Лекция 11. Формула Тейлора

§1. Применение предварительного логарифмирования для вычисления пределов

Неопределённости вида 0^0, 1^∞ или ∞^0 можно раскрывать с помощью предвар. логарифмирования. Пусть требуется вычислить

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$$

логарифмируем:

$$\ln \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln f(x) = [\infty\cdot 0] = A.$$

Если удаётся раскрыть полученную неопр-ть с помощью правила Лопиталя, то:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^A.$$

Упражнения

1) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x} = 1$ 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} (\pi-2x)^{\cos x} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+2^x)^{\frac{1}{x}} = 2$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = 1$

5) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^2$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$

§2. Формула Тейлора с ост. членом в форме Лагранжа и Пеано.

Теор (формула Тейлора). Формулой Тейлора наз. равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \ldots + r_n(x),$$

где $r_n(x)$ – остаточный член ф. Тейлора □

• $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $\theta\in(0,1)$ – в ф. Лагранжа

• $r_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ – в ф. Пеано

Опр Если $x_0=0$, то формула Тейлора наз. формулой Маклорена.

§3. Вывод формулы Маклорена для основных элем. функций

① $f(x)=e^x$ $\quad f(0)=1$

$f'(x)=e^x$ $\quad f'(0)=1$

$f''(x)=e^x$ $\quad f''(0)=1$

$f^{(n)}(x)=e^x$ $\quad f^{(n)}(0)=1$

$$\Rightarrow e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+r_n(x),$$

$r_n(x)=o(x^n)$ – в ф. Пеано $(x\to 0)$

$r_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ – в ф. Лагранжа

② $f(x)=\sin x$ $\quad f(0)=0$

$f'(x)=\cos x$ $\quad f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x$ $\quad f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x$ $\quad f'''(0)=-1$

$f^{IV}(x)=\sin x$ $\quad f^{IV}(0)=0$

$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & \text{если } n \text{ чётное } (n=2m),\ m=0,1,2,\ldots\\ (-1)^m, & \text{если } n=2m+1,\ m=0,1,\ldots\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots+r_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+r_n(x)$$

$r_n(x)=r_{2k+2}(x)=o(x^{2k+2})$ – в ф. Пеано

$r_n(x)=\frac{\sin\left(\theta x+\frac{(2k+3)\pi}{2}\right)}{(2k+3)!}x^{2k+3}$ – в ф. Лагранжа

③ $f(x) = \cos x$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x$ $\quad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos x$ $\quad f^{IV}(0) = 1$

$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, \text{ если } n = 2m+1, \ m = 0, 1, 2, \dots \\ (-1)^m, \text{ если } n = 2m, \ m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + r_n(x)$$

$r_n(x) = r_{2k+1}(x) = o(x^{2k+1})$ – в ф. Пеано

$r_n(x) = r_{2k+1}(x) = \dfrac{\cos\left(\theta x + \frac{(2k+2)\pi}{2}\right)}{(2k+2)!} x^{2k+2}$ – в ф. Лагр.

④ $f(x) = \ln(1+x)$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ $\quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2}$ $\quad f'''(0) = 2$

$f^{IV}(x) = \dfrac{-2 \cdot 3}{(1+x)^2}$ $\quad f^{IV}(0) = -6$

$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k + r_n(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x^k + r_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + r_n(x)$$

$r_n(x) = o(x^n)$, $x \to 0$ – в ф. Пеано

$r_n(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)!} x^{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)} x^{n+1}$

$\theta \in (0,1)$ – ф. Лагр.

(5) $f(x) = (1+x)^\alpha \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$\dots$

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x)$$

$r_n(x) = o(x^n)$ – в ф. Пеано

$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}x^{n+1}$, $\Theta \in (0;1)$ – – в ф. Лагранжа

(5A) Частный случай 1

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)x^k + o(x^n)$$

(5B) Частный случай 2

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$ (формула бесконечно убывающей геометрич. прогрессии)

Упражнения

(1) Многочлен $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ разложить по степеням двучлена $x+1$

$f(x) = -9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3$

(2) (К задаче 6). Пользуясь стандартными разложениями, написать формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано

(2a) $\cos 2x$ (2b) $x\ln(1+x)$ (2c) $\frac{x}{3-x}$

(d) $3^{x^2}\ \left(= e^{x^2 \ln 3}\right)$ (e) $x\cos^2 x$ (f) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

(g) $\sqrt[3]{8+x^2} = 2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{3}-i\right)}{8^k\, k!} x^{2k} + o(x^{2n})$

§7. Использование формулы Тейлора в приближённых вычислениях

Пусть $f(x)$ — $(n+1)$ раз диф-мая ф-я в окр-ти $u(x_0)$ т. x_0. Тогда

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Погрешность приближения:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Обозначим $|r_n(x)| = \sup\limits_{\substack{[x_0;x]\\ [x;x_0]}} |f^{(n+1)}(x)|$.

Тогда $|r_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$

Пример. Вычислить e с погрешностью 0,01

$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, погрешность

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$x=1 \Rightarrow e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Оценка погрешности:

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

Найдем n из условия $|r_n(x)| \leq 0{,}01$.

$|r_n(x)| = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq 0{,}01 \Leftrightarrow (n+1)! \geq 300$

$n+1 \geq 6 \Rightarrow n \geq 5$. Таким образом,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}.$$

§5. Применение формулы Тейлора к вычислению пределов

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Нужно вычислить $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Запишем формулу Тейлора для $f(x)$ и $g(x)$, оставляя в многочлене лишь первые отличные от нуля члены:

$$f(x) = a_n (x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$g(x) = b_m (x-x_0)^m + o\left((x-x_0)^m\right), \quad x\to x_0$$

Согласно свойству эквив. б.м.

$$f(x) \sim a_n (x-x_0)^n, \quad g(x) \sim b_m (x-x_0)^m$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{a_n (x-x_0)^n}{b_m (x-x_0)^m} = \begin{cases} 0, & \text{если } n>m \\ \infty, & \text{если } n<m \\ a_n/b_m, & \text{если } n=m \end{cases}$$

Упражнения

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin x - x} = -1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \dfrac{1}{2}$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \ldots$

$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \ldots$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \dfrac{2}{3}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^3}\right) = -\dfrac{1}{6}$

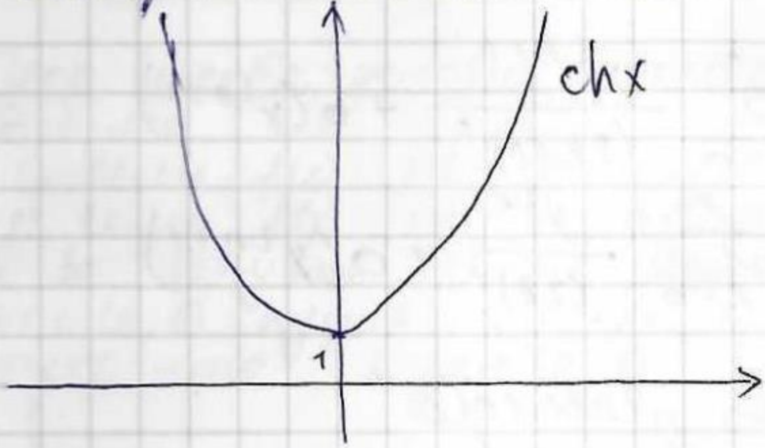
§6. Гиперболические функции

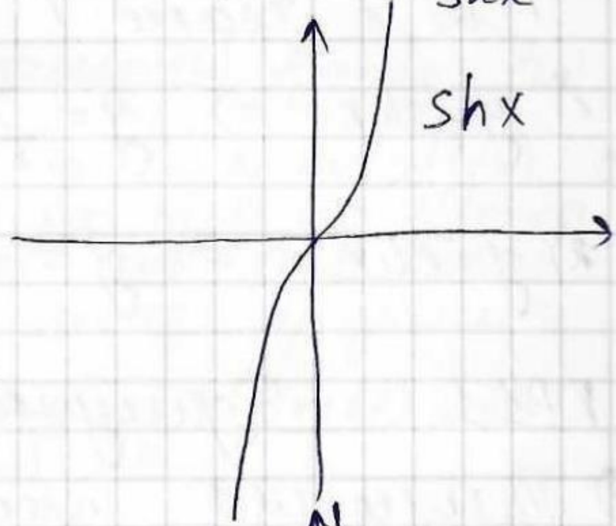
Гиперболический косинус $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

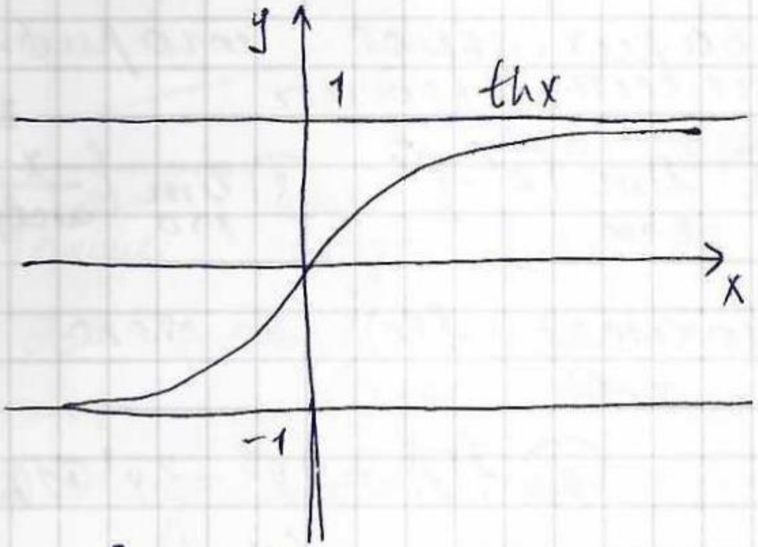
Гиперболический синус $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

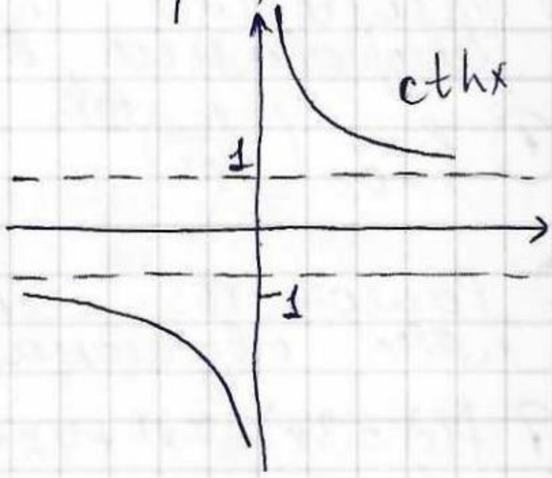
Гиперболический тангенс $thx = \frac{shx}{chx}$

Гиперболический котангенс $cthx = \frac{chx}{shx}$









Свойства гиперболических функций:

$sh(x \pm y) = shx\,chy \pm chx\,shy$

$ch(x \pm y) = chx\,chy \pm shx\,shy$

При $x = y$ $\quad ch(x-y) = \boxed{ch^2x - sh^2x = 1}$

Параметрические уравнения гиперболы:

$$\begin{cases} x = \pm a\,cht \\ y = \pm b\,sht \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

'+' - пр. ветвь; '-' - левая ветвь

Производные гиперболических функций:

1) $(chx)' = shx$; 2) $(shx)' = chx$

3) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 4) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Формула Маклорена с ост. членом в ф. Пеано:

1) $y = \operatorname{sh} x \Rightarrow y = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$

2) $y = \operatorname{ch} x \Rightarrow y = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$

КР11. "Формула Тейлора"

① Применяя предварительное логарифмирование, вычислить пределы

① $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\operatorname{tg} x}$, ② $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x - 1)^{\frac{1}{x}}$ ③ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{arctg} x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

② Разложить многочлен $f(x)$ по степеням двучлена $x - x_0$.

① $f(x) = 3x^3 + 7x^2 + 4x + 3$ $(x+1)$ ② $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x$ $(x-1)$

③ $f(x) = x^3 + 8x^2 + 20x + 1$ $(x+2)$

③ Пользуясь стандартными разложениями, записать формулу Маклорена с остаточным членом в ф. Пеано.

$\frac{8}{1+x^3}$ $x2^x$ $\ln(4+x^2)$

④ Вычислить предел

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - 1}{x^2}$ ① $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ $-1/3$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$ ①