Лекция 19. Основные теоремы диф. исчисления. Правило Лопиталя.

Опр. Гов

§1. Основные теоремы диф. исчисления

Опр. Говорят, что ф-я $f(x)$, определённая на некотором пром-ке J, принимает в т. $x_0 \in J$ наибольшее значение, если $\forall x \in J$ $f(x_0) \geq f(x)$.
Аналогично определяется точка, в кот. $f(x)$ принимает наименьшее значение.

Теор. (Ферма). Пусть ф-я $f(x)$ определена на промежутке J и в некоторой внутренней точке промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом промежутке. Тогда, если существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю.

Д-во: Для определённости будем считать, что в т. x_0 ф-я $f(x)$ принимает наибольшее значение. Тогда

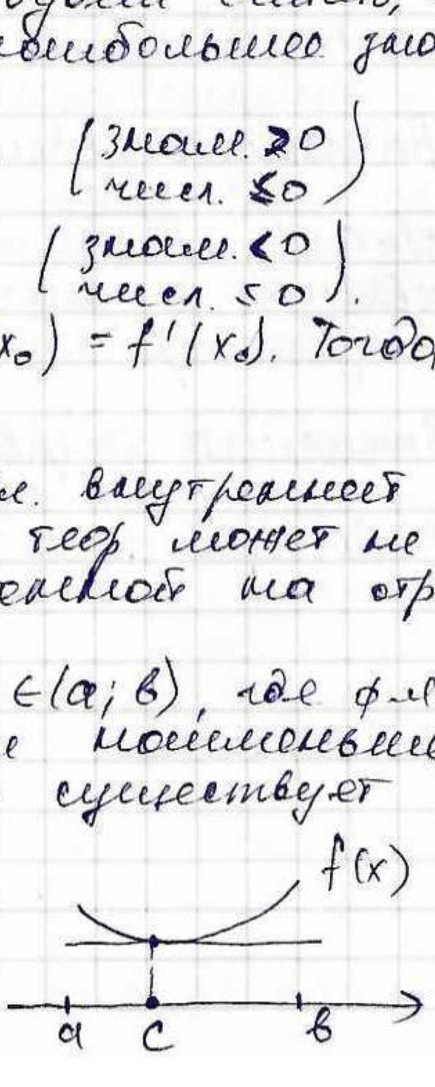
$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{знам.} \geq 0 \\ \text{числ.} \leq 0\end{matrix}\right)$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{знам.} < 0 \\ \text{числ.} \leq 0\end{matrix}\right).$$

Если $\exists f'(x_0)$, то $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$. Тогда $f'_\pm(x_0) = 0$. ■

Замечание. Если т. x_0 не явл. внутренней точкой промежутка, то утв-е теор. может не вып., например, для строго монотонной на отр. функции.

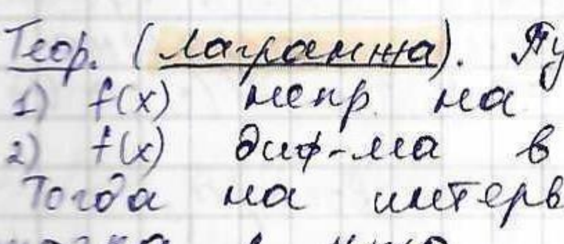
Геометр. интерпретация. В т. $c \in (a;b)$, где ф-я $f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего на $(a;b)$, $f'(c)=0$, если $f'(c)$ существует и конечна. Значит, касательная к графику $f(x)$ в точке $(c; f(c))$ горизонтальна.



Теор (Ролля). Пусть
1) $f(x)$ непр. на $[a; b]$;
2) $f(x)$ диф-ма в $(a; b)$;
3) $f(a) = f(b)$.
Тогда на интервале $(a; b)$ найдется точка c : $f'(c) = 0$.

Д-во: поскольку $f(x)$ непр. на $[a; b]$, то по теор. Вейерштрасса эта ф-я достигает на отрезке $[a; b]$ своих наибольших и наименьших значений. Пусть m – наим., M – наиб., достигаются они в точках c_1 и c_2 соот-но. Тогда $m \le f(x) \le M$.
Если $m = M$, то $f(x) \equiv m$, т.е. $f(x) = const$. Значит, $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a; b)$.
Если $m < M$, то точки c_1 и c_2 различны. В силу условия $f(a) = f(b)$ хотя бы одна из точек c_1 или c_2 явл. внутренней $\Rightarrow$ в этой точке по теор. Ферма $f'(c) = 0$. ■

Геометрическая интерпретация: геом. смысл теор. Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на $[a; b]$ найдется такая точка c, касательная в кот. к графику функции горизонтальна.



Теор. (Лагранжа). Пусть
1) $f(x)$ непр. на отрезке $[a; b]$;
2) $f(x)$ диф-ма в отрезке $(a; b)$.
Тогда на интервале $(a; b)$ найдется такая точка c, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Д-во: Рассмотрим вспомогательную ф-ю:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Эта ф-я непр. на $[a; b]$ и диф-ма в $(a; b)$.
Далее,

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) = f(a).$$

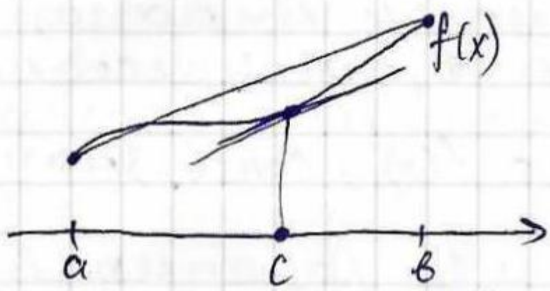
$\Rightarrow F(a) = F(b)$.

Значит, для функции $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля $\Rightarrow \exists\, c \in (a;b) : F'(c) = 0$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f(b)-f(a) = f'(c)(b-a). \blacksquare$$

<u>Геометрическая</u> <u>интерпретация</u>.



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ – угловой коэф-т хорды, соединяющей точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$.

$f'(c)$ – угловой коэф-т касательной в т. c.

Значит, согласно условиям теор, на отрезке $[a;b]$ найдется точка, касат-я в кот. параллельна хорде, соединяющей точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$.

<u>Замечание</u>. Обозначим $\theta = \frac{c-a}{b-a}$, $0<\theta<1$.
Тогда $c = a + \theta(b-a)$ и формула из теор Лагранжа принимает вид

$$f(b) - f(a) = f'(a+\theta(b-a))\cdot(b-a), \text{ где } 0<\theta<1.$$

<u>Следствие</u>. Пусть ф-я $f(x)$ непр. на отрезке $[a;b]$ и дифф-ма в интервале $(a;b)$, причем во всех точках этого интервала $f'(c) = 0$. Тогда ф-я $f(x)$ постоянна на $[a;b]$.

<u>Д-во</u>: В самом деле, пусть $a < x \le b$. Применим к отрезку $[a;x]$ теорему Лагранжа:

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a) = 0, \text{ т.к. } f'(c) = 0\ \forall c.$$

$\Rightarrow f(x) = f(a)$.

В силу ~~пост~~ произвольности выбора т. x $f(x) = const$. $\blacksquare$

<u>Теор</u> (<u>Коши</u>). Пусть
1) $f(x)$, $g(x)$ непр. на $[a;b]$,
2) $f(x)$, $g(x)$ дифф-мы в $(a;b)$
3) $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$.

Тогда $\exists c \in (a;b)$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Д-во: Сначала заметим, что $g(b) \neq g(a)$.
В самом деле, если бы это рав-во было выполнено, то для ф-и $g(x)$ были бы выполнены все условия теор. Ролля $\Rightarrow$ нашлась бы точка $c \in (a;b)$, в кот. $g'(c)=0$, а это не так по усл. №3 теор.

Рассмотрим вспомогат. ф-ю:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right).$$

Эта ф-я непр. на отрезке $[a;b]$ и диф-ма в интервале $(a;b)$. Кроме того,

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(a)-g(a)\right) = f(a).$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(b)-g(a)\right) = f(a).$$

Значит, $F(a) = F(b)$.

Таким образом, легко видеть, что для ф-и $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля. $\Rightarrow \exists c \in (a;b)$, в кот. $F'(c)=0$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \blacksquare$$

Замечание. При $g(x)=x$ теор. Коши превращается в теорему Лагранжа.

§2. Правило Лопиталя

Теор. 1 (Бернулли-Лопиталя). Пусть:

1) $f(x)$, $g(x)$ диф-мы на $(a;b)$.
2) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$.
3) $g'(x) \neq 0$, на $(a;b)$
4) $\exists \lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. (конечный или бесконечный)

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Д-во: Доопределим, если нужно,
$f(a)=g(a)=0$.
Тогда $\forall x\in(a;b)$ ф-ии $f(x), g(x)$ удовл. условиям теоремы Коши на $[a;x]$ $\Rightarrow \exists c\in(a;x)$:
$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$ Поэтому
$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(c)}{g'(c)}=$$
$$=\lim_{x\to a+}\frac{f'(a+\theta(x-a))}{g'(a+\theta(x-a))}=\left\{\begin{matrix}\text{замена}\\ y=a+\theta(x-a),\ 0<\theta<1\\ x\to a+\ \Rightarrow y\to a+\end{matrix}\right\}=$$
$$=\lim_{y\to a+}\frac{f'(y)}{g'(y)}=A.\ \blacksquare$$

Замечание 1. Теор. 1 остается в силе и при $x\to a-$ (д-во аналогично) и, след-но, при $x\to a$. Таким образом,
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теор. 2 (правило Бернулли-Лопиталя). Пусть
1) $f(x), g(x)$ диф-мы на $(c;+\infty)$, $c>0$.
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.
3) $g'(x)\neq0$ при $x>c$
4) $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (конечный или бесконечный)

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$. $\square$

(Д-во с помощью замены $x=\frac{1}{y}$ и применения теор. 1)

Замечание 2. Теор. 2 верна и при $x\to-\infty$, а значит, и при $x\to\infty$.

Аналогичные теоремы имеют место и для отношения двух бесконечно больших.

Теор. 3. (правило Бернулли-Лопиталя раскрытия $\frac{\infty}{\infty}$).
Пусть
1) $f(x), g(x)$ диф-мы на $(a;b)$;

2) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$.

3) $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$

4) $\exists \lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (конечный или бесконечный)

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. $\square$

Замечание 3 Теор 3 остается в силе и при $x\to a-$, $x\to a$.

Теор 4. (правило Бернулли-Лопиталя раскрытия $\frac{\infty}{\infty}$).
Пусть:

1) $f(x)$, $g(x)$ диф-мы на $(a;+\infty)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$

3) $g'(x) \neq 0$ на $(a;+\infty)$.

4) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (конечный или бескон.)

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. $\square$

Замечание 4 Теор 4 остается справедливой и при $x\to-\infty$, $x\to\infty$.

Упражнения

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln\cos2x}{\sin2x}$

2) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3} = \frac{1}{3}$.

3) $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x-b^x}{c^x-d^x} = \left\{\begin{matrix}\text{при}\\ a\neq b,\\ c\neq d\end{matrix}\right\} = \frac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}$

4) $\lim\limits_{x\to\pi} (\pi-x)\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2$

5) $\lim\limits_{x\to1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right) = -1$.

6) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg}x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) = -1$

7) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2x\right) = \frac{2}{3}$

8) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg}x} - \frac{1}{x}\right) = 0$.

9) $\lim\limits_{x\to0} \left(\operatorname{ctg}x - \frac{1}{x}\right) = 0$.

§3. Сравнение бесконечно больших функций на бесконечности.

Основные бесконечно большие ф-и на ∞: показательная, степенная, логарифмическая.

① Сравним степенную и показательную функции.

При $a>1$, $s>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^s}{a^x} = 0$.

Д-во: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^s}{a^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{a^{x/s}}\right)^s = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{a^{x/s}}\right)^s \overset{Л-П}{=}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{a^{x/s}\cdot \ln a \cdot \frac{1}{s}}\right) = 0^s = 0.$ ■

Вывод: на ∞ показательная ф-я растет быстрее степенной.

② Сравним логарифмическую и степенную функции.

При $a>1$, $s>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^s} = 0$.

Д-во: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^s} \overset{Л-П}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{s x^{s-1}\cdot x \ln a} = 0.$ ■

Вывод: на ∞ степенная ф-я растет быстрее логарифмической.

Замечание. Этот вывод не изменится, если логарифм возводить в некоторую степень.

КР10 "Правило Лопиталя"

Вычислить предел

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - 1}{x^2}$

① $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$ $\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3}$ $(-1/6)$