§7 Общий случай.

Подобно тому, как двойной интеграл сводится к повторному, состоящему из двух определен. интегралов, кратный n-мерный интеграл сводится к повторному, содержащему n определённых интегралов. Резюмирующей явл. след. теорема

Теор. Пусть $G = E \times F$, где $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$. Если ф-я $f(x,y)$, $x \in E$, $y \in F$, интегр-ма на G, то

$$\int_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_E dx \int_F f(x,y)\,dy = \int_F dy \int_E f(x,y)\,dx. \quad \square$$

Поговорим о технике вычисления тр. $\int$-ов.

Размерности E и F м.б. 1 и 2 или 2 и 1. Рассмотрим эти два случая

1) пусть в $\mathbb{R}^3$ имеется мн-во G. Спроектируем его на ось Oz, получим отрезок $[a;b]$. Для каждого $z \in [a;b]$ построим сечение тела G плоскостью, параллельной коорд. плоскости Oxy, кот. зависит от выбранного z, обозначим его $S(z)$. Тогда

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \iint_{S(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy$$

Пример. Рассмотрим интеграл по обл. G, огранич. пов-тями $x^2+y^2-z^2+2z=1$ и $z=0$

Решение: $$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \le (z-1)^2} f(x,y,z)\,dx\,dy \equiv$$

$x^2+y^2-z+2z=1 \Rightarrow x^2+y^2=(z-1)^2$ (конус)

Внутр. интеграл берётся по окр-ти с переменным радиусом $|z-1|$. В данном случае

$$\equiv \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_{-\sqrt{(1-z)^2-x^2}}^{\sqrt{(1-z)^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy$$

2) Можно спроектировать тело на коорд. пл-ть, например, xOy. Проекция представляет собой некоторое плоское мн-во S. Тогда

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S dx\,dy \int\limits_{I(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

где $I(x,y)$ — сечение тела G прямой, $\parallel$-ной координатной оси Oz. В прост. случае $I(x,y)$ — интервал от $\varphi(x,y)$ до $\psi(x,y)$ $\Rightarrow$

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

<u>Пример</u> Для интеграла из пред. примера проекцией на плоскость xOy будет круг $x^2+y^2\le 1$. Каждая точка (x,y) круга определяет сечение конуса по отрезку $0\le z\le 1-\sqrt{x^2+y^2}$, т.е.

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy \int\limits_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz$$

За счет изменения порядка переменных двойной интеграл сводится к повторному двумя способами, а тройной — шестью.

<u>Упражнения</u> — см. лекцию 2, § ~~2~~ 3 №№ 1, 2.

Лекция 2. Замена переменных в кратном $\int$-ле. Геометрические и механические прилож-я

§2. Замена переменных в двойном интеграле.

Начнем с простейшего случая. Пусть имеется прямоугольник $P=[a;b]\times[c,d]$, кот. в рез-те преобр-я

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \end{cases}$$

сводится к некоторой области G. Рассмотрим двойной интеграл $f(x,y)$ по области G.

Если преобр-е явл. простейшим — линейным, т.е. $\varphi(u,v)=\alpha u+\beta v$; $\psi(u,v)=\gamma u+\delta v$, то G явл. параллелограммом, а $f(x,y)$ можно выразить через u,v: $f(x,y)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$, получим интеграл $\iint\limits_P f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,du\,dv$, но он не совпадает с исходным.

Построим разбиение P на мелкие прямоугольники ΔP_{ij}, разбивая отрезки $[a;b]$ и $[c;d]$ на частичные интервалы точками x_i и y_j. ΔP_{ij} перейдут при линейном преобразовании в параллелограммы ΔG_{ij}, образующие разбиение параллелограмма G. Интегр. сумма по разбиению G имеет вид

$$\sigma=\sum_{i,j} f(x_{ij},y_{ij})\,\mu(\Delta G_{ij}).$$

Она м.б. преобразована в интегр. сумму для области P

$$\sigma=\sum_{i,j} f(\varphi(u_{ij},v_{ij}),\psi(u_{ij},v_{ij}))\begin{vmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{vmatrix}\mu(\Delta P_{ij}),$$

где определитель задает отношение площадей параллелограммов ΔG_{ij} к прямоугольникам ΔP_{ij}. Переходя к пределу, в лин. случае получим ф-лу

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_S f(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v)\begin{vmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{vmatrix}du\,dv$$

В общем случае мелкие прямоугольники разбиения будут преобразовываться в криволин. фигуры. Криволин. элементы ΔG_{ij} будут близки к параллелограммам, если шаг разбиения мал, а ф-и u и v определяют диффеоморфизм (отобр-е, инъектив. в каждой точке невырожд. якобиан).

1

Это же верно для обратного отобр-я. Локальная замена отобр-я (φ, ψ) линейным изменит элементы разбиения G, но незначительно. Пренебрегая разницей, получим

$\mu(\Delta G_{ij}) \approx J_{ij}\, \mu(\Delta P_{ij})$, где J_{ij} – якобиан, вычисленный в нек. точке ΔP_{ij}. В пределе

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_P f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv.$$

Чтобы ф-ла была верна, замена $\mu(\Delta G_{ij})$ на $J_{ij}\,\mu(\Delta P_{ij})$ должна иметь ошибку, б. м. более высокого порядка малости, чем $\mu(\Delta P_{ij})$. Используем "обходной маневр".

Предположим, что диффеоморфизм (φ, ψ) распространяется на некоторую окрестность $O(P)$ области интегр-я P в переменных (u,v), которая отобр-ся им в окрестность $U(G)$ области G. Обл-ть G можно расширить, заменив ее более простой, или заменив диффеоморфизм более простого вида на специальный.

Якобиан $J(u,v)$, соотв. $(u,v) \to (x,y)$, где $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, отличен от 0. Значит, одна из частных производных φ'_u и φ'_v, не равна 0. Пусть $\varphi'_u(u,v) \neq 0$. Тогда для пары ф-й $(\varphi(u,v), v)$ якобиан в т. (u,v) отличен от 0 и по теор. об обратной ф-и отобр-е $(u,v) \to (x,v)$, $x = \varphi(u,v)$, в некоторой окр-ти т. (u,v) явл. диффеоморфизмом. Соотв-е $(x,v) \to (x,y)$ также явл. диффеоморфизмом как композиция двух диффеоморфизмов. Т. о., преобразование $(x,y) \to (u,v)$ можно представить как композицию более простых: $(u,v) \to (x,v) \to (x,y)$.

Значит, ф-лу дост-но проверить только для элем. диффеоморфизма, например, $(u,v) \to (x,v)$, где $x = \varphi(u,v)$, и для прост. области P – прямоуг-ка. Усл-е диффеоморфности означает, что всюду в P $\varphi'_u(u,v) \neq 0$, это равносильно монотонности $\varphi(u,v)$ по u.

Отрезок, получающийся сечением P прямой $v=\mathrm{const}$, переходит в отрезок $[u(a,v), u(b,v)]$ той же прямой. Область G ограничена прямыми $v=c$, $v=d$ и гр-ками ф-ий $\varphi(a,v)$, $\varphi(b,v)$.
По св-вам опр-я кратных интегралов:

$$\iint_G f(x,v)\,dx\,dv = \int_c^d dv \int_{\varphi(a,v)}^{\varphi(b,v)} f(x,v)\,dx = \left\{ \begin{matrix} \text{замена} \\ x=\varphi(u,v) \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_c^d dv \int_a^b f(\varphi(u,v),v)\frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u}\,du = \iint_P f(\varphi(u,v),v)\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ 0 & 1 \end{vmatrix} du\,dv$$

Выкладка верна, если в P производная φ'_u положительна. Если произв. отрицательна, то в повторных интегралах надо переставить внутр. пределы.

В общем случае преобр-е $(u,v)\to(x,y)$ явл. композицией двух преобр-ий, по теореме о сложной ф-и матр Якоби представляется в виде

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_x & y_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Произв-ю матриц соотв-ет произв-е определителей, и окончательно получаем треб. ф-лу.

<u>Частный случай</u> (полярные координаты).
Полярные коор-ты связаны с декарт. ф-лами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Якобиан: $$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$\Rightarrow$ ф-ла преобразования двойного интеграла в полярные координаты:

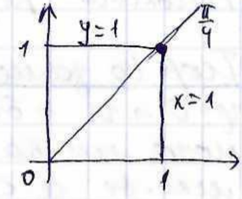
$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr$$

Если G описана в ПСК нер-вами $\alpha\le\varphi\le\beta$, $r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi)$, то

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr$$

Упражнения

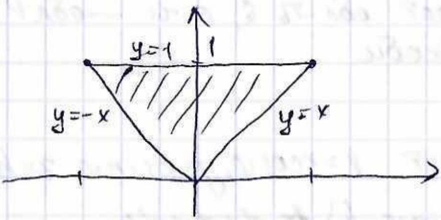
① Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования по новым переменным:



$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr$$

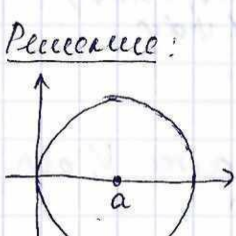
② $\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy$, где S — треугольник, огр. прямыми $y=x$, $y=-x$, $y=1$.



$$\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,dr$$

③ Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dxdy$ по области S, ограниченной окружностью $x^2+y^2=2ax$

Решение:



$x^2+y^2=2ax \Rightarrow (x-a)^2+y^2=a^2$

$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow$

$r^2=2ar\cos\varphi \Rightarrow r=2a\cos\varphi$

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2\cdot r\,dr =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4a^4\cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= 4a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4}(1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi = a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^4\Big(\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \underbrace{\frac{2}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{\to 0} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^4\Big(\pi + \Big(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\Big)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big) = \frac{3\pi a^4}{2}.$$

§ 3. Замена переменных в кратном инт-ле.

Все рассуждения переносятся на общий n-мерный случай. Сформулируем окончательный результат.

Теор (о замене перем. в кратном интеграле). Пусть $\varphi: O \to U$ — диффеоморфизм из открытого ограниченного мн-ва $O \subset \mathbb{R}^n$ в открытое ограниченное мн-во $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{P} \subset O$, $\bar{G} \subset U$, $\varphi(P) = G$. Если ФНП f опр-на на G и интегрируема, то ф-я $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ определена и интегр-ма на P, причем

$$\int_G f\,dx = \int_P (f \circ \varphi)|\det \varphi'|\,du$$

Зам. переменная x пробегает обл-ть G, а u — обл. P. φ' — обозначение матрицы Якоби.

Частные случаи.

1) Для цилиндрич. координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\, r\,dr\,d\varphi\,dh$$

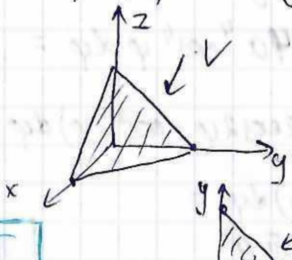
2) Для сферических координат $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi\sin\varphi$, $z = r\sin\psi$ (φ — долгота, ψ — широта, r — радиус-вектор):

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_V f(r\cos\psi\cos\varphi, r\cos\psi\sin\varphi, r\sin\psi) \cdot r^2\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi$$

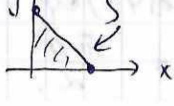
Упражнения

① Расставить пределы $\int$-е по области V, огр. тетраэдром $\underbrace{x+y+z=1}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

$\Rightarrow 0 \le z \le 1-x-y$



$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_S dxdy \int_0^{1-x-y} f\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz$$



② Вычислить $\iiint\limits_V z^2\,dx\,dy\,dz$, распростр. на V, огр. неравенствами $0\le x\le 1$, $0\le y\le x$, $0\le z\le xy$

<u>Решение:</u> $\iiint\limits_V z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} z^2\,dz =$

$= \int_0^1 dx\int_0^x dy\cdot\frac{z^3}{3}\Big|_0^{xy} = \frac{1}{3}\int_0^1 dx\cdot\int_0^x x^3y^3\,dy = \frac{1}{3}\int_0^1 x^3\frac{y^4}{4}\Big|_0^x dx =$

$= \frac{1}{12}\int_0^1 x^7\,dx = \frac{1}{12}\cdot\frac{x^8}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{96}.$

③ Перейти к цилиндр. координатам и расставить пределы $\int$-е по области V, огр. поверхностями $x^2+y^2=(z-1)^2$, $z=0$.

<u>Решение:</u> $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz\iint\limits_{(x^2+y^2)\le(1-z)^2} f\,dx\,dy =$

$= \int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{1-z} f(x,y,z)\,r\,dr$

④ Переходя к сферическим координатам, вычислить тройной интеграл

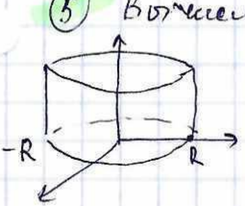
$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, V - шар радиуса R.

<u>Решение:</u> $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$, $0\le\varphi\le 2\pi$; $-\frac{\pi}{2}\le\psi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le r\le R \Rightarrow \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi\int_0^R r\cdot r^2\cos\psi\,dr =$

$= 2\pi\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^R d\psi = \frac{2\pi}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^4\cos\psi\,d\psi =$

$= \frac{\pi}{2}\cdot R^4\cdot\sin\psi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\cdot R^4\cdot 2 = \pi R^4$

⑤ Вычислить объем прямого кругового цилиндра $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, $z=H$ (цилиндр. коор-ты)



$\Rightarrow V = \int_{-R}^{R} dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\int_0^H dz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R dr\int_0^H r\,dz =$

$= 2\pi\cdot H\cdot\int_0^R r\,dr = 2\pi H\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^R = \pi R^2 H.$

Аналогично можно вычислить объём шара.

(6) Вычислить, преобразов к цилиндрич. коор-там

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=r}\, dz \ominus, \quad z=0,\ z=a,\ \sqrt{2x-x^2}=y$$

$y=0$

$2x-x^2=y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r=2\cos\varphi$

Решение:

$$\ominus \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} dr \int_0^a z\, r\cdot r\, dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int_0^a z\, dz =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi} = \frac{a^2}{6}\int_0^{\pi/2} 8\cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\cos\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}a^2\left(\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{8}{9}a^2.$$

(7) Вычислить, преобразовав к сферическим коор-там

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz \ominus$$

Решение: $\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = r^2\cos^2\psi$

$J = r^2\cos\psi$

$$\ominus \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3\psi\, d\psi = \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\psi)\, d\sin\psi =$$

$$= \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin\psi\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^3\psi}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{2}{3}\cdot 2\pi\cdot \frac{r^5}{5}\Big|_0^R =$$

$$= \frac{4\pi R^2}{15}.$$