Лекция 6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

§1. Раскрытие неопр-тей вида $[1^\infty]$.

Упражнения

(к задаче 3с)

① $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln(1+x^3)\right)^{\frac{3}{x^2\arcsin x}}$ ② $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\operatorname{tg}x}\right)^{\frac{1}{2^x-1}}$ ④ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin 4x}}$ ⑥ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x}}$

⑦ $\lim\limits_{x\to 0}\left(7-\frac{6}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$ ⑧ $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg}5x\sin 2x}}$

§2. Порядок малости и главная часть б.м.ф.

Опр. Число r наз. порядком малости ф-и $\alpha(x)$ по сравнению с $\beta(x)$, если
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r}=C,\quad C<\infty,\ C\neq 0.$$

Теор. (о сумме бесконечно малых разных пор.) Пусть $\alpha(x)=\alpha_1(x)+\ldots+\alpha_n(x)$, где $\forall i=\overline{1,n}$ $\alpha_i(x)$ — б.м. при $x\to x_0$ и $\alpha_k=o(\alpha_1(x))$, $k=\overline{2,n}$. Тогда $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$.

Д-во: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)+\ldots+\alpha_n(x)}{\alpha(x)}=1+$
$$+\sum_{k=2}^{n}\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_k(x)}{\alpha_1(x)}=1+0=1.\Rightarrow\alpha(x)\sim\alpha_1(x).\ \blacksquare$$

Опр. Бесконечно малую $\alpha_1(x)$ из пред. теор. наз. главной частью $\alpha(x)$ при $x\to x_0$.

При сравнении бесконечно малых в качестве эталона берут бесконечно малую $A(x-x_0)^k$, если x_0 конечно и A/x^k, если x_0 бесконечно.

Упражнения

Определить порядок малости $\alpha(x)$ относительно $\beta(x) = x$ при $x \to 0$

(1) $\alpha(x) = \frac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$ (2) $\alpha(x) = \frac{1-\cos x}{x}$

(3) $\alpha(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}} - 1$ (4) $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})$

(к задаче 4), часть 1.

Условие:

А. Показать, что каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ явл. б.м. при заданном стремлении.

Б. Для каждой ф-и $f(x)$ и $g(x)$ записать главную часть.

В. Сравнить $f(x)$ и $g(x)$, если это возможно.

(1) $f(x) = e^{4x} - e^x$, $g(x) = x + x\sin x$, $x \to 0$

(2) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{2+x^2}$, $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$, $x \to +\infty$

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$, $g(x) = \sqrt{\lg x}$, $x \to 1$

§3. Бесконечно большие функции

Опр. Ф-я $f(x)$ наз. бесконечно ~~бесконе~~ большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $(+\infty, -\infty, \infty)$.

Пусть $f(x)$, $g(x)$ — б.б. при $x \to x_0$.

Опр. Если $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, то $f(x)$ и $g(x)$ наз. бесконечно большими одного порядка при $x \to x_0$.

Опр. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, то $f(x)$ наз. бесконечно большой более высокого порядка, чем $g(x)$

Опр. Если $\nexists$ ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, то ф-и $f(x)$ и $g(x)$ наз. несравнимыми при $x \to x_0$.

Опр. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то $f(x)$ и $g(x)$ наз. эквивалентными б.б. при $x \to x_0$.

__Опр__ Порядком роста б.б.ф. $f(x)$ относительно б.б.ф. $g(x)$ наз. такое число k, что
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^k} = C \neq 0, \quad C<\infty.$$

__Теор.__ (__о сумме бесконечно больших разных пор.__) Сумма бесконечно больших разных пор. эквивалентна б.б. максим. порядка. □

В качестве эталона при сравнении бесконечно больших берут б.б. вида $A/(x-x_0)^k$, если $x\to x_0$ и Ax^k, если $x\to\infty$.

Упражнения
__(к задаче 4)__, часть 2.

1. $f(x) = x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$; $g(x) = x + x\sin x$, $x\to\infty$
2. $f(x) = x^4\sin\frac{1}{x} + x\cos x$; $g(x) = x\sqrt{x\sin x + 2x^2}$, $x\to+\infty$
3. $f(x) = \frac{2}{\sin(x-1)}$, $g(x) = \frac{1}{\lg x}$, $x\to 1+$

§4. Непрерывность функции в точке.

Пусть $X\subset\mathbb{R}$, на X задана ф-я $f(x)$, $x_0\in X$.

__Опр. 1__ Ф-я $f(x)$ наз. __непр__ в т. x_0, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$: $\forall x: 0<|x-x_0|<\delta$ вып. $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.
__Опр. 2__ Ф-я $f(x)$ наз. __непр__ в т. x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

__Опр.__ __Приращением__ аргумента наз. $\Delta x = x - x_0$, соответствующим приращением ф-и наз. $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.
__Опр. 3__ Ф-я $f(x)$ наз. __непрерывной__ в т. x_0, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0) = 0$.

Кроме того, можно дать опр-е непрерывности, основанное на опр-и предела по Гейне.
__Замечание.__ Все определения непрерывности эквивалентны.

(можно без д-в)

§5. Локальные свойства непрерывных функций.

① **Теор** (о непр-ти суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций). Пусть ф-и $f(x)$ и $g(x)$ определены в нек. окр-ти т. x_0 и непр. в этой точке. Тогда в т. x_0 непрерывны ф-и $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (если $g(x) \neq 0$ $\overset{o}{U}(x_0)$)

Д-во: Вытекает из свойств пределов и определения непрерывности функции.

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \quad \blacksquare$$

② **Теор.** (о непр-ти сложной функции). Пусть ф-я $f(x)$ опр-на в окр-ти $U(x_0)$ т. x_0 и принимает значения в окр-ти $V(y_0)$ т. $y_0 = f(x_0)$, и пусть на $V(y_0)$ определена ф-я $g(y)$. Тогда, если $f(x)$ непр. в т. x_0, а $g(y)$ непр. в т. y_0, то сложная ф-я $g(f(x))$ непр. в т. x_0.

Д-во: Теорема доказывается с пом. теоремы о пределе сложной ф-и.

$f(x)$ непр. в т. x_0 : $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$.

$g(y)$ непр. в т. y_0: $\lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0)$.

По теореме о пределе сложной ф-и

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)). \quad \blacksquare$$

Следствие. Из непр-ти $g(f(x))$ в т. $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$. Отсюда:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) -$$

для непрерывных функций знак предела и знак непрерывной функции перестановочны.

③ **Теор** (о сохранении знака непрерывной ф-и). Пусть $f(x)$ непр. в т. x_0, и $f(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окр-ти т. x_0 ф-я $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$.

Д-во: Пусть для опр-ти $f(x_0) > 0$. Тогда по теореме о сохранении функцией знака своего предела нер-во $f(x_0)>0$ будет выполняться и в некоторой окр-ти т. x_0. ■

§6. Непрерывность элементарных функций.

Теор (о непрерывности элементарных ф-ий). Все элементарные ф-и непр. в каждой точке своей области определения.

Д-во: чтобы д-ть эту теорему, дост-но доказать непрерывность основных элементарных ф-ий, после чего воспользоваться свойствами непр. ф-ий.

1) $f(x)=x$.

Воспользуемся опр. 1. Пусть задано $\varepsilon>0$, пусть $\delta=\varepsilon$. Тогда $\forall x: |x-x_0|<\delta$ вып. $|f(x)-f(x_0)| =$

$= |x-x_0|<\delta=\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

2) $f(x)=C$.

Воспользуемся опр. 2.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} C = C = f(x_0)$.

3) $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x+a_0$.

Воспользуемся доказанным выше и свойствами непр. функций.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{s=1}^{n} a_s x^s =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} a_s \cdot \lim_{x\to x_0} x^s = \sum_{s=1}^{n} a_s \cdot x_0^s = f(x_0).$$

4) $f(x)=\log_a x$

Воспользуемся опр. 3

$$\Delta f(x_0) = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{x\cdot \ln a} = 0$$

Аналогично можно доказать непрерывность всех элементарных функций. ■