sigma 0 = 0$ ■

② Теор (о произведении бесконечно малой на огр.) Пусть в проколотой окр-ти $\mathring{U}(x_0)$ т. x_0 заданы ф-ии $f(x)$ и $\varphi(x)$, причем $f(x)$ огр. на $\mathring{U}(x_0)$, а $\varphi(x)$ – б.м. при $x\to x_0$. Тогда ф-я $f(x)\varphi(x)$ – беск. малая при $x\to x_0$.

Д-во: $f(x)$ огр в $\mathring{U}(x_0)$ $\Rightarrow \exists C>0 : |f(x)| \le C \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$
Пусть задано произв. $\varepsilon>0$. Для числа $\varepsilon/_{C+1}$ $\exists \delta(\varepsilon)>0$: $\forall x : 0<|x-x_0|<\delta$ вып. $|\varphi(x)|<\varepsilon/_{C+1}$. Для таких x вып.
$$|f(x)|\cdot|\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{C+1}\cdot C < \varepsilon \Rightarrow |f(x)\varphi(x)|<\varepsilon \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ ф-я $f(x)\cdot\varphi(x)$ – б.м. при $x\to x_0$. ■

Опр. Ф-я $f(x)$, определенная в некоторой проколотой окр-ти т. x_0, наз. бесконечно большой при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

(3) Теор (о связи м/у бесконечно малой и бесконечно большой). Пусть $\varphi(x)\ne 0$ в некоторой проколотой окр-ти т. x_0. Ф-я $\varphi(x)$ б.м. при $x\to x_0 \Leftrightarrow 1/\varphi(x)$ б.б. при $x\to x_0$. □

§6. Сравнение б.м. при заданном стремлении

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – б.м. при $x\to x_0$.
Опр Говорят, что $\psi(x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с $\varphi(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}(\psi(x)/\varphi(x))=0$.
Обознач.: $\psi(x)=o(\varphi(x))$
Опр. Говорят, что $\psi(x)$ имеет одинаковый порядок малости с $\varphi(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)/\psi(x)=C<\infty$, $C\ne 0$.

Опр. Говорят, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ эквивалентные б.м при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)/\psi(x)=1$.

Опр Если не сущ-ет ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)/\psi(x)$, то ф-и $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ наз. несравнимыми при $x\to x_0$.
Пример. 1) $1-\cos x=o(x)$
2) $y_1=\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2}$, $y_2=x^2$ – б.м. одного пор.
3) $y_1=x$; $y_2=x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ – несравнимы

Из следствий 1-го и 2-го замечательных пределов получаем неск. изв. эквивалентных б.м. ф.:

$\sin x \sim x$

$\operatorname{tg} x \sim x$

$\arcsin x \sim x$

$\operatorname{arctg} x \sim x$

$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$\ln(1+x) \sim x$

$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$

$e^x - 1 \sim x$

$a^x - 1 \sim x \ln a$

$(1+x)^k - 1 \sim kx$

в частн. $\sqrt{1+x} - 1 \sim x/2$

§7. Свойства эквивалентных б.м.

① Теор (о транзитивности отношения экв-ти б.м.) Отношение эквивалентности б.м. обладает свойством транзитивности: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$, а $\psi(x) \sim \eta(x)$ при $x \to x_0$, то $\varphi(x) \sim \eta(x)$ при $x \to x_0$.

Д-во: Рассмотрим предел:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\eta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{\psi(x)}{\eta(x)} = 1 \cdot 1 = 1.$$

■

② Теор. (о необходимом и достаточном усл-и эквивалентности б.м.) Бесконечно малые ф-и $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ экв-ны при $x \to x_0 \Leftrightarrow$ их разность имеет более высокий порядок малости по сравнению с каждой из них.

Д-во: ($\Rightarrow$) Необходимость.

Пусть $\varphi(x)/\psi(x) \to 1$ при $x \to x_0$. Тогда по теор. о связи функции, её предела и б.м. имеем

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1 + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.} \Rightarrow$$

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1 + \alpha(x) \Rightarrow \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\psi(x)} = \alpha(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\psi(x)} = 0$$

Т.о. $\varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x))$.

Аналогично $\varphi(x) - \psi(x) = o(\varphi(x))$

($\Leftarrow$) Достаточность

Имеем $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\psi(x)} = 0$; $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\varphi(x)} = 0$.

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1 \Rightarrow \varphi(x) \sim \psi(x).$$

■

③ Теор. (об использовании эквив. б.м. при вычислении пределов). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — б.м. при $x \to x_0$. Пусть $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \to x_0$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = A$, то и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. (конечному или ∞)

Д-во: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(x)}{g(x)} = A \cdot 1 = A$. ■

Упражнения

(к задаче 3В).

① $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(1-\sqrt{1+3x})}{\cos\frac{\pi(x+1)}{2}}$ ② $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\cos 7x)}{\sin^2 \pi(x+7)}$

③ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-2x}{tg(2\pi(x+\frac{1}{2}))}$ ④ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

⑤ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+2\sin x)}{e^{2x}-1}$ ⑥ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\ln x}$

⑦ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$ ⑧ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x+\frac{5\pi}{2})\, tg x}{\arcsin(2x^2)}$

~~Упражнения~~

КР5 "Замечательные пределы"

① $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{4x-1}$ ① $\lim\limits_{x \to 0} (1+\ln(1+x))^{\frac{1}{2x}}$ ① $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+x}\right)^{3x+3}$

② $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin 7x}{arctg 8x}$ ② $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 5x}$ ② $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg 2x}{e^{3x}-1}$