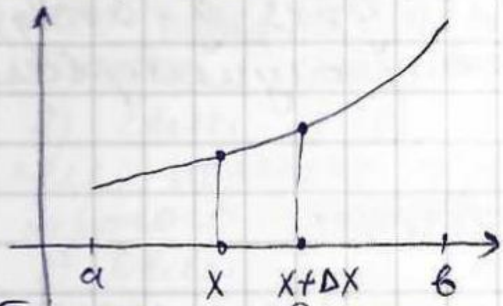
Лекция 12. Исследование функций с помощью производных

§1. Условие монотонности

Теор (необх. условие монотонности). Пусть $f(x)$ диф-ма на $(a;b)$.
1) Если $f(x)$ не убывает на $(a;b)$, то $f'(x) \geq 0$
2) Если $f(x)$ не возрастает на $(a;b)$, то $f'(x) \leq 0$

Д-во: 1) Пусть $f(x)$ не убывает на $(a;b)$. Выберем $\forall x \in (a;b)$. Пусть Δx - приращение аргумента, такое, что $x+\Delta x \in (a;b)$.



Если $\Delta x > 0$, то $f(x+\Delta x) \geq f(x)$ и $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

Если $\Delta x < 0$, то $f(x+\Delta x) \leq f(x)$ и $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$

Таким образом, $\forall \Delta x \neq 0$ $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$

По свойству пределов

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0 \iff f'(x) \geq 0.$$

2) Доказывается аналогично. ■

Замечание. Если $f(x)$ возрастает на $(a;b)$, то $f'(x) \geq 0$ и необязательно $f'(x) > 0$. Аналогично для убывающих функций.

Теор (достаточное условие монотонности). Пусть $f(x)$ диф-ма во всех точках $(a;b)$, за исключением, быть может, некоторого конечного числа точек. 1) Если производная $f'(x)$ неотрицательна всюду, где она опр., и не равна нулю ни на одном из интервалов $I_1 \subset (a;b)$, то $f(x)$ возр. на $(a;b)$.
2) Если $f'(x)$ неположит-на всюду где она опр. и не равна нулю ни на одном из интервалов $I_1 \subset (a;b)$, то $f(x)$ убыв. на $(a;b)$.

Д-во: Пусть $f(x)$ диф-ма на $(x_1;x_2)$. Применим к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа,

получим
$$f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\geq 0 \Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1),$$
т.е. ф-я не убывает. Докажем, что она возр. От противного.
Пусть для некоторых точек x_1, x_2, $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)=f(x_2)$. Тогда $\forall x\in(x_1;x_2)$ имеем $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2) \Rightarrow$ ф-я $f(x)$ постоянна на этом отрезке. Противоречие.
2) Доказывается аналогично. ∎
<u>Пример</u>. Всюду возр. ф-и $y=e^x$, $y=x^3$, $y=\operatorname{arctg} x$, ф-и $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ возрастают на полуинтервале $[0;+\infty)$.

§2. <u>Условие</u> <u>экстремума</u> <u>функции</u>.

<u>Опр</u>. Говорят, что ф-я $f(x)$ имеет локальный <u>максимум</u> (<u>минимум</u>) в т. x_0, если $\exists$ окрестность $U(x_0)$ этой точки, что $\forall x\in U(x_0)$ вып. $f(x)\leq f(x_0)$ ($f(x)\geq f(x_0)$).

<u>Опр</u>. Говорят, что ф-я $f(x)$ имеет <u>строгий</u> <u>локальный</u> <u>максимум</u> (<u>строгий</u> <u>локальный</u> <u>минимум</u>) в т. x_0, если $\exists$ окр-ть $U(x_0)$ этой точки, т.ч. $\forall x\in U(x_0)$ вып. $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$).
<u>Опр</u>. Точкой строгого локального экстремума наз. точку строгого лок. максимума или точку строгого лок. минимума.

<u>Теор</u> (<u>необходимое</u> <u>условие</u> <u>наличия</u> <u>экстремума</u>). Если в т. x_0 ф-я $f(x)$ достигает своего строгого лок. max (min), то $f'(x)=0$, если $f(x)$ диф-ма в т. x_0.
<u>Д-во</u>: основывается на теор. Ферма. ∎

<u>Замечание</u>. Это условие не явл. достаточным. например, $f'(0)=0$ для $f(x)=x^3$, но экстремума в этой точке нет.

<u>Опр</u> Точки, в кот. $f'(x)=0$, наз. <u>стационарными</u>

точками ф-и $f(x)$.

__Опр__ Точки, в кот. $f'(x)=0$, $=\infty$ или $\nexists$, наз. критическими точками ф-и $f(x)$.
Экстремумы надо искать в этих точках.

__Теор__ (__1-я теорема__ __о дост. условии наличия экстремума__) пусть ф-я $f(x)$ непр. в окрестности $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, $\delta>0$, точки x_0 и дифф-ма в проколотой окрестности $(x_0-\delta; x_0)\cup(x_0; x_0+\delta)$ этой точки.
1) Если $f'(x)$ меняет знак с "−" на "+" при переходе через т. x_0, то т. x_0 явл. точкой строгого локального минимума $f(x)$
2) Если $f'(x)$ меняет знак с "+" на "−" при переходе через т. x_0, то т. x_0 явл. точкой строгого локального максимума $f(x)$
3) Если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через т. x_0, то экстремума в этой точке нет.

__Д-во__: 1) $f'(x)<0$ при всех $x\in(x_0-\delta; x_0)$, тогда на полуинтервале $(x_0-\delta; x_0]$ ф-я $f(x)$ убыв. $f'(x)>0$ при всех $x\in(x_0; x_0+\delta)$, тогда на полуинтервале $[x_0; x_0+\delta)$ ф-я $f(x)$ возр.
Тогда $f(x)>f(x_0)$ при $x\in(x_0-\delta; x_0]$,
$f(x)>f(x_0)$ при $x\in[x_0; x_0+\delta)$
$\Rightarrow$ т. x_0 — точка строгого лок. минимума.
2) Доказывается аналогично.
3) $f'(x)$ не меняет знак при переходе через т. x_0. Если $f'(x)>0$ при $x\in(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0; x_0+\delta)$, то $f(x)$ возр. в этом отрезке. Аналогично, если $f'(x)<0$ при $x\in(x_0-\delta; x_0)\cup(x_0; x_0+\delta)$, то $f(x)$ убыв. на отр-ке. В любом случае, экстремума в т. x_0 нет. ■

__Теор__ (__2-я теорема__ __о дост. условии наличия экстремума__) пусть в т. x_0 у ф-и $f(x)$ $\exists$ все производные ф-и $f(x)$ до n-го пор. включительно, причем $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, а $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.
1) Если n чётно, а $f^{(n)}(x_0)>0$, то в т. x_0 ф-я

ф-я $f(x)$ имеет строгий локальный min

2) Если n чётно и $f^{(n)}(x_0)<0$, то в т. x_0 ф-я $f(x)$ имеет строгий лок. максимум

3) Если n нечётно, то экстр в т. x_0 нет.

<u>Д-во:</u> Запишем для ф-и $f(x)$ в окр-ти т. x_0 ф-лу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. В силу условия $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ имеем след. равенство

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right),\quad x\to x_0$$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_0)=\frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)\right)\cdot(x-x_0)^n,\qquad (*)$$

где $\alpha(x)=n!\cdot\frac{o\left((x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n}\to 0$ при $x\to x_0$.

1) Пусть n чётно и $f^{(n)}(x_0)>0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\left(f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)\right)=f^{(n)}(x_0)>0$$

по теор. о сохранении функцией знака своего предела $\exists$-ет проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0, такая что $f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)>0$ для всех $x\in\mathring{U}(x_0)$.

Т.к. n чётно, то $(x-x_0)^n>0$ для этих x. Поэтому из $(*)$ следует, что $f(x)-f(x_0)>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)>f(x_0)$ $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$, т.е. в т. x_0 ф-я $f(x)$ имеет строгий локальный максимум.

2) Доказывается аналогично

3) Пусть n нечётно, пусть для опр-ти $f^{(n)}(x_0)>0$. Тогда, как и выше, найдётся проколотая окр-ть $\mathring{U}(x_0)$ т. x_0 такая, что $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$ вып. неравенство

$$f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)>0.$$

Поскольку n нечётно, то при $x<x_0$ имеем $(x-x_0)^n<0$, а при $x>x_0$ имеем $(x-x_0)^n>0$. Поэтому из $(*)$ получаем, что при $x<x_0$ $f(x)<f(x_0)$,
при $x>x_0$ $f(x)>f(x_0)$ $\Rightarrow$ т. x_0 не явл. точкой экстремума ф-и $f(x)$. ∎

<u>Замечание.</u> Чаще всего эту теорему применяют при $n=2$.

Пример $f(x) = xe^x$

$f'(x) = e^x(x+1)$

$f'(-1)=0 \Rightarrow$ необх. условие наличия экстр. вып.

$-\quad +\quad \to f'$

-1

$\searrow\quad \nearrow\quad f$

$f(x)$ убыв. при $x<-1$,

$f(x)$ возр. при $x>-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-1$ — точка минимума.

Условие выпуклости функции

§3. ~~Выпуклость вогнутость перегиба~~

Пусть ф-я $f(x)$ определена на $(a;b)$.

Опр Говорят, что $f(x)$ явл. выпуклой вверх (вниз) на инт-ле $(a;b)$, если для любой касательной к графику этой ф-и каждая точка касательной, отличная от точки касания, лежит выше (ниже) точки графика ф-и с той же абсциссой.

вып. вниз вып. вверх

Теор (достаточные условия выпуклости). Пусть ф-я $f(x)$ дважды диф-ма на $(a;b)$.

1) Если $f''(x)>0$ $\forall x\in(a;b)$, то $f(x)$ выпукла вниз на $(a;b)$

2) Если $f''(x)<0$ $\forall x\in(a;b)$, то $f(x)$ выпукла вверх на $(a;b)$.

Д-во: 1) Рассмотрим касательную к графику ф-и $f(x)$ в т. $(x_0; f(x_0))$. Уравнение этой касательной имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Пусть для определенности $x_0<x<b$. Тогда разность ординат точки касательной $(x; f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))$ и точки графика ф-и $(x; f(x))$ равна

$$\Delta y = f(x_0) - f(x) + f'(x_0)(x-x_0)$$

По теореме Лагранжа имеем

$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$

Поэтому

$$\Delta y = -f'(c)(x-x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = (f'(x_0) - f'(c))\cdot(x-x_0)$$

Применим ещё раз теорему Лагранжа

$$\Delta y = -\underbrace{f''(c_1)}_{>0}\underbrace{(c-x_0)}_{>0}\underbrace{(x-x_0)}_{>0} < 0, \quad c_1 \in (x_0; c)$$

$\Rightarrow \Delta y < 0 \Rightarrow$ точка касательной лежит выше точки графика ф-и с той же абсциссой $\Rightarrow$ $f(x)$ выпукла вверх (для $a < x < x_0$ аналогично).

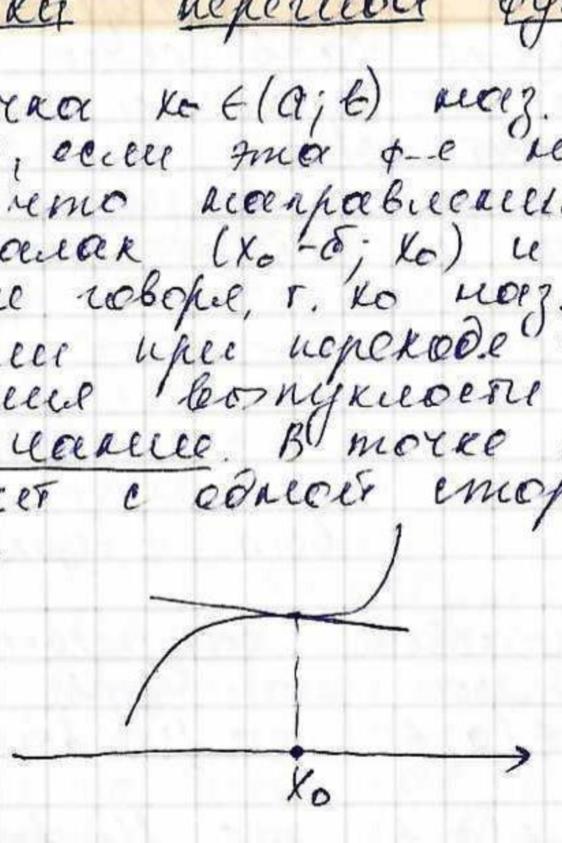
2) Доказывается аналогично. ■

§4. Точки перегиба функции

Опр. Точка $x_0 \in (a; b)$ наз. точкой перегиба ф-и $f(x)$, если эта ф-я непр в т. x_0 и если $\exists \delta > 0$ такое, что направления выпуклости на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ различны.

Иначе говоря, т. x_0 наз. точкой выпуклости ф-и, если при переходе через эту точку направления выпуклости меняются.

Замечание. В точке перегиба график ф-и переходит с одной стороны касательной на другую.



Теор. (необходимое условие наличия точки перегиба) Пусть ф-я $f(x)$ дважды диф-ма в окрестности т. x_0, причем вторая производная $f''(x)$ непр. в указанной точке. Тогда, если x_0 — точка перегиба ф-и $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Д-во: От противного.

Пусть $f''(x_0) \neq 0$ и для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности $f''(x)$ в т. x_0 существует окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, т. x_0 такая, что $f''(x) > 0$ во всех точках этой окрестности. Тогда на обоих интервалах $(x_0-\delta; x_0)$ и $(x_0; x_0+\delta)$ ф-я $f(x)$ выпукла вниз, что противоречит наличию перегиба в т. x_0. Поэтому $f''(x_0)=0$. ■

Замечание. Это условие не явл. достаточным. В этом можно убедиться на примере $f(x)=x^4$.

Теор (1-я теор. о достаточном условии наличия точки перегиба). Пусть ф-я $f(x)$ определена т. x_0 $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, $\delta>0$, и непр. в указанной точке. Тогда, если в соответствующей проколотой окр-ти $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0; x_0+\delta)$ ф-я $f(x)$ имеет вторую производную, кот. меняет знак при переходе через т. x_0, то т. x_0 — точка перегиба ф-и $f(x)$.

Д-во: Пусть для опр-ти $f''(x)>0$ в $(x_0-\delta; x_0)$ и $f''(x)<0$ в $(x_0; x_0+\delta)$. Тогда на $(x_0-\delta; x_0)$ $f(x)$ выпукла вниз, а на $(x_0; x_0+\delta)$ $f(x)$ выпукла вверх (см. достаточное условие выпуклости). Значит, при переходе через т. x_0 направление выпуклости меняется $\Rightarrow$ т. x_0 — точка перегиба ф-и $f(x)$. ■

Теор (2-я теор. о достаточном условии наличия точки перегиба). Пусть $f(x)$ трижды диф-ма в т. x_0, причём $f''(x)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$. Тогда x_0 — точка перегиба ф-и $f(x)$.

Д-во: Пусть для определённости $f'''(x_0)>0$. Тогда

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$$

Выражение $f''(x)/(x-x_0)$ в некоторой левосторонней окр-ти должно иметь знак своего предела $f'''(x_0)$ $\Rightarrow$

$$\frac{f''(x)}{x-x_0}>0 \Rightarrow f''(x)<0 \quad \text{при} \quad \forall x\in(x_0-\delta; x_0)$$

Аналогично $f''(x)>0$ при $x\in(x_0; x_0+\delta)$, т.е. $f''(x)$ меняет знак при переходе через т. x_0 $\Rightarrow$ по предыд. теореме т. x_0 — точка перегиба. ■

§5. Полная схема исследования функции.

1) Область определения, мн-во значений
2) особые свойства: чет/нечет, периодичность
3) Точки пересечения с осями координат, интервалы знакопостоянства
4) точки разрыва, их характер
5) асимптоты: вертикальные, горизонтальные, наклонные
6) точки экстремумов и ~~точки~~ интервалы монотонности
7) точки перегиба и интервалы выпуклости
8) вспомогательные точки.

Упражнения

(1) $f(x) = x\sqrt[3]{(x-1)^2}$

1) Область опр-я $\mathbb{R}$, мн-во зн-й $\mathbb{R}$,
2) общего вида, непериодическая
3) $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(x)>0$ при $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$,
$f(x)<0$ при $x\in(-\infty;0)$.
4) $f(x)$ непр. на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ точек разрыва нет
5) Вертикальных ас-т нет

Поведение на границе обл. опр.:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt[3]{(x-1)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{(x-1)^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = \infty$ $\Rightarrow$ наклонных и горизонтальных ас-т тоже нет.

6) $f'(x) = (x-1)^{2/3} + x\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} = \dfrac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}}$

Критические точки: $x=\frac{3}{5}$; $x=1$
$(f'=0)$; $(f'=\infty)$

	$(-\infty;\frac{3}{5})$	$\frac{3}{5}$	$(\frac{3}{5};1)$	1	$(1;+\infty)$
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

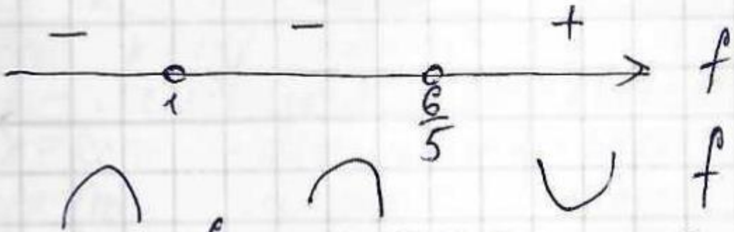
$f(x)$ возр. на $(-\infty;\frac{3}{5})\cup(1;+\infty)$

$f(x)$ убыв. на $(\frac{3}{5};1)$

т. $x=\frac{3}{5}$ — точка строгого max; $x=1$ — точка строгого минимума

7) $$f''(x) = \frac{5\sqrt[3]{x-1} - (5x-3)\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{10x-12}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

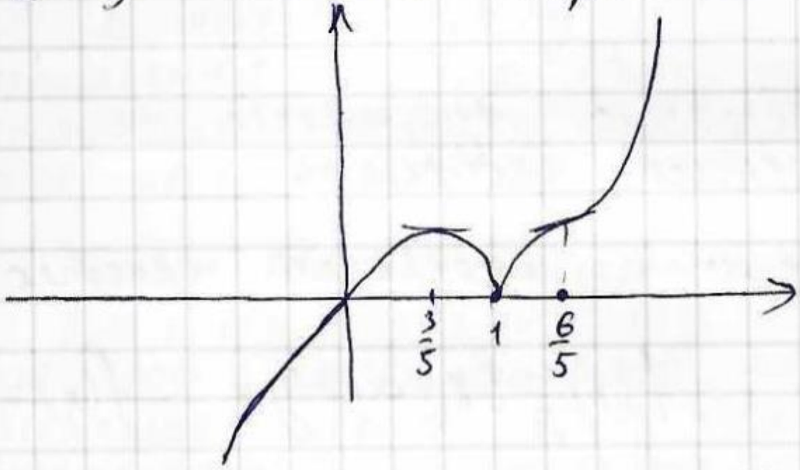
$f''\left(\frac{6}{5}\right) = 0$; $f''(1) = +\infty$



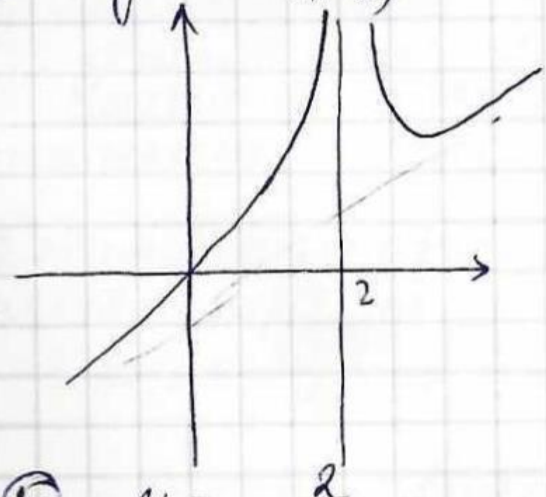
f(x) вып. вверх на $(-\infty; 1) \cup (1; \frac{6}{5})$

f(x) вып. вниз на $(\frac{6}{5}; +\infty)$

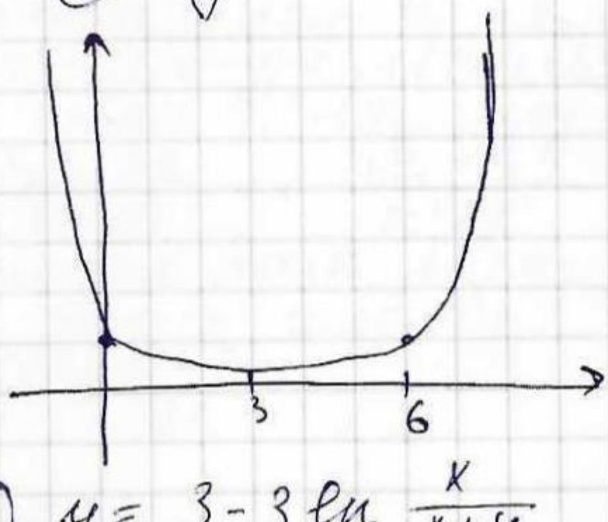
т. $x = \frac{6}{5}$ – точка перегиба



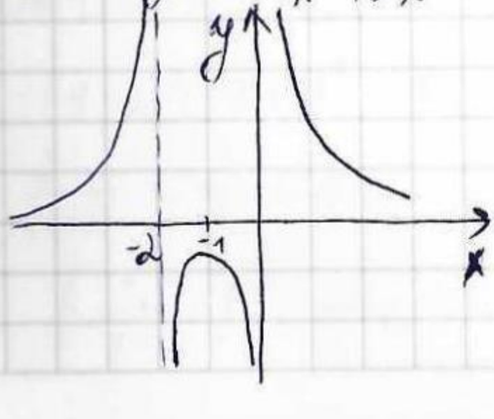
② $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$



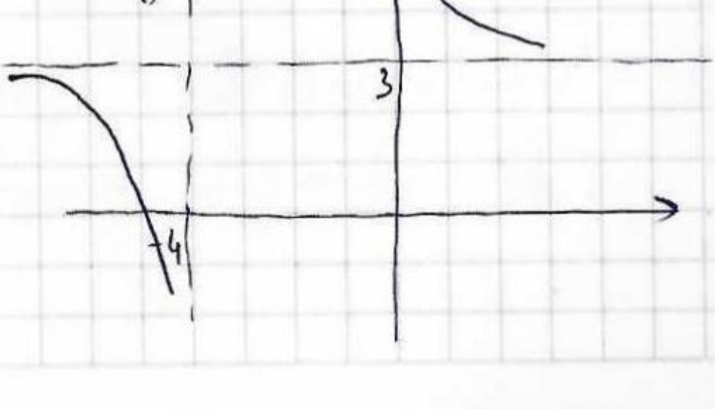
③ $y = e^{x^2-6x}$



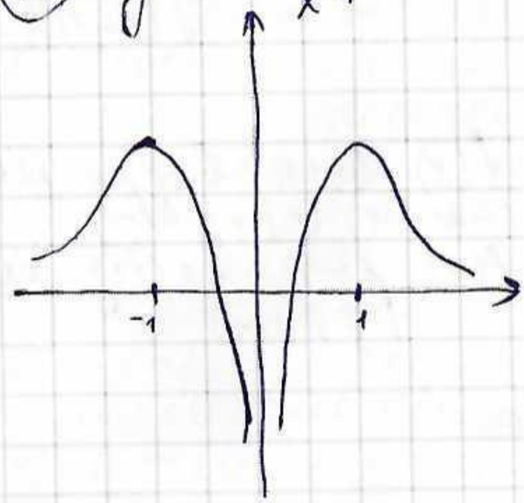
④ $y = \frac{2}{x^2+2x}$



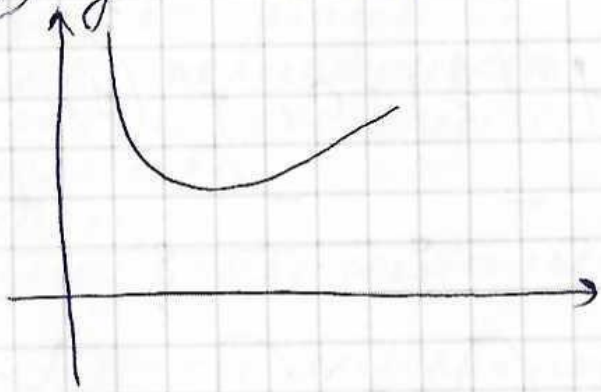
⑤ $y = 3 - 3\ln\frac{x}{x+4}$



(6) $y = \frac{2x^2-1}{x^4}$



(7) $y = x - 2\ln x$



КР12. Исследование функций и построение графиков

Исследовать ф-ию и построить график:

$f(x) = \frac{2x+4}{x-2}$ $\quad f(x) = 3x + \operatorname{arctg} x \quad$ $f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$