# Лекция 9. Производная и дифференциал

## §1. Диф-е функций, заданных неявно

Опр. Говорят, что ф-я $y=f(x)$ задана неявно, если $\forall x\in(a;b)$ $F(x,f(x))=0$ для нек $F(x,y)$.

Для диф-я неявно заданной функции надо рав-во $F(x,y)=0$ продиф-ть по $x$, считая $y=y(x)$, и разрешить полученное ур-е отн-но $y'$!

### Упражнения

① $x^2+y^2=1$ ; ② $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

③ $e^x\sin y-e^y\cos x=0$ ④ $2^x+2^y=2^{x+y}$

⑤ $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow y'=\frac{x+y}{x-y}$

## §2. Дифференцирование функций, заданных пар-ки.

Пусть на $t\in(\alpha;\beta)$ заданы ф-и $\varphi(t)$ и $\psi(t)$:

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$$

Если ф-я $\varphi(t)$ имеет обратную на $(\alpha;\beta)$, то $y(x)=\psi(\varphi^{-1}(x))$ наз. функцией, заданной пар-ки. Производная такой функции:

$$\boxed{y'_x=y'_t/x'_t}$$

### Упражнения

① $\begin{cases}x=2t\\ y=3t^2-5t,\end{cases}$ $t\in(-\infty;+\infty)$ ② $\begin{cases}x=2^{-t}\\ y=2^{2t},\end{cases}$ $t\in(-\infty;+\infty)$

③ $\begin{cases}x=\operatorname{tg}t\\ y=\sin 2t+2\cos 2t,\end{cases}$ $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ④ $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\operatorname{arctg}t,\end{cases}$ $t\in(0;+\infty)$.

## §3. Логарифмическая производная

Опр. Логарифмической произв-ой ф-и $y=f(x)$ наз. производная от логарифма этой ф-и:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = y\cdot(\ln y)'$$

Логарифм. производная бывает полезна в двух основных случаях:

1) для диф-я ф-ий, заданных в виде произведения / частного большого кол-ва элем. функций:

$$y = \frac{f_1(x)\, f_2(x)}{g_1(x)\, g_2(x)}$$

Логарифмируем:

$$\ln y = \ln f_1(x) + \ln f_2(x) - \ln g_1(x) - \ln g_2(x)$$

Находим производную от $\ln y$:

$$(\ln y)' = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} - \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} - \frac{g_2'(x)}{g_2(x)}$$

Производная будет равна:

$$y' = \frac{f_1(x)\, f_2(x)}{g_1(x)\, g_2(x)}\left(\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} - \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} - \frac{g_2'(x)}{g_2(x)}\right)$$

2) Для нахождения производных показательно-степенных функций вида: $\underline{y = \varphi(x)^{\psi(x)}}$,

Логарифмируем:

$$\ln y = \psi(x)\cdot \ln \varphi(x)$$

Берем производную:

$$(\ln y)' = \psi'(x)\ln\varphi(x) + \psi(x)\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Искомая производная будет равна:

$$y' = \varphi(x)^{\psi(x)}\left(\psi'(x)\ln\varphi(x) + \psi(x)\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)$$

### Упражнения

Используя предварительное логарифмир-е, найти производные:

1) $y = \dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$

2) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$

③ $y=(x+\operatorname{tg}x)^{\arccos x}+\sqrt[3]{x}$ ; ④ $y=(\arccos x)^{\frac{x}{\sin x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

## §4. Геометрический смысл производной

Уравнение касательной:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Уравнение нормали:

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \text{ или } x-x_0=-f'(x_0)(y-f(x_0))$$

### Упражнения

① $y=x^2-3x+3,\quad x_0=1$ ② $y=\operatorname{tg}5x,\quad x_0=0.$

③ $y=x+\sqrt{x},\quad x_0=\frac{1}{4}$ ④ $y=x\ln x,\quad x_0=1.$

⑤ $x^5+y^5-2xy=0,\quad M_0(1;1)$

⑥ $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases},\ t\in(-\infty;+\infty)$ в $(0;0)$ и в т. $t_0=\frac{\pi}{4}$

Углом между ~~пр.~~ кривыми наз. угол м/у касательными к этим кривым в точке их пересечения. Тангенс этого угла:

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}$$

⑦ Под каким углом пересекаются кривые $y=\sin x$ и $y=\cos x$? $(\operatorname{arctg}2\sqrt{2})$

⑧ Под каким углом пересекаются кривые $y=(x-2)^2$ и $y=4x-x^2+4$? $(\operatorname{arctg}8/15)$

## §5. Дифференциал

Опр. Дифференциалом наз. линейная часть приращения ф-ии.

Если ф-я диф-ма в т. $x_0$, то её приращение представимо в виде:

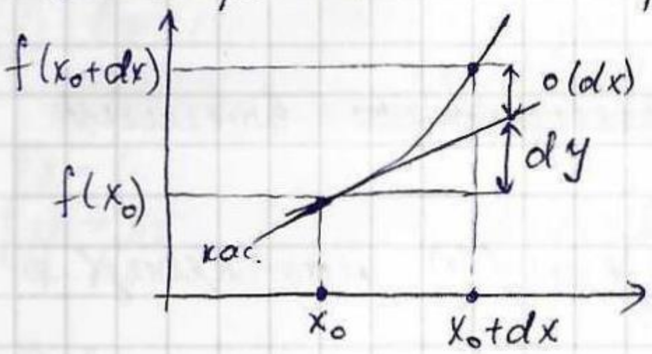
$$\Delta y = \underline{f'(x_0)\Delta x} + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

$dy$ - диф-л ф-и $y=f(x)$

Таким образом, $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. По определению полагают $dx \triangleq dx \Rightarrow \boxed{df(x_0) = f'(x_0)d(x)}$,

откуда $f'(x_0) = {df(x_0)}/{dx}$, что используют иногда для обозначения производной.

Геометрическая интерпретация:




$df(x_0)$ - приращение ординаты касательной, соответствующее приращению арг-та $dx$.

Из формулы $dy = y'dx$ следуют правила вычисления дифференциалов:

1) $d(f(x) \pm g(x)) = f'(x)\,dx \pm g'(x)dx = df(x) \pm dg(x)$
2) $d(f(x)\cdot g(x)) = f(x)dg(x) + g(x)\,df(x)$
3) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{df(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot dg(x)}{g^2(x)}$

## Упражнения

① Найти приращение и диф-л ф-и $y=x^3$, соответствующий $x_0=2$ и двум различным приращениям: $(\Delta x)_1 = 0{,}1$; $(\Delta x)_2 = 0{,}01$.

$(\Delta y)_1 = 1{,}261$; $(dy)_1 = 1{,}2$

$(\Delta y)_2 = 0{,}120601$; $(dy)_2 = 0{,}12$.

② Найти диф-л неявно заданной ф-и:

$$y^5 + y - x^2 = 1 \qquad \left(dy = \frac{2x}{5y^4+1}dx\right)$$

## §6. Приближённое вычисление значений ф-и с помощью диф-ла

Из определения диф-ла следует, что при

малых $\Delta x$:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x \Rightarrow \boxed{f(x) \approx f(x_0) + df(x)}$$

## Упражнения

Вычислить приближенно:

① $\sqrt[3]{8,1} \approx 2,008$ $(2,008299\ldots)$ ② $\arcsin 0,05 \approx 0,05\,(0,050021)$

③ $\ln 1,2 \approx 1,2$ $(0,18232\ldots)$ ④ $e^{1,2^2-1} \approx 1,4\,(1,5527\ldots)$

## §7. Производные и дифференциалы высших порядков.

<u>Опр.</u> $n$-ой производной ф-и $f(x)$ наз. произв-е от $(n-1)$-ой производной.

<u>Пример</u> $y'' = 6x$ для $y(x) = x^3$

Пусть дано рав-во $df(x) = f'(x)dx$.
Зафиксируем в нем диф-л независимой переменной $dx$, получим ф-ю от $x$. Для этой ф-и можно вычислить диф-л в т. $x$. Если при этом считать диф-л независимой переменной равному его прежнему зн-ю $dx$, то получим диф-л второго порядка исходной функции:

$$d^2 f(x) = d(f'(x)dx) = (f'(x)\,dx)'\,dx = f''(x)dx^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}}$$ справа часто исп-ют для обозн-е произв.)

Аналогично определяется диф-л $n$-го пор:

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$$

Диф-л $n$-го пор. вычисляется по формуле:

$$d^n f(x) = f^{(n)}\,dx^n$$

## Упражнения

Вычислить диф-лы 2-го пор. для ук. функций:

(1) $y = a\sin(bx+c)$     (2) $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

## КР9. Производная и дифференциал

(1) Вычислить производную $y'_x$ для функции, заданной неявно

$x^3+y^3=a$     $3x^2y=1$     $x^2y^2=1$

(2) Вычислить производную $y'_x$ для функции, заданной параметрически

$\begin{cases} x=\ln t \\ y=3t^2-5t \\ t\in(0;+\infty) \end{cases}$     $\begin{cases} x=t^2 \\ y=6t+5t^2 \\ t\in(\infty;+\infty) \end{cases}$     $\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=3te^{t} \\ t\in(-\infty;+\infty) \end{cases}$

(3) Используя предварительное логарифмир-е, найти производную:

$y=(x+x^3)^x$     $y=(\ln x)^{3x}$     $y=(\sin x)^{\cos x}$

(4) Вычислить приближённо с помощью диф-ла:

$\sin 0{,}04$     $e^{0{,}05}$     $\sqrt{1{,}01}$

Сравнить со значениями, полученными на калькуляторе.

(5) Вычислить первый и второй диф-л функции

$y=3x^3$     $y=e^x\cos x$     $y(x)=\dfrac{x}{\sin x}$