Лекция 1 Понятие кратного интеграла. Вычисление двойных интегралов.

§1. ~~Мера Жордана~~ Обобщение опр. интеграла.

Сначала рассмотрим пример.

Пример. Пусть имеется плоская пластина некот. формы с распределённым на ней электр. зарядом. Распределение заряда описывается плотностью (кол-вом заряда на единицу площади). Плотность обозн. $q(x,y)$.

Чтобы прибл-но вычислить общий заряд на пластинке, нужно разбить пластинку S на мелкие части ΔS_i так, чтобы плотность заряда на ней была условно пост. Тогда кол-во заряда на одной малой части равно $q(x_i, y_i)\Delta S_i$. Суммируя, получаем

$$Q \approx \sum_i q(x_i, y_i)\Delta S_i$$

Если перейти к пределу при $\Delta S_i \to 0$, получим точный результат.

Полученная сумма напоминает интегральную, но вместо длины отр-ка исп-ся единица площади.

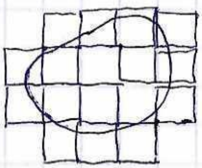
§2. Площадь плоского множества

Опр. Площадь — это мера плоских множеств, т.е. закон, по кот. плоскому мн-ву X ставится в соотв-е число $\mu(X)$, при этом:

1) $\mu(X) \geq 0$
2) площадь аддитивна, т.е. если X_1 и X_2 не перес., то
$$\mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2).$$
Из $X_1 \subset X_2$ следует $\mu(X_1) \leq \mu(X_2)$.
3) площадь фигуры не меняется при её дв-и на пл.
4) площадь квадрата со стороной 1 равна 1.

Плоское мн-во наз. измеримым, если можно определить его площадь. Объед-е, пересечение, разность измеримых мн-в явл. измеримым мн-вом.

Например, любой отрезок измерим и имеет меру 0. (отрезок длиной l целиком накрывается lp квадратами со стор. $1/p$. В квадрат со стор. 1 можно уложить без пересечений $(p-1)^2$ квадратов со стороной $1/p$ $\Rightarrow$ квадрат со стор. $1/p$ имеет площадь не б. $1/(p-1)^2$, а отрезок — не более $lp/(p-1)^2$. При $p \to \infty$ $lp/(p-1)^2 \to 0$.) Мера любого квадрата со стороной $1/p$ в точности $1/p^2$, т.к. в квадрате со стороной p можно уложить ровно p^2 таких квадратов.



Рассмотрим плоскую ограниченную фигуру. Для вычисления её площади нужно покрыть её сеткой и посчитать сумм. площадь ячеек сетки. Проще, чтобы ячейки сетки были квадратами одинакового размера. Для этого на плоскости выберем систему координат Oxy и разделим плоскость на квадраты прямыми $x = ia$, $y = ja$, $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Получаем сетку квадратов стороной a. Объединение все квадраты сетки, целиком попавшие в S ($\underline{S}$) и все квадраты, пересек. с S ($\overline{S}$), кот. возможно, целиком не лежат в S. Очевидно, что $\underline{S} \subset S \subset \overline{S} \Rightarrow \mu(\underline{S}) \leq \mu(S) \leq \mu(\overline{S})$.

Разобьем каждый квадрат сетки на p^2 частей, проведя дополнительные прямые $x = ia/p$; $y = ja/p$. Тогда новая сетка образует мн-ва $\underline{S}_1$ и $\overline{S}_1$ из более мелких квадратов, причем $\underline{S} \subset \underline{S}_1 \subset S \subset \overline{S}_1 \subset \overline{S}$.
Продолжая процесс измельчения сетки, получим
$$\underline{S} \subset \underline{S}_1 \subset \ldots \subset \underline{S}_k \subset S \subset \overline{S}_k \subset \overline{S}_{k-1} \subset \ldots \subset \overline{S}_1 \subset \overline{S}.$$
Послед-ти $\{\mu(\underline{S}_n)\}$ и $\{\mu(\overline{S}_n)\}$ явл. монотонными и ограниченными, а потому имеют предел, прич.
$$\lim_{n\to\infty} \mu(\underline{S}_n) = \underline{\mu}(S) \le \overline{\mu}(S) = \lim_{n\to\infty} \mu(\overline{S}_n).$$

<u>Опр.</u> Если величины $\underline{\mu}(S)$ и $\overline{\mu}(S)$ совпадают, то их общее значение наз. <u>площадью</u> или <u>мерой Жордана</u> фигуры S. Однако они могут и не совп. Величину $\underline{\mu}(S)$ наз. <u>внутренней (нижней)</u> мерой Жордана для S, а величину $\overline{\mu}(S)$ — <u>внешней (верхней)</u> <u>мерой</u> <u>Жордана</u> мн-ва S.

<u>Замечание</u>. При построении меры Жордана допущен произвол в выборе с-мы координат и параметров сетки. Но верхняя и нижняя меры Жордана не должны зависеть от этих пар-ов, и площадь тоже.

Может получиться так, что S не содержит ни одного квадрата сетки, как бы мы ее ни измельчали (напр., для отрезка). Тогда по опр-ю нижняя мера Жордана равна 0. В частности, это будет, когда верхняя мера Жордана равна 0. Тогда мн-во S наз. <u>множеством</u> <u>меры 0</u>.

Если мн-во X имеет площадь, то мн-во ∂X его граничных точек имеет меру 0. Действительно, построив послед-ть фигур $\{\overline{X}_n\}$ и $\{\underline{X}_n\}$, получим послед-ть множеств $\Delta X_n = \overline{X}_n \setminus \underline{X}_n$, покрывающих ∂X, причем
$$\mu(\Delta X_n) = \mu(\overline{X}_n) - \mu(\underline{X}_n) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$
Верно и обратное: если граница множества имеет меру 0, то оно измеримо.
График ф-и $f(x)$ имеет меру 0, а площадь криволин. трапеции измерима.

§3. Понятие двойного интеграла

Пусть ф-я $f(x,y)$ от двух переменных опр. и ограничена на измеримом (по Жордану) мн-ве S. Измеримое мн-во должно покрываться конечным набором квадратов и, след-но, явл. ограниченным. Разобьем мн-во S на части ΔS_i, $i=1,..,k$, измеримого по Жордану, в каждой из них возьмем точку ξ_i с коор-тами (x_i, y_i) и образуем сумму

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i)\, \mu(\Delta S_i)$$

Мн-во T из всех частей ΔS_i наз. <u>разбиением множества</u> S. Величина

$$d(X) = \max\{AB,\ A\in X,\ B\in X\},$$

равная максимально возможному расстоянию м/у точками мн-ва K наз. <u>диаметром мн-ва</u> K. Максимальный из диаметров $d(\Delta S_i)$, составляющих разбиение T частей наз. <u>диаметром</u> разбиения $d(T)$. Сумма σ_k наз. интегральной суммой для ф-и f, соотв. разбиению T.

Если для любой пос-ти разбиений T_k, удовл. условию $d(T_k)\to 0$ при $k\to\infty$, то $\exists$ предел интегральных сумм $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k$ и ф-я f наз. <u>интегрируемой</u> на мн-ве S. В этом случае предел не зависит от выбора пос-ти разбиений. Он наз. <u>интегралом</u> <u>ф-и</u> f по <u>мн-ву</u> S и обозн.

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy$$

<u>Пример</u>. Таким образом, площадь измеримого мн-ва S м.б. вычислена как

$$\iint\limits_S dx\,dy.$$

§4. Кратный интеграл

Все сказанное обобщается на трехмерный случай. Можно также построить аналогичную теорию в n-мерном арифм. пр-ве. В качестве эталона меры рассмотрим мн-во

$$E = \{ (x_1, \dots, x_n) : 0 \le x_i \le 1,\ i = 1, \dots, n \},$$

наз. *n-мерным единичным кубом*, кот. приписывают меру (n-мерный объем), равную 1. Все св-ва меры, сформул. для площади, вып.

Рассмотрим произв. огран. мн-во $S \in R^n$. Для его измерения построим сетку, проведя гиперплоскости $x_i = ka$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, параллельные координатным и отстоящие друг от друга на расстояние a. В рез-те все прост-во разобьется на n-мерные кубы со стороной a. Объед-е всех кубов, целиком лежащих в S, наз. $\underline{S}$, объед-е всех кубов, пересек. с S, обозн. $\overline{S}$. Ясно, что $\underline{S} \subset S \subset \overline{S}$. Добавляя новые гиперплоскости, получаем более мелкую сетку и новые множества $\underline{S}_1$ и $\overline{S}_1$. Продолжая процесс измельчения сетки, получим посл-ти $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$, прич.

$$\underline{S}_n \subset \underline{S}_{n+1}, \quad \overline{S}_n \supset \overline{S}_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пределы

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\underline{S}_n) = \underline{\mu}(S), \quad \lim_{n \to \infty} \mu(\overline{S}_n) = \overline{\mu}(S),$$

существ. в силу монотонности и ограниченности после-ти, наз. соот-но, *внутренней* (*нижней*) и *внешней* (*верхней*) мерами Жордана. Если внутренняя и внешняя меры Жордана совпадают, то S наз. измеримым (по Жордану), а совпадающее знач-е — *мерой* Жордана. Если внешняя мера Жордана равна 0, то мн-во наз. мн-вом меры 0.

Св-ва меры Жордана:

① Если $X_1 \subset X_2$, то $\underline{\mu}(X_1) \le \underline{\mu}(X_2)$ и $\overline{\mu}(X_1) \le \overline{\mu}(X_2)$.

(2) Если X открыто, то $0 < \underline{\mu}(X)$, в общем случае $0 \leq \underline{\mu}(X) \leq \overline{\mu}(X)$,

(3) Если X имеет меру 0, то любое подмн-во X измеримо и имеет меру 0.

(4) Для любого ограниченного мн-ва X выполняется равенство $\overline{\mu}(X) = \overline{\mu}(\overline{X})$, где $\overline{X}$ – замыкание X. В частности, замыкание мн-ва меры 0 есть мн-во меры 0.

(5) Для любого набора множеств $X_1, \ldots, X_m$ имеет место равенство

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \overline{\mu}(X_i)$$

(полуаддитивность верхней меры). В частности, объединение конечного числа множеств меры 0 есть мн-во меры 0.

(6) Огранич. мн-во измеримо $\Leftrightarrow$ его граница есть мн-во меры 0

(7) Теорема сложения: для измеримых мн-в X и Y

$$\mu(X \cap Y) = \mu(X) + \mu(Y) - \mu(X \cup Y).$$

В частности, мера объед-я непересекающихся мн-в равна сумме мер этих множеств. (аддитивность меры).

Понятие n-мерного интеграла вводится так же, как и двойной интеграл. обозначают n-мерный интеграл как обычный опр интеграл (спец. обозначения есть только для двойного и тройного инт-лов):

$$\int_S f \, dx$$

§ 5. Свойства кратного интеграла

① Для любого измеримого мн-ва S
$$\int_S dx = \mu(S)$$

② Если S — мн-во меры 0, а ф-я f определена и ограничена на S, то f интегрируема на S и
$$\int_S f(x)\,dx = 0$$

③ Если f — измеримое мн-во, f интегрируема на S, $S' \subset S$ измеримо, то f интегрируема на S'

④ Линейность интеграла.
Если ф-и f_1 и f_2 интегрируемы на измеримом мн-ве S, то для любых α_1 и α_2 ф-я $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ интегрируема на S и
$$\int_S (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\,dx = \alpha_1 \int_S f_1\,dx + \alpha_2 \int_S f_2\,dx$$

⑤ Произв-е интегрируемых на данном мн-ве ф-й интегрируемо. Частное интегрируемых ф-й интегрируемо, если делитель не принимает значений в некоторой окр-ти 0 (т. е. для некоторого $\varepsilon > 0$ вып. $|g(x)| \geq \varepsilon$)

⑥ Аддитивность интеграла
Если ф-я f интегрируема на измеримых непересекающихся (или пересекающихся по мн-ву меры 0) мн-вах S_1 и S_2, то она интегрируема на $S = S_1 \cup S_2$ и
$$\int_S f(x)\,dx = \int_{S_1} f(x)\,dx + \int_{S_2} f(x)\,dx$$

⑦ Свойство монотонности
Если f и g интегрируемы на S и всюду на S выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$, то $\int_S f(x)\,dx \geq \int_S g(x)\,dx$. В частности, интеграл от неотриц. ф-и неотрицателен.

⑧ Усиление пред. свойства: если f и g инт-мы на S и всюду на S выполняется нер-во $f(x) \geq g(x)$, причем $\exists$-ет внутр. точка мн-ва S, в кот. ф-и f и g непрерывны и удовл. строгому нер-ву $f(x) > g(x)$, то $\int_S f(x)\,dx > \int_S g(x)\,dx$

⑨ <u>Теорема о среднем</u>

Если ф-и f и g интегрируемы на S, причем всюду на S ф-я g имеет одинаковый знак, а ф-я f удовл. двойному нер-ву $m \leq f(x) \leq M$, то $\exists$ такое число λ, $m \leq \lambda \leq M$, что

$$\int_S fg\,dx = \lambda \int_S g\,dx$$

В частном случае при $g(x) \equiv 1$ получаем ф-лу $\int_S f\,dx = \lambda\,\mu(S)$, где λ – среднее знач-е ф-и f на мн-ве S.

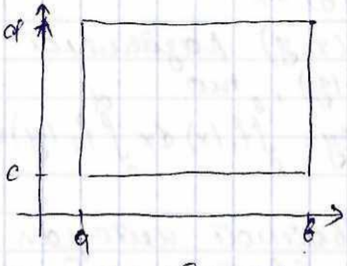
Все перечисленные св-ва имеют аналоги для определенного интеграла.

<u>Теор (об интегр-ти ф-и)</u>. Если ограниченное мн-во S измеримо, а ф-я f определена и непрерывна на S, то она интегр. на S. □

<u>Замечание</u>. Интегр-ть ф-и на множестве зависит от мощности мн-ва её точек разрыва. Верен такой <u>критерий</u> <u>инт-ти</u>: ф-я f интегрируема на ограниченном измеримом мн-ве S, если мн-во точек разрыва м.б. накрыто конечным или счётным набором кубов сколь угодно малого конечного объема (<u>крит. Лебега</u>). Из него, в частности, следует, что ф-я f интегрируема, если мн-во её точек разрыва имеет меру 0 по Жордану, т.е. накрывается конечным набором кубов произвольно малого суммарного объема.

§ 6. Вычисление двойных интегралов.

Начнем с простейшего двойного инт-ла



$\iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy$, вычисляемого по прямоугольнику P, кот. задается нер-вами $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

Для построения интегр. суммы выберем разбиение, кот. порождается разбиениями отрезка $[a;b]$ на интервалы Δx_i и отрезка $[c;d]$ на интервалы Δy_j. Соотв-но, интегр. сумма имеет вид:

$$S = \sum_{i,j} f(\xi_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta x_j$$

Пусть будем суммировать по столбцам. Точки ξ_{ij} в прямоугольниках выберем так, что одному столбцу соотв-ет одинаковая абсцисса: $\xi_{ij} = (x_i, y_{ij})$. Тогда интегр сумма примет вид

$$S = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{q} f(x_i, y_{ij})\,\Delta y_j\right)\Delta x_i$$

Внутр. сумма явл. интегральной для инт-ла от ф-и $f(x,y)$ одного переменного y (при фиксированном $x = x_i$) по отрезку $[c;d]$, кот. соотв-ет разбиению этого отрезка на интервалы Δy_j. При достн-но мелком разбиении эта сумма близка к интегралу, а значит,

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^{p}\left(\int_c^d f(x_i,y)\,dy\right)\Delta x_i$$

Но сумма $\hat{S}$ в свою очередь явл. интегральной для интеграла по отрезку $[a;b]$ от ф-ии $\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$. Поэтому в пределе мы приходим к интегралу

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$ повторный интеграл

Внутр. интеграл вычисляется при пост. x, в рез-те — ф-я от x, кот. интегр-ся по x.

Меняя местами порядок интегрирования, можем получить двойственную ф-лу

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Замечание 1. Если у ф-ии $f(x,y)$ разделяются переменные $f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y)$, то

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_a^b f_1(x)\,dx \int_c^d f_2(y)\,dy =$$

$$= \left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d f_2(y)\,dy\right),$$

т.е. двойной интеграл распадается в произведение двух опред. интегралов.

Замечание 2. Мы использовали непрерывность подынтегр. функции, однако это требование излишне: полученные ф-лы сведения интеграла к повторному верны для $\forall$ интегр. функции.

Теперь перейдем к более общему случаю. Пусть на отрезке $[a;b]$ заданы две ф-ии $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, причем $\varphi(x) \le \psi(x)$ при $a \le x \le b$.

Область

$$G = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

явл. измеримой, если ф-ии φ и ψ интегрируемы. Рассм-м

$$I = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$$

от какой-либо ф-ии $f(x,y)$, опр-ной в G.

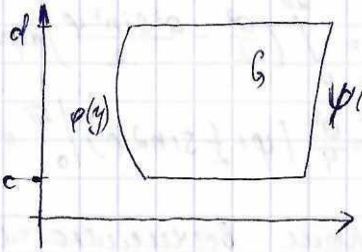
Пусть m - миним. зн-е φ; M - максим. зн-е ψ. Тогда область G целиком попадает в прямоугольник $P = [a;b] \times [m, M]$. Доопределим ф-ю f во всем прямоугольнике, полагая $f(x,y) = 0$ на мн-ве $P \setminus G$. Доопред. ф-ю обозначим $\tilde{f}$. Эта функция интегрируема на P, т.к. мн-во ее точек разрыва совп. с мн-вом точек разрыва ф-ии f, дополн. некоторым мн-вом точек границы.

Применим полученные ранее рез-ты к прямоугольнику P и функции $\hat{f}$. получим

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_P \hat{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_m^M \hat{f}(x,y)\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

опять получили повторный интеграл.

Аналогично можно свести интеграл к повторному, если область G ограничена сверху и снизу c и d соот-но, а справа и слева — ф-ями $\varphi(y)$ и $\psi(y)$.

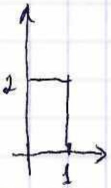


$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$

Упражнения

Вычислить повторный интеграл

(1) $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)\,dx = \int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)\,dx =$

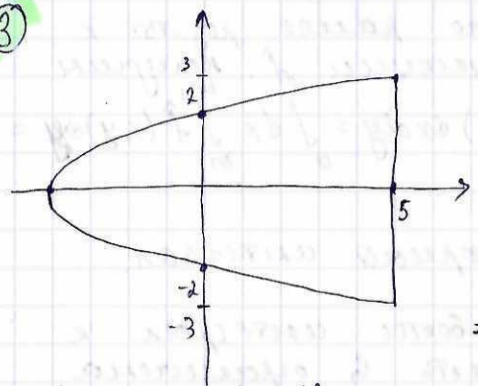


$$= \int_0^2 dy \left(\frac{x^3}{3} + 2yx\right)\Big|_0^1 = \int_0^2 dy\left(\frac{1}{3}+2y\right) =$$

$$= \frac{y}{3} + y^2 \Big|_0^2 = \frac{2}{3} + 4 = 4\frac{2}{3}.$$

(2) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2\,dy}{1+y^2} = \int_0^1 dx\left(x^2 \cdot \operatorname{arctg} y\Big|_0^1\right) = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{\pi}{4}\,dx =$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

(3) 

$$\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx = \int_{-3}^{3} dy \left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Big|_{y^2-4}^{5} =$$

$$= \int_{-3}^{3} dy\left(\frac{25}{2}+10y - \frac{(y^2-4)^2}{2} - 2y(y^2-4)\right) =$$

$$= \int_{-3}^{3}\left(\frac{9}{2}+18y+4y^2-2y^3-\frac{y^4}{2}\right)dy =$$

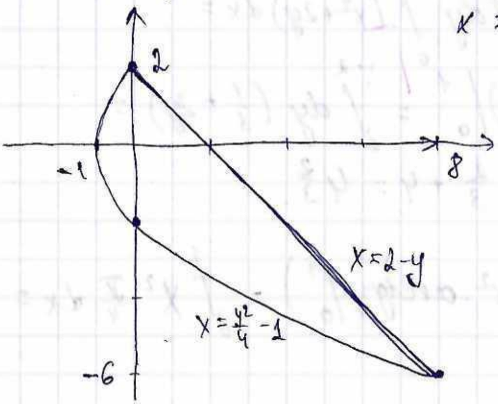
$$= \left(\frac{9}{2} y + \cancel{9y^2} + 4\frac{y^3}{3} - \cancel{2\frac{y^4}{4}} - \frac{y^5}{10}\right)\Big|_{-3}^{3} = 9\cdot 3+2\cdot 36-48,6=50,4.$$

(4) $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} r\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_{a\sin\varphi}^{a} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2\sin^2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

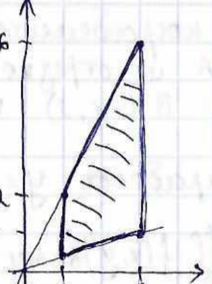
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Изобразить области, по которым вычисляются эти повторные интегралы

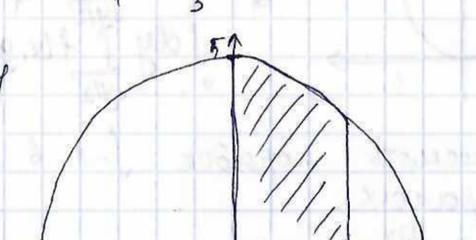
(5) $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)\,dx$ Сверху и снизу: $y=-6$ и $y=2$
Справа и слева:
$x = \frac{y^2}{4}-1$; $x=2-y$



(6) $\int\limits_1 dx \int\limits_{x/3} f(x,y)\,dy$

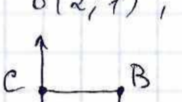


(7) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy$



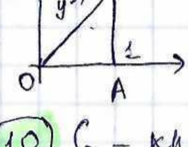
Расставить пределы $\int$-я в повторном инт-ле для указанных обл-тей x (расставить пределы $\int$-я в том и другом порядке)

(8) G - прямоугольник с верш. $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;1)$, $C(0;1)$



$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 f(x,y)\,dx$$

(9) G - треугольник с вершинами $O(0;0)$; $A(1;0)$; $B(1;1)$



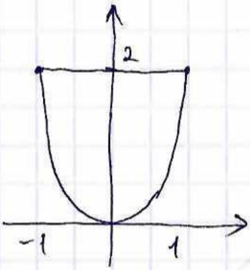
$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)\,dx$$

(10) G - круговой сектор с центром в т. $(0;0)$, концы дуги кот. $A(1;1)$, $B(-1;1)$

$$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{\sqrt{\ }}^{\sqrt{\ }x} f(x,y)\,dx$$

(11) G — прямой параболический сегмент AOB огр. параболой BOA и отрезком прямой BA, соединяющими точки $B(-1;2)$ и $A(1;2)$.

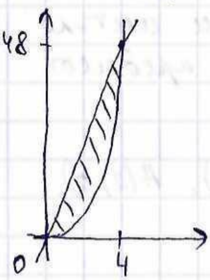


Парабола $y=2x^2$; прямая $y=2$

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{2} f(x,y)\,dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x,y)\,dx$$

Поменять порядок $\int$-е в след. двойных интегралах:

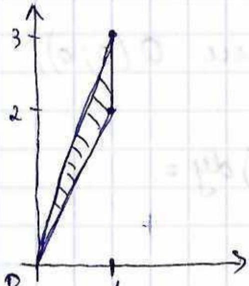
(12) $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy$



$12x = 3x^2 \Rightarrow x=4,\ x=0.$

$$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy = \int_0^{48} dy \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x,y)\,dx$$

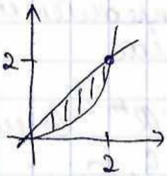
(13) $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy =$



$$= \int_0^2 dy \int_{y/3}^{y/2} f(x,y)\,dx + \int_2^3 dy \int_{y/3}^{1} f(x,y)\,dx$$

Вычислить двойной интеграл

(14) $\iint\limits_G \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, где G — параболический сегмент, ограниченный параболой $y=\frac{x^2}{2}$ и прямой $y=x$



<u>Решение:</u> $\iint\limits_G \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2/2}^{x} \frac{x\,dy}{x^2+y^2} =$

$= \int\limits_0^2 \left(x\,dx \cdot \frac{1}{x} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_{x^2/2}^{x}\right) =$

$= \int\limits_0^2 \left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)dx = \frac{\pi}{2} - \int\limits_0^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\,dx =$

$= \frac{\pi}{2} - \left[\left(x\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 x \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2}\,dx\right] =$

$= \frac{\pi}{2} - \left(2\cdot\frac{\pi}{4} - \int\limits_0^2 \frac{2x}{4+x^2}\,dx\right) = \int\limits_0^2 \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \ln(x^2+4)\Big|_0^2 =$

$= \ln 8 - \ln 4 = \ln 2.$