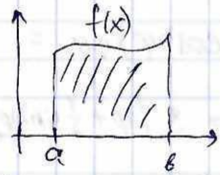
§8.1 Геометрические приложения двойного и тройного интегралов

① Площадь.

Площадь плоской обл-ти G вычисляется с помощью двойного интеграла:

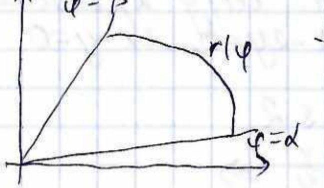
$$\mu(G) = \iint\limits_G dx\,dy$$

В частности, если G - криволин. трапеция, т.е. $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$, то



$$S = \iint\limits_G dx\,dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)\,dx$$

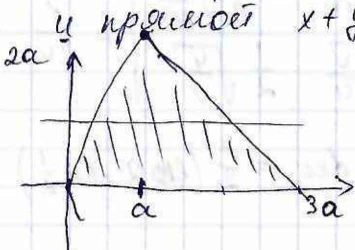
Если кривая представляет собой криволин. сектор, т.е. $\alpha \le \varphi \le \beta$, $r = r(\varphi)$, то



$$S = \iint\limits_S dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r\,dr = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$$

Упражнения

① Вычислить площадь, лежащую над осью Ox и огр. этой осью, параболой $y^2 = 4ax$ и прямой $x + y = 3a$



$y = 3a - x$, $y = 2\sqrt{ax}$

$y^2 = 4ax$; $y^2 = (3a - x)^2 = 9a^2 - 6ax + x^2$

Точки пер-е:

$4ax = 9a^2 - 6ax + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = a$, $x = 9a$.

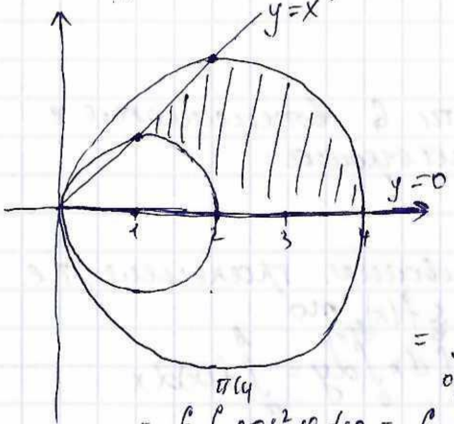
$$S = \int_0^{2a} dy \int_{y^2/4a}^{3a-y} dx = \int_0^{2a}\left(3a - y - \frac{y^2}{4a}\right)dy =$$

$$= \left(3ay - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12a}\right)\Bigg|_0^{2a} = 6a^2 - 2a^2 - \underbrace{\frac{8}{12}}_{=\frac{2}{3}}\cdot a^2 = \frac{10a^2}{3}.$$

② Перейдя к полярным координатам, найти S, ограниченную линиями: $x^2+y^2=2x$,

$x^2+y^2=4x$,

$y=x$, $y=0$.



$r_1 : (x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow r=2\cos\varphi$

$r_2 : (x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow r=4\cos\varphi$

$$S=\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r\,dr=\int_0^{\pi/4}\frac{r^2}{2}\Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}(16\cos^2\varphi-4\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=6\int_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\,d\varphi=6\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}(1+\cos2\varphi)\,d\varphi=3\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=$$

$$=3\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\cdot1=\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}.$$

③ Вычислить площадь, заключ. м/у кривыми $xy=1$, $xy=2$ и прямыми $x-2y=0$, $2x-y=0$.

Решение: $1\le xy\le 2$, $\frac{1}{2}\le\frac{y}{x}\le 2$

$u=xy$; $v=\frac{x}{y}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S=\iint_S dx\,dy=\int_1^2 du\int_{1/2} J(u,v)\,dv$$ Якобиан:

$x=\sqrt{\frac{u}{v}}$;

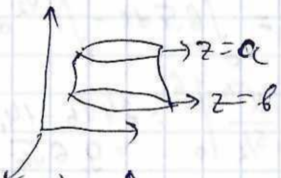
$y=\sqrt{uv}$; $\Rightarrow J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}$

$$\Rightarrow S=\int_1^2 du\int_{1/2}^2\frac{dv}{2v}=\int_1^2\frac{1}{2}(\ln v)\Big|_{1/2}^2 du=\frac{1}{2}\left(\ln2-\ln\frac{1}{2}\right)=\ln2.$$

② Объем

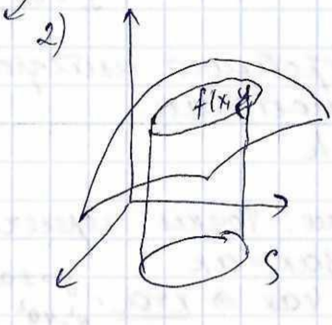
Вычисление объемов аналогично вычислению площадей.

1) Пусть тело V имеет простые сечения гориз. пл-тями. Тогда



$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \iint_{S(z)} dx\,dy = \int_a^b S(z)\,dz$$

2)

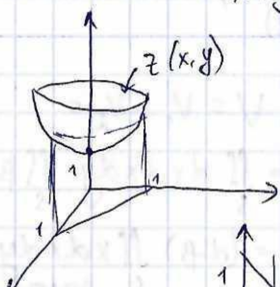


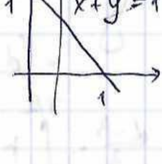
Пусть тело огр. цилиндр. поверхностью S и графиком $z = f(x,y)$. Тогда ~~объ~~ объем можно вычислить так:

$$V = \iint_S dx\,dy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_S f(x,y)\,dx\,dy$$

Упражнения

① Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 2x^2+y^2+1$, и плоскостью $x+y=1$



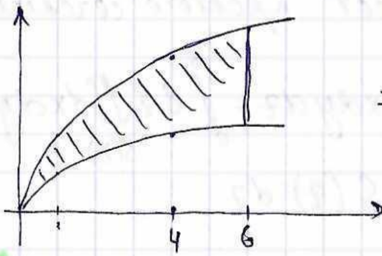


$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x^2+y^2+1)\,dy = \int_0^1 \left(2x^2y + \frac{y^3}{3} + y\right)\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} + (1-x)\right) dx = \ldots = \frac{3}{4}.$$

② Найти объём тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=6$, $z=0$.

Решение:



$$V=\iint\limits_S (6-x)\,dx\,dy=\int_0^6 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)\,dy=$$

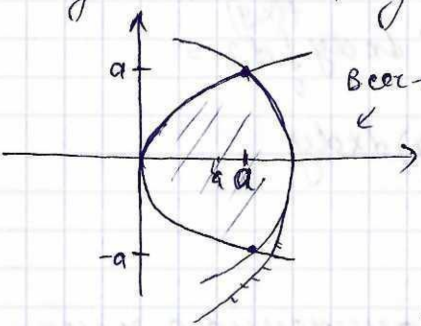
$$=\int_0^6 (6-x)\sqrt{x}\,dx=\int_0^6 6\sqrt{x}\,dx-\int_0^6 x^{3/2}\,dx=$$

$$=6\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^6-\frac{x^{5/2}}{5/2}\Big|_0^6=24\sqrt{6}-14{,}4\sqrt{6}=$$

$$=9{,}6\sqrt{6}.$$

③ Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, огр. поверхностями

$y^2=4a^2-3ax$, $y^2=ax$, $z=\pm h$



Решение: Точки пересечения

$4a^2-3ax=ax$

$4a^2=4ax \Rightarrow x=a$; $y=\pm a$

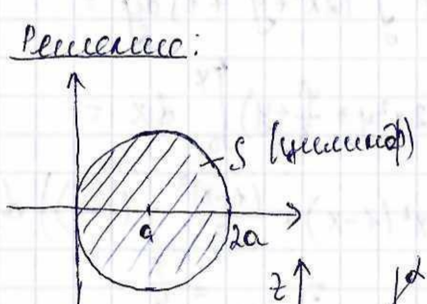
$$V=\iiint dx\,dy\,dz=\int_{-a}^{a}dy\int_{y^2/a}^{\frac{y^2-4a^2}{-3a}}dx\int_{-h}^{h}dz=$$

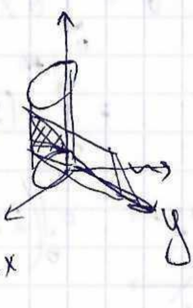
$$=2h\cdot\int_{-a}^{a}\left(\frac{y^2-4a}{-3a}-\frac{y^2}{a}\right)dy=\frac{32}{9}\cdot a^2h.$$

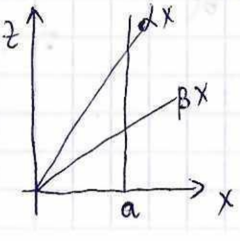
④ Вычислить объем тела, огр. поверхностями

$x^2+y^2=2ax$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ $(\alpha>\beta)$

Решение:







$$V=V_1-V_2=$$

$$=\iint\limits_S \alpha x\,dx\,dy-\iint\limits_S \beta x\,dx\,dy=$$

$$=(\alpha-\beta)\iint x\,dx\,dy=$$

$$=(\alpha-\beta)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\cos\varphi\,dr=$$

$$=\frac{\alpha-\beta}{3}\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}r^3\Big|_0^{2a\cos\varphi}\cdot\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=8a^3\cdot\frac{\alpha-\beta}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 d\varphi=\ldots=\pi a^3(\alpha-\beta)$$

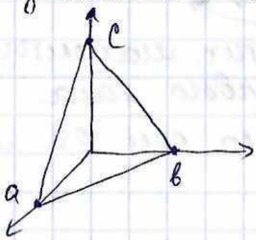
③ Вычисление площадей поверхностей

Площадь σ гладкой однозначной пов-ти $z=f(x,y)$, имеющей своей проекцией на плоскость xoy область S, равна

$$\sigma = \iint\limits_S \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

Упражнения

① Найти площадь плоскости $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, заключенной между коорд. плоскостями



Решение: $z=\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\cdot c$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c}{a};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c}{b}$$

$$\sigma=\int_0^a dx\int_0^{b-\frac{b}{a}x}\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\,dy=$$

$$=\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\cdot\int_0^a\left(b-\frac{b}{a}x\right)dx=\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\cdot\left(bx-\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^a=$$

$$=\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\cdot\left(ab-\frac{ab}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$$

② Вычислить площадь части поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$, огран. плоскостью xoy и цилиндром $x^2+y^2=2ax$

Решение: $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}=2.$$

$$\sigma=\iint\limits_S\sqrt{2}\,dx\,dy=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r\,dr=2\sqrt{2}a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\sqrt{2}a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos2\varphi)\,d\varphi=\sqrt{2}a^2\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=$$

$$=\sqrt{2}a^2(\pi)=\sqrt{2}\pi a^2.$$

§42 Механические приложения двойного и тройного интегралов

1) На основании плотности м.б. вычислена масса объемного тела:

$$M = \iiint\limits_V \underbrace{\rho(x, y, z)}_{\text{плотность}} \, dx\,dy\,dz$$

2) Координаты центра тяжести м.б. найдены по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz; \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

статич. моменты твердого тела

3) Момент инерции тела отн-но оси Oz м.б. найден по формуле

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Кроме того, можно определить моменты инерции отн-но коорд. плоскостей:

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz; \quad I_{xz} = \iiint\limits_V y^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

С помощью этих моментов можно вычислить моменты инерции отн-но координ. осей: $I_x = I_{xy} + I_{xz}$; $I_y = I_{xy} + I_{yz}$; $I_z = I_{xz} + I_{yz}$

Момент инерции отн-но нач. координат

$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$$

В специальном плоском случае приходим к двойным интегралам:

1) $\iint\limits_S \rho(x,y)\,dx\,dy$ – масса тонкой пластины

2) $M_x = \iint\limits_S y\rho(x,y)\,dx\,dy$; $M_y = \iint\limits_S x\rho(x,y)\,dx\,dy$ – стат. моменты

$\bar{x} = \frac{M_y}{M}$; $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$ – координаты центра тяжести

3) $I_x = \iint\limits_S y^2 \rho(x,y)\,dx\,dy$; $I_y = \iint\limits_S x^2 \rho(x,y)\,dx\,dy$ –

моменты инерции пластины

Момент инерции отн-но начала коор-т:

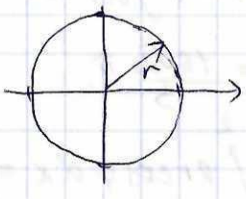
$$I_0 = I_x + I_y$$

Упражнения

(1) Найти массу круглой пластины радиуса R, если её плотность пропорциональна расст-ю от центра и $= \delta$ на краю пластины

Решение:

$$\rho(r,\varphi) = \frac{\delta}{R} \cdot r$$



$$M = \iint\limits_S \rho(r,\varphi)\, r\,dr\,d\varphi =$$

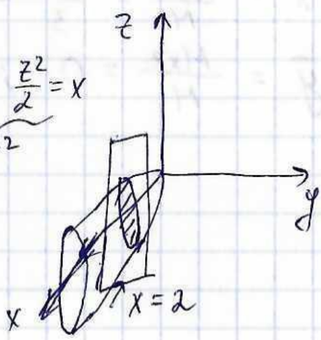
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{\delta}{R} \cdot r \cdot r\,dr = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\delta}{R} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^R d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{\delta}{R} \cdot \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2\pi\delta R^2}{3}$$

(4) Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $y^2 + 2z^2 = 4x$ и плоскостью $x = 2$

Решение: Сделаем замену:

$$(x,y,z) \to (x,r,\varphi) \qquad \left.\begin{aligned} x &= x \\ y &= 2r\cos\varphi \\ z &= \sqrt{2}\,r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2}}_{=r^2} = x$$



$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ 0 & \sqrt{2}\sin\varphi & \sqrt{2}\,r\cos\varphi \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}\,r$$

Тело однородно, а потому $\rho(x,y,z) = 1$.

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}\, r\, dr \int_{r^2}^{2} dx = 2\pi \cdot 2\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)\, r\, dr =$$

$$= 4\pi\sqrt{2}\left(r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} = 4\pi\sqrt{2}.$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}\, r\, dr \int_{r^2}^{2} \sqrt{2}\, r \sin\varphi\, dx =$$

$$= \underbrace{4\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi}_{=0} \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)\, r^2\, dr = 0.$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}\, r\, dr \int_{r^2}^{2} x\, dx \ominus$$

$$= \cancel{2\pi \cdot \left(2\sqrt{2} \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right) \cdot x^2}$$

$$\ominus\ 2\pi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}\, r \cdot \left(\frac{4-r^4}{2}\right) dr = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{2} (4r - r^5)\, dr =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \cdot \left(2r^2 - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^{2} = 2\sqrt{2}\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_V y\, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}\, r\, dr \int_{r^2}^{2} 2r\cos\varphi\, dx =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \cos\varphi \cdot (2-r^2)\, r^2\, dr = 4\sqrt{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi}_{=0} \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)\, r^2\, dr$$

$$= 0.$$

Координаты центра тяжести:

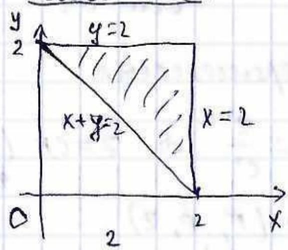
$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} \cdot \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} = \frac{4}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = 0\ ;\ \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = 0. \Rightarrow \bar{O}\left(\tfrac{4}{3}; 0; 0\right) -$$

центр тяжести

② Вычислить момент инерции однородного треугольника, ограниченного прямыми $x+y=2$, $x=2$, $y=2$ относительно оси Ox

Решение: $y = 2-x$



$\rho \equiv 1$ (однородное тело)

$$I_x = \iint\limits_S y^2 \rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$I_x = \int_0^2 dx \int_{2-x}^2 y^2\,dy = \int_0^2 \frac{y^3}{3}\Big|_{2-x}^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 (8-(2-x)^3)\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left(8x\Big|_0^2 + \frac{(2-x)^4}{4}\Big|_0^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(16 - \frac{16}{4}\right) = 4.$$

③ Найти массу тела, занимающего единичный объем $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, если плотность тела в точке $M(x;y;z)$ дается формулой $\rho = x+y+z$

Решение: $M = \iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz =$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z)\,dz = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1 dy =$$

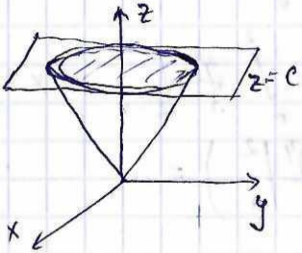
$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x+y+\frac{1}{2}\right)dy = \int_0^1 \left(xy+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}\right)\Big|_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

⑤ Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей (+) однородного тела, ограниченного поверхностями $(a, b, c > 0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}; \quad z = c \qquad \text{(+) и относительно оси } Oz$$

<u>Решение</u>: Сделаем замену переменных:



$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow r^2 = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow z = cr \ (\text{для } z > 0).$$

Якобиан $(x, y, z) \to (r, \varphi, z)$:

$$J = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi & 0 \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = abr$$

Моменты инерции (отн-но коорд. пл-тей):

$$I_{yz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{cr}^{c} a^2 r^2 \cos^2\varphi \cdot abr\, dz = a^3bc \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^1 r^3(1-r)\, dr =$$

$$= a^3bc \cdot \left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^1 = a^3bc \cdot \pi \cdot \frac{1}{20} = \frac{\pi a^3bc}{20}$$

$$I_{xz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{cr}^{c} b^2 r^2 \sin^2\varphi \cdot abr\, dz = ab^3c \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^1 r^3(1-r)\, dr =$$

$$= ab^3c \cdot \left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^1 = ab^3c \cdot \pi \cdot \frac{1}{20} = \frac{\pi ab^3c}{20}.$$

$$I_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr\, dr \int_{cr}^{c} z^2\, dz = 2\pi ab \cdot \int_0^1 r \cdot \frac{1}{3}(c^3 - c^3r^3)\, dr =$$

$$= \frac{2}{3}\pi abc^3 \int_0^1 (r - r^4)\, dr = \frac{2}{3}\pi abc^3 \cdot \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi abc^3}{5}.$$

Момент инерции отн-но оси Oz:

$$I_z = I_{xz} + I_{yz} = \frac{\pi a^3bc}{20} + \frac{\pi ab^3c}{20} = \frac{\pi abc}{20}(a^2 + b^2).$$