Лекция 4 Несобственные интегралы

§1. Понятие несобств. интеграла

Опр. Исчерпанием мн-ва $G \subset \mathbb{R}^n$ наз. любую посл-ть измеримых множеств E_n, для кот. $E_i \subset E_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i = G$.

Опр. Пусть ф-я f опр. на мн-ве $G \subset \mathbb{R}^n$ и интегрируема на измеримых огр. подмн-вах в G. Если для каждого исчерпания $\{E_i\}$ мн-ва G существует предел

$$I = \lim_{i \to \infty} \int_{E_i} f(x)\,dx,$$

причем его значение не зависит от выбора исчерпания, то этот предел наз. несобственным интегралом ф-и f по мн-ву G.

Обозн.: $$\int_G f(x)\,dx = \lim_{i \to \infty} \int_{E_i} f(x)\,dx$$

Если несобств. интеграл $\exists$-ет, то говорят, что он сходится, иначе — расходится.

Техника исчерпания используется при построении интеграла по неогр. области или по области, в кот. ф-я f неограничена. В каких случаях несобств. $\int$л совпадает с обычным?

Теор. Если $\{E_i\}$ — исчерпание измеримого мн-ва G, то:

а) $\mu(E_i) \to \mu(G)$ при $i \to \infty$

б) Если ф-я f интегрируема на G, то f интегрируема на каждом мн-ве E_i и

$$\lim_{i \to \infty} \int_{E_i} f(x)\,dx = \int_G f(x)\,dx$$ (т.е. обычный кратный интеграл)

Д-во: Площадь мн-ва не зависит от того, как мы заполняем это мн-во. Введенное понятие исчерпания — еще один способ получения площади мн-ва $\Rightarrow$ получаем а)

Св-во б) следует из а). В самом деле, если f интегрируема по мн-ву G,

то она обязана быть огр на G: $|f(x)| \le C \; \forall x \in G$.
Поэтому при $i \to \infty$

$$\left| \int_G f(x)\,dx - \int_{E_i} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{G\setminus E_i} f(x)\,dx \right| \le \int_{G\setminus E_i} |f(x)|\,dx \le$$

$$\le \int_{G\setminus E_i} C\,dx \le C\mu(G\setminus E_i) \to 0. \quad \blacksquare$$

§2. Интеграл от неотриц. функции

Инт-л от неотриц. ф-и по своим свойствам близок к обычному опред. несобств. интегралу. Если мн-во G исчерпывается мн-вами E_i, то последов-ть интегралов $\int_{E_i} f(x)\,dx$ явл. возрастающей и потому имеет предел, конечный или бесконечный. Оказывается, что этот предел не зависит от выбора исчерпания области.

Теор. Если $f: G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$, неотрицательная, $\{E_i\}$ и $\{E_i'\}$ — два исчерпания мн-ва G, причем f интегрируема на каждом элементе каждого из исчерпаний, то

$$\lim_{i\to\infty} \int_{E_i} f(x)\,dx = \lim_{i\to\infty} \int_{E_i'} f(x)\,dx = A,$$

где A – число или ∞.

Д-во: положим

$$I_k = \int_{E_k} f(x)\,dx, \quad I_k' = \int_{E_k'} f(x)\,dx, \; k=1,2,\ldots$$

Достаточно показать, что для любых двух исчерпаний E_k, E_k' и любого номера k

$$I = \lim_{i\to\infty} I_i \ge I_k'$$

Т.к. слева стоит число, то отсюда немедленно следует, что

$$I \ge \lim_{k\to\infty} I_k' = I'$$

В силу симметрии должно выполняться и обратное неравенство $\Rightarrow I = I'$.

Фиксируем номер k и обозначим $F_i = E_i \cap E_k'$, $i=1,2,\dots$. Тогда послед-ть $\{F_i\}$ является исчерпанием измеримого мн-ва E_k', на кот. ф-я f интегрируема. По пред. теор. имеем
$$\lim_{i\to\infty}\int_{F_i} f(x)\,dx = \int_{E_k'} f(x)\,dx,$$
откуда, в силу включений $F_i \subset E_i$, $i=1,2,\dots$
$$\lim_{i\to\infty}\int_{E_i} f(x)\,dx = \int_{E_k'} f(x)\,dx, \text{ ч.т.д.} \quad \blacksquare$$

Теор. (признак сравнения). Пусть ф-и f и g определены на мн-ве $G \subset \mathbb{R}^n$, причем $0 \le f(x) \le g(x)$ на G. Тогда

а) Если $\int_G g(x)\,dx$ сходится, то и $\int_G f(x)\,dx$ сход.

б) Если $\int_G f(x)\,dx$ расходится, то и $\int_G g(x)\,dx$ расх.

Д-во этой теор. повторяет д-во аналогичной теоремы для несобств. одномерного $\int$-ла.

§3. Абсолютная сходимость

Теор. (об абсолютной сход-ти). Если $\int\limits_G |f(x)|dx$ сходится, то и $\int\limits_G f(x)\,dx$ сходится.

Д-во: Д-ся аналогично теор. об абсолютной сход-ти для несобств. интеграла (одномерного). Дост-но рассмотреть неотрицат. функции $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Тогда $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$. Из интегр-ти функции $|f(x)|$ следует интегр-ть функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$, что, в свою очередь, приводит к заключ-ю об интегр-ти $f(x)$. ■

Опр. Интеграл $\int f(x)dx$ наз. сходящимся абсолютно, если сходится интеграл $\int\limits_G |f(x)|dx$.

Подобное понятие есть и в теории одномерных несобств. интегралов. Однако немаловажным явл. то, что понятия абсолютной сходимости и сход-ти совпадают.

Теор. Если $\int\limits_G f(x)\,dx$ сходится, то и $\int\limits_G |f(x)|\,dx$ сход.

Д-во: Сформулированное св-во явл. рез-том требования, чтобы предел послед-ти собств. интегралов не зависел от выбора способа исчерпания области интегр-я. Пусть есть 2 послед-ти измеримых не пересекающихся областей: E_i, в кот. ф-я f положительна и E_j, в кот. f отрицательна. Исчерпание можно строить, добавляя послед-но E_i и E_j. Если суммарный интеграл по мн-вам E_i расходится, то, выбирая в первую очередь их, можем получить бесконечный предел, что противоречит посылке теоремы. Значит, инт-л по $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ от f сходится, т.е. сходится интеграл для ф-и f_+. Аналогично док-зя, что и f_- интегрируема на G, что приводит к требуемому.

Это эскиз д-ва. Приведем полное д-во.

От противного. Пусть $\int |f(x)|\, dx$ расходится.
Обозначение для краткости

$$I(F) = \int_F f(x)\, dx, \quad |I|(F) = \int_F |f(x)|\, dx$$

Введём функции $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$,
$f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$,
так, что $f = f_+ - f_-$ и $|f| = f_+ + f_-$. Интегралы от введённых ф-й будем обозначать так:

$$I_+(F) = \int_F f_+(x)\, dx; \quad I_-(F) = \int_F f_-(x)\, dx$$

Выберем некоторое исчерпание $\{E_k\}$, для кот. $|I|(E_k) \to +\infty$ при $k \to \infty$. Можем проредить это исчерпание так, что на самом деле выполняется более сильное утвержд-е:

$$|I|(E_{k+1}) > 3\,|I|(E_k) + 2k$$

Обозначим $F_k = E_{k+1} \setminus E_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$|I|(F_k) = |I|(E_{k+1}) - |I|(E_k) \geq 2\,|I|(E_k) + 2k.$$

Для каждого номера k либо $I_+(F_k)$ превосходит $I_-(F_k)$, либо наоборот. Пусть для определённости $I_+(F_k) \geq I_-(F_k)$. Тогда

$$I_+(F_k) \geq 0{,}5\,|I|(F_k) \geq |I|(E_k) + k$$

Пусть F_k^+ обозначает подмн-во тех точек $x \in F_k$, в кот. $f(x) > 0$. Тогда

$$I(F_k^+) = I_+(F_k) \geq |I|(E_k) + k$$

Если $D_k = E_k \cup F_k^+$, то

$$I(D_k) = I(E_k) + I(F_k^+) \geq I(F_k^+) - |I|(E_k) \geq k$$

В случае, если $I_+(F_k) \leq I_-(F_k)$, мы полагаем $D_k = E_k \cup F_k^-$, где F_k^- - мн-во тех точек из F_k, в кот. $f(x) < 0$. Тогда фин. оценка будет иметь вид $I(D_k) \leq -k$.

В любом случае получаем расходящ. посл-ть $I(D_k)$. Мн-ва D_k удовл. соотношениям

$$E_k \subset D_k \subset E_{k+1},$$

а потому образуют исчерпание мн-ва G. ■

§4. Расстановка пределов в несобств. инт-лах

Рассмотрим простейший пример двойного интеграла $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ по прямоугольной неограниченной обл-ти $G = [a;b] \times [c;+\infty)$. Это значит, что для любого исчерпания E_k области G существует предел послед-ти $\iint\limits_{E_k} f(x)\,dx\,dy$. В кач-ве исчерпания рассмотрим послед-ть прямоугольников $E_k = [a;b] \times [c;c+k]$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{E_k} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty} \int_c^{c+k} dy \int_a^b f(x,y)\,dx =$$

$$= \int_c^{+\infty} dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

В другом порядке переменных

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b dx \int_c^{c+k} f(x,y)\,dy = \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy.$$

Для получения нужного рав-ва требуется перейти к пределу под знаком интеграла, т.е. нужно выяснить, при каких усл-ях верно рав-во

$$\lim_{T\to+\infty} \int_a^b \varphi(x,T)\,dx = \int_a^b \lim_{T\to+\infty} \varphi(x,T)\,dx$$

Основная проблема состоит в том, что из сход-ти двойного интеграла $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ не следует сходимость несобственного опред. интеграла $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$. Если он все-таки сходится, то двойной интеграл будет равен соотв. повторному интегралу.

§5. Замена переменных в несобств. $\int$-ле

Для несобственных интегралов верна формула замены переменных.

<u>Теор.</u> Пусть $\varphi: F \to G$ – диффеоморфизм открытого мн-ва $F \subset \mathbb{R}^n$ на открытое мн-во $G \subset \mathbb{R}^n$. Если $\int\limits_F f(x)\,dx$ сходится, то и $\int\limits_G (f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|\,dt$ сходится и значения этих интегралов совпадают. $\square$

Упражнения.

① Найти значение интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

<u>Решение:</u> Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

Сделаем замену переменных, перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} r e^{-r^2}\,dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2}\,dr^2 =$$

$$= \pi \cdot \left(-e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}\right) = \pi(-0+1) = \pi.$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

② Исследовать на сход-ть интеграл

$$\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy,$$

где $D = \{(x,y) : 1 \le x,\ |y| \le 1\}$.

<u>Решение:</u> ~~$\iint\limits_D \frac{y}{x}dxdy =$~~ Рассмотрим 2 сем-ва мн-в:

$$D_m = \{(x,y) : 1 \le x \le m,\ |y| \le 1\}$$

$$G_m = D_m \cup \{(x,y) : m \le x \le 2m,\ 0 \le y \le 1\}$$

Для исчерпания D_m

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{D_m} \frac{y}{x}\,dxdy = \lim_{m\to\infty} \int_1^m \frac{dx}{x} \overbrace{\int_{-1}^{1} ydy}^{=0} = 0$$

Для исчерпания G_m

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{G_m} \frac{y}{x}\,dxdy = \lim_{m\to\infty} \left[\iint_{D_m} \frac{y}{x}\,dxdy + \int_m^{2m} \frac{dx}{x} \int_0^1 ydy\right] = \frac{1}{2}\ln 2$$

Эти пределы различны $\Rightarrow$ интеграл расходится.

(3) Найти значения p, при кот. интеграл

$$\iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^p} \quad (p>0) \quad \text{сходится.}$$

<u>Решение</u>: Сход-ть этого $\int$-ла эквив-на сход-ти

$$\iint_{D_1} \frac{dxdy}{x^p+y^p},$$

где $D_1 = \{x+y \geq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$. (в силу симм.)
Введем обобщенные полярные коор-ты:

$$x = (r\cos^2\varphi)^{\frac{1}{p}}; \quad y = (r\sin^2\varphi)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow x^p+y^p = r; \quad J = \frac{2}{p^2}\cdot r^{\frac{2}{p}-1}\cdot \sin^{\frac{2}{p}-1}\varphi \cdot \cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi$$

$$\Rightarrow \iint_{D_1} \frac{dxdy}{x^p+y^p} = \iint_{r>1} \frac{2}{p^2}\cdot r^{\frac{2}{p}-1}\cdot \frac{1}{r}\underbrace{\sin^{\frac{2}{p}-1}\varphi\cdot\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi}_{\leq 1}\,dr\,d\varphi$$

$\Rightarrow$ дост-но рассмотреть сход-ть интеграла

$$\iint_{r>1} \frac{2}{p^2}\cdot r^{\frac{2}{p}-2}\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{+\infty} \frac{2}{p^2}\cdot r^{\frac{2}{p}-2}\,dr =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{2}{p^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{p}-1\right)}\cdot r^{\frac{2}{p}-1}\Big|_1^{+\infty}$$

Чтобы ~~всё~~ $\lim_{r\to+\infty} r^{\frac{2}{p}-1}$ выражалось кон. числом, нужно, чтобы $\frac{2}{p}-1<0 \Rightarrow \frac{2}{p}<1$.

Ответ: Интеграл сходится при $\frac{2}{p}<1$.
$(p>2)$.

§6. Интегралы, зависящие от параметра

Пусть ф-я $f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^m$, задана на мн-ве $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, пусть для каждого t_0 сечение $E_x(t_0) = E \cap \{t = t_0\} = \{(x,t) \in E : t = t_0\}$ является измеримым мн-вом, на кот. ф-я $f(x, t_0)$ интегрируема. Тогда на мн-ве E_t, явл. проекцией E в $\mathbb{R}^m$ определена ф-я

$$F(t) = \int\limits_{E_x(t)} f(x,t)\, dx,$$

кот. наз. <u>интегралом</u>, <u>зависящим</u> <u>от пар-ра</u>. При $n=1$ это определенный интеграл, иначе — кратный. Интеграл, зависящий от пар-ра, м.б. собственным и несобственным.

Остановимся на частном случае, когда $t \in \mathbb{R}$, а все множества $E_x(t)$ совпадают, т.е. $E = E_x \times E_t$, $E_x \subset \mathbb{R}^n$, $E_t \subset \mathbb{R}$.

① Собственные интегралы с параметром

Пусть множество E_x представляет собой ограниченное измеримое мн-во. Тогда $\int$-л

$$\int\limits_{E_x} f(x,t)\, dx$$ явл. собственным.

Если E_t — это отрезок $[a;b]$, то мн-во E явл. измеримым и потому для ограниченной непрерывной ф-и $f(x,t)$ определен интеграл

$$\int\limits_{E} f(x,t)\, dx\, dt,$$

кот. легко сводится к повторному:

$$\int\limits_{E} f(x,t)\, dx\, dt = \int\limits_a^b dt \int\limits_{E_x} f(x,t)\, dx = \int\limits_{E_x} dx \int\limits_a^b f(x,t)\, dt$$

С использованием обозначения:

$$\int\limits_a^b F(t)\, dt = \int\limits_{E_x} \left(\int\limits_a^b f(x,t)\, dt \right) dx$$

Т.о., интегрирование по параметру перестановочно с другим интегралом.

Пусть ф-я $f(x,t)$ имеет непрерывные ЧП. Если $\varphi(x,t) = f'_t(x,t)$, то

$$f(x,t) = f(x,a) + \int\limits_a^t \varphi(x,t)\, dt$$

Применяя к ф-и $\varphi(x,t)$ правило перестановки интегралов, получим

$$\int_a^t dt \int_{E_X} \varphi(x,t)\,dx = \int_{E_X} dx \int_a^t \varphi(x,t)\,dt = \int_{E_X} (f(x,t)-f(x,a))\,dx =$$

$$= \int_{E_X} f(x,t)\,dx - \int_{E_X} f(x,a)\,dx$$

Дифференцируя по t, получим

$$\int_{E_X} f'_t(x,t)\,dx = \int_{E_X} \varphi(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_{E_X} f(x,t)\,dx \quad \text{или}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{E_X} f(x,t)\,dx = \int_{E_X} \frac{\partial}{\partial t}(f(x,t))\,dx$$

Т.о., для непрерывно диф-мой функции операция диф-я по параметру перестановочна с интегралом.

Рассмотрим вопрос предельного перехода в интеграле с параметром, т.е. на справедливость формулы (остановимся)

$$\lim_{t\to t_0} \int_{E_X} f(x,t)\,dx = \int_{E_X} \lim_{t\to t_0} f(x,t)\,dx$$

Пусть для каждого t из окр-ти $O(t_0)$ интеграл $\int_{E_X} f(x,t)\,dx$ сходится. Пусть $\exists$ предел

$$\lim_{t\to t_0} f(x,t) = \varphi(x)$$

<u>Опр.</u> Пусть ф-я $f(x,t)$ опр-на на мн-ве $G = X \times O(t_0)$. Говорят, что $f(x,t)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$ на мн-ве X при $t\to t_0$, если

$$\lim_{t\to t_0} \sup_{x\in X} |f(x,t)-\varphi(x)| = 0.$$

обозн.: $f(x,t) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $t\to t_0$.

Равномерная сход-ть — более жесткое треб-е, чем сходимость $f(x,t)$ к $\varphi(x)$ $\forall x$.

В повторном ~~интеграле~~ пределе

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

 пределы можно переставить местами в случае, когда один из них явл. равномерным.

② Несобственные интегралы с параметром

Рассмотрим ф-ю $f(x, t)$, определённую на мн-ве $[c;+\infty)\times T$. Пусть несобств. интеграл $\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сходится для каждого $t\in T$.

<u>Опр</u> Говорят, что несобственный интеграл $\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx$ <u>сходится</u> на мн-ве T <u>равномерно</u>, если

$$\sup_{t\in T}\left|\int_C^{+\infty} f(x,t)\,dx\right| \to 0 \text{ при } C\to+\infty.$$

Равномерная сходимость позволяет менять порядок операций по переменным.

<u>Теор.1</u> Если интеграл $\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сходится равномерно на мн-ве $T=[a;b]$, то

$$\int_a^b dt \int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx = \int_c^{+\infty} dx \int_a^b f(x,t)\,dt \qquad \Box$$

<u>Теор.2</u> Если функция $f(x,t)$ имеет кусочно-непр. частную производную $f'_t(x,t)$ в области $[c;+\infty)\times[a;b]$, интегралы

$$\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

сходятся на мн-ве $T=[a;b]$ равномерно, то

$$\frac{d}{dt}\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx = \int_c^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

<u>Д-во</u>: Т.к.

$$\left|\int_a^b dt \int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx - \int_c^C dx \int_a^b f(x,t)\,dt\right| = \left|\int_a^b dt \int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx - \int_a^b dt \int_c^C f(x,t)\,dx\right| = \left|\int_a^b \left(\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx - \int_c^C f(x,t)\,dx\right) dt\right| \le$$

$$\le \int_a^b \left|\int_C^{+\infty} f(x,t)\,dx\right| dt \le (b-a)\sup_{t\in[a;b]}\left|\int_C^{+\infty} f(x,t)\,dx\right| \to 0$$

при $C\to+\infty$ и теор. 1 доказана.

В условиях теор. 2, обозначим $f'_t(x,t)=\varphi(x,t)$, получим

$$f(x,t) = f(x,a) + \int_a^t \varphi(x,t)\,dt$$

Поэтому, применяя теор. 1, получим

$$\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx = \int_c^{+\infty} f(x,a)\,dx + \int_c^{+\infty} dx \int_a^t \varphi(x,t)\,dt =$$

$$= \int_c^{+\infty} f(x,a)\,dx + \int_a^t dt \int_c^{+\infty} \varphi(x,t)\,dx.$$

Дифференцируя получ. соотношение по t, получим

$$\frac{d}{dt}\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx = \int_c^{+\infty}\varphi(x,t)\,dx \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx = \int_c^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx. \blacksquare$$

Условие равномерной сходимости несобств. интеграла необходимо проверять при каждой перестановке операций. Приведем 2 дост. условия равномерной сходимости.

<u>Теор</u> (<u>признак Вейерштрасса</u>) Если $|f(x,t)| \leq \varphi(x)$, $t\in T$, причем несобств. интеграл $\int_c^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ от неотрицат. ф-ии $\varphi(x)$ сходится, то интеграл $\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сходится на T равномерно.

<u>Д-во</u>: Если интеграл $\int_c^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сходится при любом t абсолютно по признаку сравнения. Кроме того,

$\int_C^{+\infty}\varphi(x)\,dx \to 0$ при $C\to+\infty$, поэтому

$$\sup_{t\in T}\left|\int_C^{+\infty} f(x,t)\,dx\right| \leq \sup_{t\in T}\int_C^{+\infty}|f(x,t)|\,dx \leq \int_C^{+\infty}\sup_{t\in T}|f(x,t)|\,dx \leq$$

$$\leq \int_C^{+\infty}\varphi(x)\,dx \to 0 \text{ при } C\to+\infty. \blacksquare$$

<u>Теор</u> Пусть функция $f(x,t)$ неотрицательна и непрерывна в области $G=[c;+\infty)\times[a;b]$ и интеграл $\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сходится для любого $t\in[a;b]$, причём получаемая при этом ф-я $I(t)$ явл. непрерывной на $[a;b]$. Тогда интеграл $\int_c^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сходится равномерно на $[a;b]$. $\square$