Лекция 7. Непрерывность и точки разрыва

§1. Классификация точек разрыва

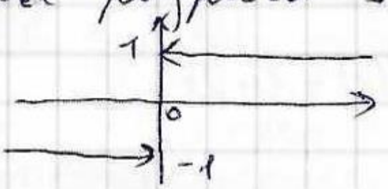
Опр. Точку $x_0 \in \mathbb{R}$ наз. точкой разрыва ф-и $f: X \to \mathbb{R}$, если $\mathring{U}_\delta(x_0) \in X$ и ф-я $f(x)$ либо не опр. в т. x_0, либо не явл. непр. в этой точке.

Опр. Если в т. x_0 $\exists$-ют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, ~~то~~ причем $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, то т. x_0 наз. точкой устранимого разрыва ф-и $f(x)$.

Пример. $x=0$ – точка устр разрыва ф-и $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Опр. Если в т. x_0 $\exists$-ют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, но $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, то т. x_0 наз. точкой разрыва I рода.

Пример $x=0$ – точка разрыва I рода ф-и $y = \operatorname{sgn} x$:



Опр. Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не сущ-ет или бесконечен, то т. x_0 наз. точкой разрыва II рода (точкой неустранимого разрыва).

Пример Рассмотрим ф-ю $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \to 0+} e^{\frac{1}{0+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0-} e^{\frac{1}{0-}} = e^{-\infty} = 0.$$

Упражнения

Найти точки разрыва функций, определить их характер, доопределить ф-ю (если возможно)

(1) $f(x) = \frac{|3x-5|}{3x-5}$ $\quad x = \frac{5}{3}$ – т.р. I рода

② $f(x) = 3^{\frac{x}{4-x^2}}$, $x = 2$ – т.р. II рода

③ $f(x) = \dfrac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$, $x = 2$ – т.р. I рода

④ $f(x) = \dfrac{3^{\frac{1}{x-2}} - 1}{3^{\frac{1}{x-2}} + 1}$, $x = 2$ – т.р. I рода

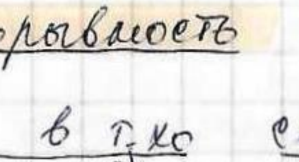
⑤ $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$ $x=0$, $x=1$ – т. устр. разрыва
$x = -1$ – т.р. II рода

⑥ $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 \le x < 1 \\ x-1, & 1 < x \le 4 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ $x = 1$ – т.р. I рода

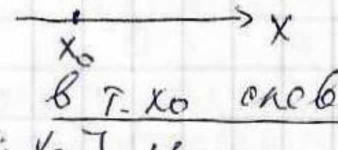
⑦ $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x \le 1 \\ 4-2x & 1 < x < 2,5 \\ 2x-7 & 2,5 \le x \le 4 \end{cases}$ $x = 1$ – не разрыв
$x = 2,5$ – т.р. I рода

§2. Односторонняя непрерывность

Опр. Ф-ция $f(x)$ наз. непр. в т. x_0 справа, если ф-я $f(x)$ опр-на в $[x_0; x_0+\delta)$ и
$\exists \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$



Опр. Ф-ция $f(x)$ наз. непр. в т. x_0 слева, если ф-я $f(x)$ опр-на в $(x_0-\delta; x_0]$ и
$\exists \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.



Опр. Ф-ция $f(x)$ наз. непр в интервале $(a; b)$, если она непр. в каждой точке этого интервала.
Опр. Ф-ция $f(x)$ наз. непр на отрезке $[a; b]$, если она непр в интервале $(a; b)$, а также непр. в т. $x = a$ справа и в т. $x = b$ слева.

§3 Свойства функций, непрерывных на отрезке

① Теор (Вейерштрасса об огр-ти непр на отрезке функции). Если ф-я $f(x)$ непр. на $[a; b]$, то она огр. на этом отрезке и достигает на нём своих наибольших и наименьших зн-й. □

Замечание. Для промежутков, не явл. отрезками, условия теоремы могут не вып. Напр, ф-я $f(x) = 1/x$ непр, но не ограничена на интервале $(0;1)$. Ф-я $f(x) = x$ непр. на $(0;1)$, но не имеет на этом промежутке своих наиб. и наименьших значений.

② Теор (первая теорема Больцано-Коши). Пусть $f(x)$ непр. на $[a;b]$ и достигает на концах отрезка значений разных знаков. Тогда $\exists c \in (a;b)$: $f(c) = 0$. □

③ Теор (вторая теорема Больцано-Коши, теор о промежуточном значении). Если ф-я $f(x)$ непр на $[a;b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, пусть C — любое число между A и B. Тогда $\exists x_c \in (a;b)$: $f(x_c) = C$ □

④ Теор (о непрерывности обратной функции) Пусть ф-я $f(x)$ определена, непр. и возрастает на $[a;b]$. Тогда на отрезке $[f(a), f(b)]$ определена обратная функция $f^{-1}(y)$, кот. непр. и возрастает на этом отрезке □

Замечание. Возрастающую функцию в формулировке теоремы можно заменить на убыв. Отрезки $[a;b]$ и $[f(a); f(b)]$ можно заменить интервалами $(a;b)$ и $(f(a+0), f(b-0))$, где

$$f(a+0) = \lim_{x\to a+} f(x), \quad f(b-0) = \lim_{b\to 0-} f(x),$$

причем последние могут быть бесконечностями.

§4. Асимптоты графика функции

Опр Пусть ф-я $f(x)$ определена в некоторой проколотой окр-ти т. x_0. Прямая $x = x_0$ наз. вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ равен ∞.

Пример. Ось ординат — вертикальная ас-та графиков ф-и $y=\log_a x$, $y=\operatorname{ctg} x$.

Опр. Пусть ф-я $f(x)$ опр-на при $x>x_0$. Прямая $y=a$ наз. правой горизонтальной асимптотой графика ф-и $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$.

Опр. Пусть ф-я $f(x)$ опр-на при $x<x_0$. Прямая $y=a$ наз. левой гор. ас-той графика ф-и $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$.

Пример. $y=\operatorname{arctg} x$, $y=a^x$, $y=\frac{1}{x}$ имеют правые или левые ас-ты.

Опр. Пусть ф-я $f(x)$ определена при $x>x_0$. Если $f(x)=Ax+B+o(1)$ при $x\to+\infty$, то прямая $y=Ax+B$ наз. правой наклонной ас-той графика ф-и $f(x)$. Аналогично, пусть ф-я $f(x)$ опр-на при $x<x_0$. Если $f(x)=Ax+B+o(1)$ при $x\to-\infty$, то прямая $y=Ax+B$ наз. левой накл. ас-той графика ф-и $f(x)$.
Замечание. Горизонтальная ас-та явл. частным случаем наклонной при $A=0$.
Пример. Прямые $y=\pm x$ — асимптоты гиперболы $x^2-y^2=1$.

Теор (о необходимых и достаточных условиях наличия накл. ас-ты). Пусть ф-я $f(x)$ определена при $x>x_0$. Прямая $y=Ax+B$ явл. правой наклонной ас-той графика ф-и $f(x)$ $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A;\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-Ax)=B.$$

Д-во: $(\Rightarrow)$ Необходимость.
Пусть $y=Ax+B$ — правая накл. ас-та графика ф-и $y=f(x)$. Тогда по опр-ю $f(x)=Ax+B+o(1)$, $x\to+\infty$. Отсюда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{Ax+B+o(1)}{x}=A.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-Ax)=\lim_{x\to+\infty}(B+o(1))=B.$$

$(\Leftarrow)$ Достаточность.

Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-Ax)=B$. Тогда по теор. о связи ф-и, её предела и б.м. имеем

$f(x)-Ax=B+o(1) \Rightarrow f(x)=Ax+B+o(1)$. ∎

Опр. Дробно-рациональной ф-ей наз. ф-я вида $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены степеней n, m соот-но.

Если $n=m+1$, то дробно-рац. ф-я имеет накл. ас-ту, причем левая и правая ас-ты совп.

Если $n\le m$, то дробно-рац. ф-я имеет гориз. асимптоту.

Упражнения

Найти асимптоты графиков ф-й:

(1) $y=\frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$ $\quad x=0$ – вертик.

$y=1$ при $x\to+\infty$

$y=-1$ при $x\to-\infty$

(2) $y=3x+\operatorname{arctg}5x$ $\quad y=3x+\frac{\pi}{2}$ – правая

$y=3x-\frac{\pi}{2}$ – левая

(3) $y=\frac{\ln(1+x)}{x^2}+2x$ $\quad x=0,\ x=-1$ – вертик.

$y=2x$ – правая накл.

(4) $y=\frac{2x^2+3x}{x+1}$

(5) $y=\frac{x^3+x^2}{x^2+1}$

(6) $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$ $\quad x=-\frac{1}{e}$ – вертикальная

$y=x+\frac{1}{e}$ – наклонная (правая и левая)

КР7. Непрерывность функции в точке. Асимптоты графика функции.

(1) Докажите, что $f(x)$ непр. в любой точке области определения