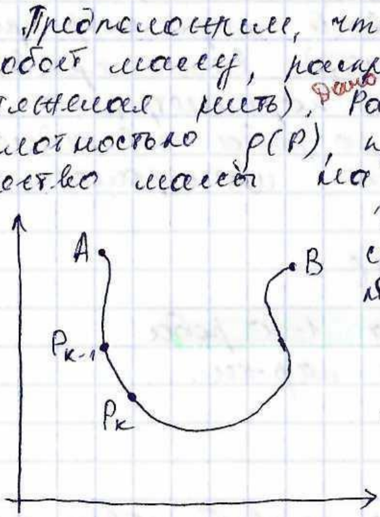
Лекция ~~4~~ 5 Криволинейный интеграл

§1. Криволин. интеграл 1-го рода

Предположим, что механ. система представляет собой массу, распределенную по некоторой кривой (тонкая нить). Дано Распределение масс линейной плотностью $\rho(P)$, представляющей собой количество масс на единицу длины кривой.



Чтобы вычислить общую массу, необходимо разбить кривую на n частей точками

$A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$.

Считая плотность на каждом участке кривой постоянной, выберем на каждой дуге $P_{k-1}\overset{\frown}{}P_k$ точку S_k и получим приближн. формулу для общей массы:

$$M = \sum_{k=1}^{n} \rho(S_k)\, l(P_{k-1}\overset{\frown}{}P_k),$$

где $l(\gamma)$ - длина дуги γ. Точное значение M явл. результатом предельного перехода, когда максим. длина составляющих дуг стремится к 0.

Набор точек $P_0, .., P_n$ наз. разбиением кривой, максимальную среди длин частей разбиения наз. диаметром разбиения. Тогда сумма M - интегральная сумма, а предел интегральных сумм при диаметре, стремящемся к 0, наз. криволинейным интегралом 1-го рода и обозначают

$$M = \int_\gamma \rho(M)\, dl.$$

Если корректно определена длина кривой, то можно вычислить криволин. интеграл. Если кривая γ в пр-ве задана пар-ми ф-ями $[x(t), y(t), z(t)]$, $t \in [\alpha, \beta]$, и эти ф-и непр. диф, то длина кривой:

$$l(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

Длина $l(t)$ участка кривой от т. α до т. t есть монотонная непр. диф-мая ф-я от t и м.б. выбрана как новый параметр кривой (<u>натуральный</u> <u>параметр</u>). Если кривой соответствует натуральный параметр, то криволинейный интеграл 1-го рода совпадает с обычным определенным интегралом от функции $\rho(M(l))$:

$$\int_\gamma \rho(M)\,dl = \int_0^L \rho(M(l))\,dl$$

① <u>Вычисление</u> <u>интеграла</u> <u>1-го рода</u>

Пусть кривая γ задана пар-ки:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},\quad t \in [\alpha;\beta]$$

Тогда длина $l(t)$ дуги кривой, отвеч. изменению параметра $[\alpha;t]$, выч-ся по формуле

$$l(t) = \int_\alpha^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

Выполнив в интеграле $I = \int_0^L \rho(M(l))\,dl$ замену переменной $l = l(t)$, приходим к опред. интегралу

$$I = \int_\alpha^\beta \rho(M(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

② <u>Свойства</u> <u>криволин.</u> <u>интеграла</u> <u>1-го рода</u>

Св-ва криволин. интеграла 1-го рода вытекают из соотв. св-в определенного интеграла

1) Линейность:

$$\int_\gamma [\lambda f(M) + \mu g(M)]\,dl = \lambda \int_\gamma f(M)\,dl + \mu \int_\gamma g(M)\,dl$$

2) Аддитивность: если кривую γ составить из двух кривых γ_1 и γ_2, совместив конец первой с началом второй, то криволинейный интеграл по суммарной кривой равен сумме интегралов по кривым γ_1 и γ_2:

$$\int_\gamma f(M)\,dl = \int_{\gamma_1} f(M)\,dl + \int_{\gamma_2} f(M)\,dl$$

2 3) Если ф-я $f(M)$, определенная на спрямляемой кривой γ, непр., то $\exists \int_\gamma f(M)\,dl$.

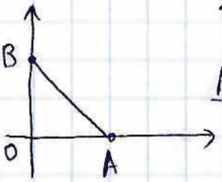
Спрямляемой наз. кривой, для кот. определена длина.

4) Длина кривой: $\int\limits_{\gamma} dl = l(\gamma)$.

Значение криволин. интеграла не зависит от выбранного направления на кривой. При сведении криволин. интеграла к определенному, нижний предел д.б. всегда меньше верхнего.

Упражнения

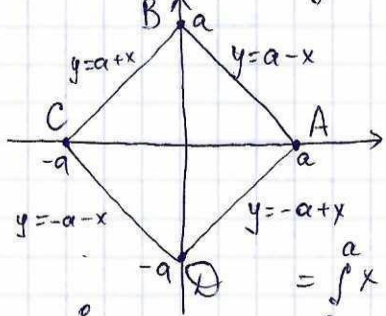
(1) Вычислить криволин. интеграл $\int\limits_C (x+y)\,ds$, где C – контур Δ-ка с вершинами O(0;0), A(1;0), B(0;1).



Реш.: OB: $x=0$; OA: $y=0$; AB: $y=1-x$

$$\int\limits_C (x+y)\,ds = \int\limits_{AB}(x+y)\,ds + \int\limits_{OB}(x+y)\,ds + \int\limits_{OA}(x+y)\,ds = \int\limits_0^1 \sqrt{1+(-1)^2}\cdot(x+1-x)\,dx + \int\limits_0^1 y\sqrt{1+0}\,dy + \int\limits_0^1 x\sqrt{1+0}\,dx = \sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \sqrt{2}+1.$$

(2) $\int\limits_C xy\,ds$, где C – контур квадрата $|x|+|y|=a$, $a>0$.

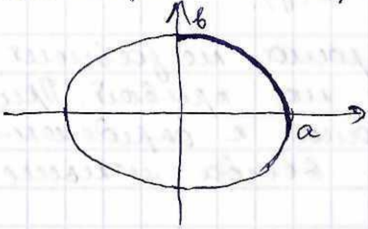


Решение:

$$\int\limits_C xy\,ds = \int\limits_{AB} xy\,ds + \int\limits_{BC} xy\,ds + \int\limits_{CD} xy\,ds + \int\limits_{AD} xy\,ds = \int\limits_0^a x(a-x)\sqrt{2}\,dx + \int\limits_{-a}^0 x(a+x)\sqrt{2}\,dx + \int\limits_{-a}^0 x(-a-x)\sqrt{2}\,dx + \int\limits_0^a x(-a+x)\sqrt{2}\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\Big(\int\limits_0^a ax\,dx - \int\limits_0^a x^2dx + \int\limits_{-a}^0 ax\,dx + \int\limits_{-a}^0 x^2dx - \int\limits_{-a}^0 ax\,dx - \int\limits_{-a}^0 x^2dx - \int\limits_0^a ax\,dx + \int\limits_0^a x^2dx\Big) = 0.$$

③ $\int\limits_C xy\,ds$, где C — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащая в первом квадранте



Решение:

$x = a\cos t$
$y = b\sin t$
$t \in (0; \frac{\pi}{2})$
$x' = -a\sin t$
$y' = b\cos t$

$\sqrt{(x')^2+(y')^2} =$
$= \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} =$
$= \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}$

$$\int\limits_C xy\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} a\cos t \cdot b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= ab\int\limits_0^{\pi/2} \sin t\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}\,d\sin t =$$

$$= \frac{ab}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}\,d\sin^2 t =$$

$$= \frac{ab}{2}\cdot\frac{2}{3(a^2-b^2)}\left(\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}\right)^3\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{ab}{2}\cdot\frac{2}{3(a^2-b^2)}(a^3-b^3) = \frac{ab(a-b)(a^2+ab+b^2)}{3(a-b)(a+b)} =$$

$$= \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$$

§2. Криволинейный интеграл 2-го рода

Возьмем спрямляемую кривую γ и определенную на ней ф-ю $f(M)$. Выберем разбиение $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$ кривой на n дуг. Пусть координаты т. P_k (x_k, y_k, z_k). Выберем на дугах $\overset{\frown}{P_{k-1}P_k}$ точки S_k и составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(S_k)\,\Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Предел интегральных сумм σ_n при диаметре разбиения, стремящемся к 0, если он $\exists$-ет и не зависит от выбора точек S_k, наз. <u>криволинейным интегралом 2-го рода</u> от ф-ии $f(M)$ вдоль кривой γ. Он обозн. так:

$$\int_\gamma f(M)\,dx = \int_\gamma f(x,y,z)\,dx$$

Выбор переменной x не явл. существенным. В общем случае криволин. интеграл 2-го рода опр-ся тремя функциями, скажем, $f(M)$, $g(M)$, $h(M)$, заданными на кривой γ:

$$\int_\gamma f(M)\,dx + g(M)\,dy + h(M)\,dz$$

Подобная конструкция возникает при вычислении, например, работы силы поля F при ~~пути~~ криволинейном пути.

Пусть задана перемен. сила F. Выберем разбиение кривой и будем считать, что на элементарных дугах перемещение прямолинейное, а сила постоянна. Получаем след. интегральную сумму:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} F(S_k)\,\Delta \bar r_k, \quad \Delta \bar r_k = \overline{P_{k-1}P_k}$$

Раскроем скалярное произв-е в координатах:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \left[F_x(S_k)\,\Delta x_k + F_y(S_k)\,\Delta y_k + F_z(S_k)\,\Delta z_k\right]$$

При переходе к пределу, когда диаметр разбиения стремится к 0, получим криволинейный интеграл 2-го рода:

$$A = \int_\gamma F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

(1) Свойства интеграла 2-го рода

Св-ва криволин. интеграла 2-го рода аналогичны св-вам определенного интеграла.

1) Линейность

$$\int_\gamma (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))dx = \alpha \int_\gamma f(x,y,z)dx + \beta \int_\gamma g\,dx$$

2) Аддитивность: Пусть кривая γ разбита на две кривые γ_1 и γ_2, причем конец первой совпадает с началом второй. Тогда

$$\int_\gamma f(x,y,z)dx = \int_{\gamma_1} f(x,y,z)\,dx + \int_{\gamma_2} f(x,y,z)\,dx$$

3) В отличие от интеграла 1-го рода значение интеграла 2-го рода зависит от направления, выбранного на ~~прямой~~ кривой:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int_{BA} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Это следует из того, что при изменении направления на кривой меняется и порядок следования точек разбиения и приращения $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ меняют знак.

4) Теорема о среднем для криволин. $\int$-ла 2-го рода не переносится, а теорема об оценке принимает вид

$$\left| \int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \right| \le \int_{AB} \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\,dl$$

Это вытекает из неравенства Коши-Буняк.:

$$|P(S_k)\Delta x_k + Q(S_k)\Delta y_k + R(S_k)\Delta z_k| \le$$

$$\le \sqrt{P^2(S_k)+Q^2(S_k)+R^2(S_k)}\,\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2+\Delta z_k^2}$$

Беск. малая $\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2+\Delta z_k^2}$ при стремлении диаметра разбиения к 0 эквивалентна длине дуги $P_{k-1}P_k$, что приводит к интегралу первого рода.

② Вычисление интеграла 2-го рода

Рассмотрим криволин. ∫л 2-го рода от ф-и $f(M) = f(x,y,z)$ вдоль кривой γ, задаваемой пар-ки

$$(*)\quad \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\nu(t) \end{cases},\quad t\in[\alpha;\beta],\ \varphi(t), \psi(t), \nu(t) \text{ непр. диф-мы на } [\alpha;\beta].$$

Каждой точке P_k разбиения кривой γ соотв-ет некоторое значение параметра t_k, $t_0=\alpha$, $t_n=\beta$. В результате

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \nu(\tau_k))\cdot \underbrace{(\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1}))}_{\text{по теор. Лагранжа } \varphi'(\zeta_k)\Delta t_k} = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \nu(\tau_k))\cdot \varphi'(\zeta_k)\Delta t_k$$

Получили нечто похожее на интегр. сумму для определенного интеграла, но значение двух сомножителей $f(\ldots)$ и $\varphi'(\ldots)$ берутся в разных точках. Если ф-я f интегрируема на γ, то функция

$$F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\,\varphi'(t)$$

непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$ и поэтому интегрируема. Взяв разбиение t_k, а в каждом интервале Δt_k т. w_k и W_k, в кот. $F(t)$ достигает соот-но минимума и максимума, полагая $F(w_k) = m_k$, $F(W_k) = M_k$, получим, что

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta t_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \nu(\tau_k))\varphi'(\zeta_k)\Delta t_k \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{M} M_k \Delta t_k.$$

Если диаметр разбиения стремится к 0, то по теореме о 2 милиционерах получаем, что интегральная сумма стремится к криволин. интегралу 2-го рода. Таким образом, д-ли следующую теорему.

<u>Теор.</u> Если кривая γ задана пар-ки соотн-ями (*), ф-и P, Q, R непрерывны, определены на γ, то криволин. ∫л 2-го рода ∃-ет и

$$\int_\gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int_\alpha^\beta \left[P(\varphi(t),\psi(t),\nu(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\nu(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\nu(t))\nu'(t) \right] dt.$$

Если параметром явл. одна из координат, то вычисление интеграла упрощается. Пусть кривая γ описывается $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, $x\in[a;b]$. Тогда
$$\int_\gamma f(x,y,z)\,dx = \int_a^b f(x,\varphi(x),\psi(x))\,dx,$$
т.е. в криволин. $\int$-ле надо переменные y и z выразить через x.

③ Связь интегралов 1-го и 2-го рода

Рассмотрим интеграл $\int_\gamma f(x,y,z)dx$, заданный на кривой γ. Кривая опр-ся соотношениями $(\varphi(t),\psi(t),\nu(t))$. Тогда
$$\int_\gamma f(x,y,z)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\nu(t))\,\varphi'(t)\,dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\nu(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\nu'(t))^2}\cos\alpha\,dt,$$
где $\cos\alpha = \dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\nu'(t))^2}}$ — направл. косинус касат. в-ра кривой γ, имеющего координаты $(\varphi'(t),\psi'(t),\nu'(t))$. И вообще
$$\int_\gamma f(x,y,z)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x,y,z)\cos\alpha\,dl$$
и общая формула
$$\underbrace{\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz}_{\text{интеграл 2-го рода}} = \underbrace{\int_\gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl}_{\text{интеграл 1-го рода}}$$

Упражнения

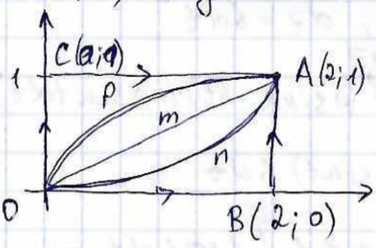
① Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{C} y^2dx + x^2dy$, где C – верхняя половина эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, пробегаемый по часовой стрелке.

Решение: $\int\limits_{C} y^2dx + x^2dy = \left\{ \begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ t\in[0;\pi] \end{array} \right\} =$

$= \int\limits_{\pi}^{0} [b^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t) + a^2\cos^2 t\cdot b\cos t]\,dt =$

$= -ab^2\int\limits_{\pi}^{0}\sin^3 t\,dt + a^2b\int\limits_{\pi}^{0}\cos^3 t\,dt = \frac{4}{3}ab^2.$

② Вычислить криволин. интеграл 2-го рода $\int\limits_{OA} 2xy\,dx - x^2dy$, взятый вдоль различных путей, выходящих из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающихся в т. $A(2;1)$:



а) прямой OmA

б) параб. OnA, ось сим. – Oy

в) параб. OpA, ось симм. – Ox

г) ломаной OBA

д) ломаной OCA

Решение: а) OmA: $y=\frac{1}{2}x$; $y'_x=\frac{1}{2}$

$\int\limits_{OA} 2xy\,dx - x^2dy = \int\limits_{0}^{2}\left(2x\cdot\frac{1}{2}x - x^2\cdot\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}x^2dx =$

$= \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$

б) OnA: $y=\frac{1}{4}x^2$; $y'=\frac{x}{2}$

$\int\limits_{OA} 2xy\,dx - x^2dy = \int\limits_{0}^{2}\left(2x\cdot\frac{x^2}{4} - x^2\cdot\frac{x}{2}\right)dx = 0.$

в) OpA: $x=2y^2$; $x'_y = 4y$

$\int\limits_{OA} 2xy\,dx - x^2dy = \int\limits_{0}^{1}\left(2\cdot(2y^2)y\cdot 4y - 4y^4\right)dy = \frac{12}{5}.$

г) OBA: $OB: y=0,\ dy=0$
$BA: x=2,\ dx=0$

$$\int\limits_{OBA} 2xy\,dx - x^2dy = \int\limits_{OB}(2xy\,dx - x^2dy) + \int\limits_{BA}(2xy\,dx - x^2dy) =$$

$$= \int\limits_{OB} 0\,dx + \int\limits_{BA} -x^2dy = -\int\limits_0^1 4\,dy = -4.$$

д) OCA: $OC: x=0,\ dx=0$
$CA: y=1,\ dy=0$

$$\int\limits_{OCA} 2xy\,dx - x^2dy = \int\limits_{OC}(2xy\,dx - x^2dy) + \int\limits_{CA}(2xy\,dx - x^2dy) =$$

$$= \int\limits_0^2 2x\,dx = x^2\Big|_0^2 = 4.$$

(*) Попробовать решить эту же задачу для $\int\limits_{OA} x\,dy + y\,dx$ или $2xy^2dx + 2x^2y\,dy$

5) $\int\limits_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, где C – виток винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ t\in[0;2\pi]$.

Решение:

$dx = -a\sin t\,dt;\ dy = a\cos t\,dt;\ dz = b\,dt$

$$\int\limits_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \int\limits_0^{2\pi}(a\sin t - bt)(-a\sin t\,dt) +$$

$$+ (bt - a\cos t)\,a\cos t\,dt + (a\cos t - a\sin t)\,b\,dt =$$

$$= -a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2t\,dt + ab\int\limits_0^{2\pi} t\sin t\,dt + ab\int\limits_0^{2\pi} t\cos t\,dt -$$

$$- a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2t\,dt + ab\int\limits_0^{2\pi}\cos t\,dt - ab\int\limits_0^{2\pi}\sin t\,dt =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt + ab\left(-t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \sin t\Big|_0^{2\pi}\right) +$$

$$+ ab\left(t\sin t\Big|_0^{2\pi} + \cos t\Big|_0^{2\pi}\right) - \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\cdot 2\pi + ab(-2\pi) + ab(\cancel{2\pi}\ 0) - \frac{a^2}{2}\cdot 2\pi =$$

$$= -2\pi a^2 - 2\pi ab = -2\pi a(a+b)$$

§3. Интеграл по замкнутому контуру

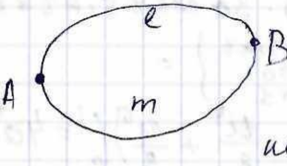
Опр. Замкнутым контуром наз. кривую, у кот. совпадает начало и конец.

Если кривая задана нар-ие отобр-ие $r: [a;b] \to \mathbb{R}^3$, то она явл. контуром, если $r(a)=r(b)$. Если при этом отобр-е r на $[a;b)$ явл. взаимно-однозначным, то контур не имеет точек самопересечения и наз. простым.

Остановимся на случае, когда контур целиком лежит в плоскости Oxy. Интеграл по замкнутому контуру строится стандартным образом, но на нем необх-мо выбрать начальную точку. Знач-е интеграла не зависит от выбора начальной точки (это нужно д-ть)

Теор.1 Значение криволин. интеграла 1-го рода по замкнутому контуру не зависит от выбора начальной точки.

Д-во: Пусть т. A, B лежат на контуре. Сам контур можно рассматривать как объединение двух кривых — l и m, соед. точки A и B. В силу аддитивности для любой ф-и f получаем



$$\int_{ml} f\,ds = \int_m f\,ds + \int_l f\,ds = \int_l f\,ds + \int_m f\,ds = \int_{lm} f\,ds$$

(ds - диф-л длины вдоль контура) ■

Интеграл 2-го рода зависит от ориентации кривой (выбора напр-я дв-я). Отметим, что простой контур, расположенный на плоскости, разделяет плоскость на 2 области, одна из кот. ограниченна. Ориентация м.б. определена след. образом. Положительным направлением дв-я по простому контуру считают такое, при котором ограниченная область по ходу дв-я остается слева (против час. стрелки). Обычно $\int$л 2-го рода вычисл. при полож. направлении

Теор. 2. Значение криволин. интеграла 2-го рода по замкнутому контуру не зависит от выбора начальной точки.

Д-во аналогично.

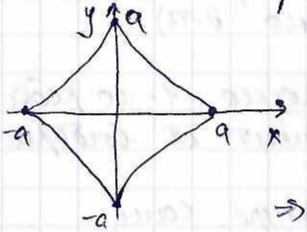
Замечание. Для криволин. интегралов по замкнутому контуру имеется специальное обозначение:

$$\oint_\gamma f\,dS \quad \text{или} \quad \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Упражнения

① Вычислить криволин. интеграл 1-го рода $\oint_C (x^{4/3}+y^{4/3})\,dS$, где C — ~~арки~~ дуга астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

Решение: парам. ур-е астроиды: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \ t\in[0;2\pi]. \end{cases}$



Ограничимся рассмотрением четверти астроиды: $0\le t\le \pi/2$ в силу симметрии

$$x'_t = 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)$$

$$y'_t = 3a\sin^2 t\cdot\cos t$$

$$\Rightarrow (x'_t)^2+(y'_t)^2 = 9a^2\cos^2 t\,\sin^2 t$$

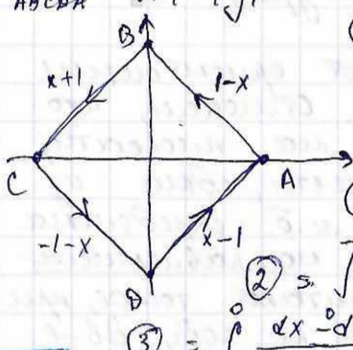
$$\Rightarrow \oint_C (x^{4/3}+y^{4/3})\,dS = 4\int_0^{\pi/2}(a^{4/3}\cos^4 t + a^{4/3}\sin^4 t)\cdot 3a\cos t\sin t\,dt =$$

$$= 12a^{7/3}\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t+\sin^4 t)\sin t\,d\sin t = \left\{\begin{matrix} u=\sin t \\ 0\to 0 \\ \pi/2\to 1\end{matrix}\right\} =$$

$$= 12a^{7/3}\int_0^1 (1-2t^2+t^4+t^4)\,t\,dt = 12a^{7/3}\cdot\left(\frac{u}{2}-\frac{u^4}{2}+\frac{u^6}{3}\right)\Big|_0^1 = 4a^{7/3}$$

② Вычислить криволин. интеграл 2-го рода

$$\oint_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|} \ ⑤,$$ где $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$



$$⑤ \int_{AB}\frac{dx+dy}{x+y}① + \int_{BC}\frac{dx+dy}{-x+y}② + \int_{CD}\frac{dx+dy}{-x-y}③ + \int_{DA}\frac{dx+dy}{x-y}④$$

$$① \int_{AB}\frac{dx+dy}{x+y} = \left\{\begin{matrix} x=x \\ y=1-x \\ dx=-dy \\ x \text{ от } 1 \text{ до } 0\end{matrix}\right\} = \int_1^0\frac{dx-dx}{x+1-x} = 0$$

$$② = \int_0^{-1}\frac{dx+dx}{1} = -2$$

$$③ = \int_{-1}^0\frac{dx-dx}{-x-(-1-x)} = 0; \quad ④ = \int_0^1\frac{2\,dx}{x+(x-1)} = 2$$

$$\Rightarrow \oint_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|} = -2+0+2+0 = 0.$$