Лекция 8. Понятие производной

§1. Производная функции в точке

Пусть ф-я $y=f(x)$ определена в $U(x_0)$. Пусть $\Delta x = x - x_0$ – приращение арг-та в т. x_0, $x \in U(x_0)$, $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta) - f(x_0)$ – соотв. приращение функции.

Опр. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

то его наз. производной ф-и $f(x)$ в т. x_0

Обозн.: $f'(x_0)$, y'.

Пример. $y = x^3$

$$\Delta y = (x_0+\Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 = = 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 + (\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3x_0^2\cdot \Delta x + 3x_0 \cdot \Delta x^2}{\Delta x} = 3x_0^2$$

$$\Rightarrow (x^3)'\Big|_{x=x_0} = 3x_0^2.$$

Опр. Ф-ю $f(x)$ наз. дифференцируемой в т. x_0, если ее приращение в т. x_0 м.б. представлено в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \quad A = const$$

Теор (о необх. и дост. условии диф-ти ф-и в точке). Ф-я $f(x)$ диф-ма в т. x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists$ производная ф-я $f'(x)$ в т. x_0.

Д-во: ($\Rightarrow$) необходимость.

Ф-я $f(x)$ диф-ма в т. x_0 $\Rightarrow$ ее приращение представляется в виде:

$$\Delta y = A\cdot \Delta x + o(\Delta x).$$ Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{A\cdot\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = A = f'(x_0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\exists$ производная ф-и $f(x)$ в т. x_0.

($\Leftarrow$) Достаточность.

Пусть $\exists$ производная ф-и $f(x)$ в т. x_0:

$$\exists f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x), \quad \text{где } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0$$

Домножим на Δx

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \text{ т.е. } A = f'(x_0), \text{ и}$$

тогда $y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$. ∎

<u>Замечание</u> Таким образом, приращение $f(x)$ м.б. представлено в виде:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

Процесс нахождения производной ф-и $f(x)$ наз. её <u>дифференцированием</u>.

<u>Теор (о непрерывности диф. функции)</u>. Если $f(x)$ диф-ма в этой точке x_0, то она непр. в этой точке.

<u>Д-во</u>: Пусть $f(x)$ диф-ма в т. x_0. Тогда

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Отсюда $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0) \cdot \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0$

$\Rightarrow f(x)$ непр в т. x_0. ∎

<u>Замечание</u>. Условие непр-ти не явл. достаточным условием диф-ти.

<u>Пример</u> Пользуясь только определением производной, вычислим произв. ф-и $f(x) = 2^x$.

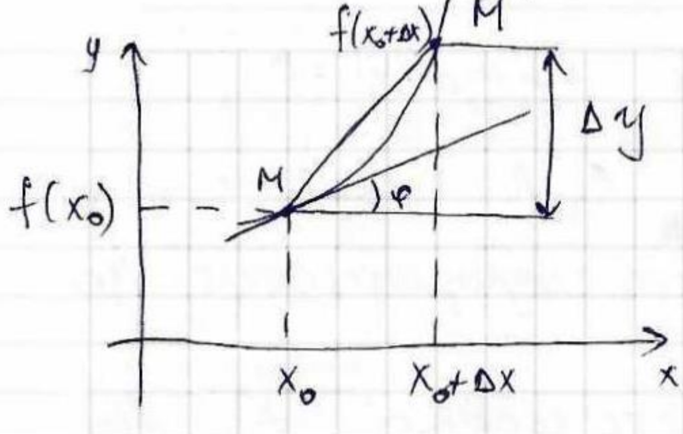
$\Delta y = 2^{x_0+\Delta x} - 2^{x_0} = 2^{x_0}(2^{\Delta x} - 1)$ Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2^{x_0}(2^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = 2^{x_0} \ln 2.$$

§2. <u>Геометрический смысл производной</u>.

Пусть имеется плоская кривая, и на ней две точки M и M', $M \neq M'$. Проведём секущую MM', а далее точку M' устремим к т. M, изучая при этом положение секущей. Если секущая при этом стремится занять некоторое предельное положение, то такое положение наз. <u>касательной</u> к кривой в т. M.

Пусть дан график ф-и $f(x)$, определённой в окр-ти т. x_0, и пусть т. $M(x_0; f(x_0))$. Возьмём на графике т. $M'(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$.



Тангенс угла наклона хорды MM':

$$tg\,\varphi = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Пусть при $\Delta x \to 0$ хорда занимает предельное положение — касательную к графику ф-и $f(x)$ в т. x_0.

Значит, тангенс угла наклона кас-ой:

$$tg\,\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Геом. смысл производной: производная ф-и $f(x)$ в т. x_0 равна тангенсу угла наклона кас-ой (угловому коэф-ту).

Уравнение касательной к графику ф-и $f(x)$ в т. x_0:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Опр Нормалью к графику ф-и $f(x)$ в т. x_0 наз. прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ перпендикулярно кас-ой.

Уравнение нормали к гр-ку ф-и $f(x)$ в т. x_0:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \text{или}$$
$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0.$$

Физический смысл производной: мгновенная скорость изменения координаты мат. точки равна $x'(t_0)$ в $t = t_0$, где $x(t)$ - закон изменения коор-ты мат. точки.

§3. Односторонние производные

Пусть ф-я $f(x)$ определена при $[x_0; x_0+\delta)$, Δx — приращение арг-та, Δy - соотв. приращение ф-и.

Опр Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ то}$$

его наз. правой производной ф-и $f(x)$. Обозн.: $f'_+(x_0)$.

Аналогично пусть $f(x)$ опр. при $(x_0-\delta; x_0]$

<u>Опр</u> Если $\exists$ -ет конечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$ то его наз. <u>левой производной</u> функции $f(x)$. Обозн.: $f'_-(x_0)$.

<u>Пример</u> Рассмотрим ф-ю $y=|x|$:

$$|x| = \begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0, \end{cases} \qquad f'(0) - ?$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Если } \Delta x>0, \text{ то } \lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1 \\ \text{Если } \Delta x<0, \text{ то } \lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1 \end{array}\right] \Rightarrow \nexists f'(0),$$

т.е. ф-я $f(x)=|x|$ не диф-ма в т. $x=0$.

Введём ещё понятие бесконечной произв.

<u>Опр</u> Если ф-я $f(x)$ определена в окр-ти т. x_0 и если сущ-ет предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=+\infty \text{ или } \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\infty,$$

то говорят, что $f(x)$ имеет в т. x_0 <u>бесконечную произв.</u>

Геом-ки это означает, что кас-я к графику ф-и в этой точке вертикальна.

§4. <u>Правила</u> <u>дифференцирования</u> (можно без д-в)

① <u>Теор.</u> (<u>о производной постоянной</u>) $C'=0$.

<u>Д-во</u>: $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0 \quad \blacksquare$$

② <u>Теор.</u> (<u>о производной суммы, разности, произведения и частного диф. функций</u>). Пусть ф-и $f(x)$ и $g(x)$ диф-мы в т. x_0. Тогда в этой точке также диф-мы ф-и $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ (последняя при $g(x_0)\neq 0$), причём

$$(f(x)\pm g(x))'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

$$(f(x)\cdot g(x))'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'\bigg|_{x=x_0}=\frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Д-во: 1) $$(f(x) \pm g(x))'\Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[f(x_0+\Delta x) \pm g(x_0+\Delta x) - (f(x_0)\pm g(x_0))\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)) \pm (g(x_0+\Delta x)-g(x_0))\right] = f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

2) $$(f(x)\cdot g(x))'\Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\cdot g(x_0)\right] = \{-f(x_0)\,g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)\}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\underline{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)} + \underline{f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right) =$$

$$= f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

3) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) =$$

$=$ {приведём к общему знаменателю} $=$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}{g(x_0)\,g(x_0+\Delta x)}\right) =$$

$$= \{-f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g(x_0)\} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}{g(x_0)\,g(x_0+\Delta x)}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot(g(x_0+\Delta x)-g(x_0))}{g(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x_0)\,g(x_0+\Delta x)}\cdot\left[\underbrace{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}_{f'}g(x_0) - f(x_0)\cdot\underbrace{\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}}_{g'}\right] =$$

$$= \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \blacksquare$$

Следствие. Постоянную можно выносить за знак производной: $(Cf(x))' = Cf'(x)$.

Д-во: $(Cf(x))' = C'f(x) + Cf'(x) = Cf'(x)$. $\blacksquare$

③ Теор. (о производной сложной функции). Пусть $y=f(x)$ диф-ма в т. x_0, ф-я $z=g(y)$ диф-ма в т. $y_0=f(x_0)$. Тогда функция $g(f(x))$ диф-ма в т. x_0 и $(g(f(x)))'(x_0) = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$. □

④ Теор. (о производной обратной ф-и). Пусть $f(x)$ осуществляет взаимно-однозначное отобр-е $U(x_0)$ в $V(y_0)$, причем $y_0=f(x_0)$, ~~причем~~ а обратная ф-я $f^{-1}(y)$ непр. в т. y_0. Тогда, если $\exists f'(x_0)\neq 0$, то $\exists (f^{-1})'(y_0)$, причем

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$ □

§5. Таблица производных основных элементарных функций.

① $(e^x)' = e^x$

Д-во: $(e^x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = e^x$. ■

② $(a^x)' = a^x \ln a$

Д-во: $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}\cdot \ln a = a^x \ln a$. ■

③ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Д-во: $(\ln x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x}$. ■

④ $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

Д-во: $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$. ■

⑤ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Д-во: $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha\ln x}\cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$ ■

⑥ $(\sin x)' = \cos x$

Д-во: $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{1} = \cos x. \blacksquare$$

⑦ $(\cos x)' = -\sin x$

__Д-во:__ $(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x. \blacksquare$

⑧ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

__Д-во:__ $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \blacksquare$

⑨ $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

__Д-во:__ $(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \blacksquare$

⑩ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

__Д-во:__ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y\big|_{y=\arcsin x}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \blacksquare$$

⑪ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

__Д-во:__ $(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin y\big|_{y=\arccos x}} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \blacksquare$$

⑫ $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

__Д-во:__ $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}\big|_{y=\operatorname{arctg} x}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} =$

$$= \frac{1}{1+x^2} \blacksquare$$

⑬ $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

__Д-во:__ $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}\big|_{y=\operatorname{arcctg} x}} = -\frac{1}{1+x^2} \blacksquare$

Упражнения

Вычислить производную ф-и в произв. точке

1. $y = 3 - 2x + \frac{2}{3}x^4$
2. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
3. $y = (3\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[3]{x})$
4. $y = x^3 \operatorname{ctg} x$
5. $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$
6. $y = \frac{x^2+1}{x^3-x}$
7. $y = x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^5+a}$
8. $y = 6\cos\frac{2x}{3}$
9. $y = (1+4x^2)^3$
10. $y = \sin^2\frac{x}{2}$
11. $y = x \arcsin(\ln x)$
12. $y = e^{\frac{x}{3}}\cos^2\frac{x}{3}$
13. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$
14. $y = \cos^2\left(\sin\frac{x}{3}\right)$

Введя новые переменные, вычислить

15. $y = \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right)$
16. $y = \frac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}$

КР8. Производная функции в точке.

1. Используя только определение производной, вычислить производную ф-и в произвольной точке.

$f(x) = \ln 2x \qquad f(x) = e^{3x} \qquad f(x) = 2x^2$

2. Вычислить производную ф-и в точке.

$f(x) = 2e^x + 8\cos x \qquad f(x) = 3\ln x - 7\operatorname{tg} x \qquad f(x) = 5\sqrt{x} - 3\sin x$

$f(x) = 19x^2 e^x \qquad f(x) = 6x^6 \ln x \qquad f(x) = 7x^9 \sin x$

$f(x) = \frac{x^9}{x^2+1} \qquad f(x) = \frac{6x^3}{2x^2+7} \qquad f(x) = \frac{x^5}{3x^2-2}$