Лекция 13 Комплексные числа

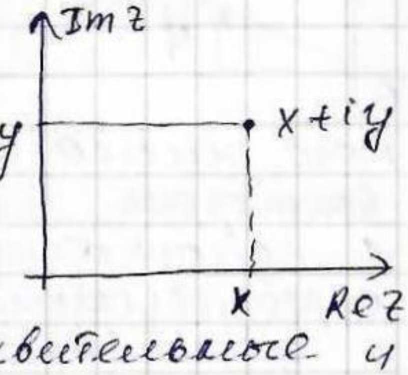
§1. Комплексные числа в алгебраической форме

Опр. Комплексным числом наз. выражение вида $x+iy$, где $i^2=-1$, $x,y\in\mathbb{R}$

i – мнимая единица

$x=\operatorname{Re} z$ – действительная часть

$y=\operatorname{Im} z$ – мнимая часть



Опр. Число $x+iy$ наз. сопряжённым к числу $x-iy$.

Комплексные числа считаются равными, если равны их действительные и мнимые части.

Пусть даны два комплексных числа

$$z_1=x_1+iy_1,\qquad z_2=x_2+iy_2$$

Опр. Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 наз. комплексное число $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

Опр. Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 наз. комплексное число $z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

Опр. Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 наз. комплексное число $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

Опр. Частным комплексных чисел z_1 и z_2 наз. комплексное число $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

Действительная и мнимая часть выражается через комплексные числа след. обр.:

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar z}{2};\quad \operatorname{Im} z=i\,\frac{\bar z-z}{2}=\frac{z-\bar z}{2i}$$

Упражнения

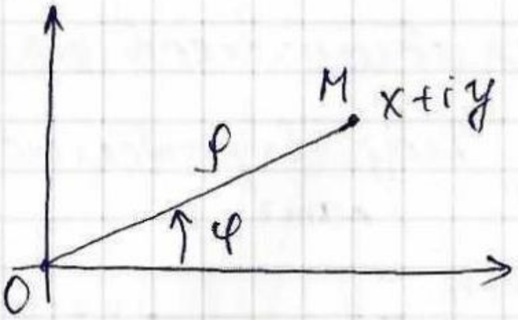
Вычислить

① $(1-2i)(2+i)^2+5i=11+3i$ ② $(1-i)^3-(1+i)^3=-4i$

③ $\dfrac{2-i}{1+i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$ ④ $\dfrac{1}{1+4i}+\dfrac{1}{4-i}=\dfrac{5}{17}-\dfrac{3}{17}i$

⑤ $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3=i$

§2. Комплексные числа в тригоном. форме



Опр. Модулем ρ комплексного числа z наз. расстояние от начала координат до точки на комплексной плоскости.

Опр. Аргументом комплексного числа наз. угол, образованный радиус-вектором точки на комплексной плоскости с положительным направлением оси OX, определённый с точностью до 2π.

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,$$

где $\arg z$ – главное значение аргумента $-\pi \le \arg z \le \pi$, причем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} y/x, & x>0 \\ \pi + \operatorname{arctg} y/x, & x<0,\ y\geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} y/x, & x<0,\ y<0 \\ \pi/2, & x=0,\ y>0 \\ -\pi/2, & x=0,\ y<0 \end{cases}$$

Два комплексных числа равны, если равны их модули, а аргументы отличаются на $2k\pi$.

Число в тригоном. форме:

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}, \quad \rho = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z$$

Число в показательной форме:

$$\boxed{z = \rho e^{i\varphi}}$$

Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Если числа z_1 и z_2 записаны в тригонометрической форме:

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то их произведение равно

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

а их частное равно

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

Возведение компл. числа в тригонометр. форме $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в натуральную степень n:

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \Rightarrow \boxed{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi}$$

Эта формула наз. <u>формулой Муавра</u>

Упражнения

Следующие комплексные числа представить в тригонометрической форме:

(1) $-i$ (2) $1-i\sqrt{3}$ (3) $\frac{1-i}{1+i}$ (4) $\sin\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

Используя формулу Муавра, вычислить

(1) $(1+i)^{10}=32i$ (2) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}=2$

(3) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}=\frac{1}{4}$.

§3. Извлечение корней n-ой степени из комплексных чисел

Корень n-ой степени из комплексного числа z имеет n различных значений, кот. находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,..,n-1,$$
$$\varphi=\arg z$$

Все корни явл. вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Упражнения

Найти все знач-е корней n-ой степ.

(1) $\sqrt{i}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ (2) $\sqrt[4]{-1}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i))$

(3) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3}$ (4) $\sqrt{1}=\pm1$

(5) $\sqrt[3]{1}=1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; (6) $\sqrt[4]{1}=\pm i, \pm1$.

§5. Основная теорема алгебры

Опр. Многочленом n-ой степени наз. ф-я вида $p_n(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$,
$z \in \mathbb{C}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – коэф-ты, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$

Опр. Уравнение $p_n(z) = 0$ наз. алгебраическим уравнением n-ой степени. Число z_0, для кот. $p_n(z_0) = 0$, наз. корнем уравнения $p_n(z) = 0$.

Теор. (Гаусса) – Основная теорема алгебры.
Многочлен n-ой степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность, т.е.

$$p_n(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m},$$

$$k_1 + \ldots + k_m = n$$

Пример. Уравнение $x^2 + 10x + 29 = 0$ имеет 2 корня: $x_{1,2} = -5 \pm 2i$

КР13. Комплексные числа

① Вычислить

$(1+i)(2-i)^2 + i$ $\qquad$ $i(3-i)(2+i)+1$ $\qquad$ $(4-i)(3+i)^2 - 11$

② Используя формулу Муавра, вычислить

$(1+\sqrt{3}i)^3$ -8 $\qquad$ $(\sqrt{3}+i)^6$ -64 $\qquad$ $(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^4$ -32

③ Решить квадратное уравнение.

$x^2 + 2x + 2 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 4x + 5 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 2x + 5 = 0.$