Лекция 6. Формула Грина. Криволин. интегралы, не зав. от пути

§ 4. Формула Грина

Границу области G будем обозначать ∂G.

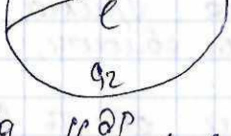
Теор. (формула Грина). Пусть G — измеримая ограниченная область, ∂G — кусочно-гладкая граница обл-ти; ф-ии P и Q определены и непр-но дифф-мы в G и в окр-ти каждой точки $M \in \partial G$. Тогда

$$\oint_{\partial G} P\,dx + Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Д-во: Формула Грина заключает в себе 2 ф-лы:

$$\int_{\partial G} P\,dx = -\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy; \qquad \int_{\partial G} Q\,dy = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

Докажем 1-ю из них (вторая симметрична)

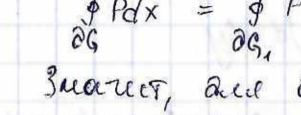


Построим кривую l, лежащую в G за исключением своих концов (концы лежат на ∂G). Такая кривая (разрез) разделяет область G на 2 подобласти: G_1 и G_2.

Тогда $$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_{G_1} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy + \iint_{G_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$\oint_{\partial G} P\,dx = \oint_{\partial G_1} P\,dx + \oint_{\partial G_2} P\,dx$$

Значит, для д-ва дост-но рассмотреть области специального вида (стандартные) по перем. y.



Пусть G: $a \le x \le b$, $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$; кривую ∂G составляют ф-ии $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и отрезки вертик. прямых. Интеграл вдоль вертик. отрезка $\int P\,dx = 0$.

В направлении полож. обхода получим

$$\oint_{\partial G} P(x,y)\,dx = \int_{\Gamma(\varphi)} P(x,y)\,dx - \int_{\Gamma(\psi)} P(x,y)\,dx = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) - P[x, \psi(x)]\,dx$$

С другой стороны, двойной интеграл превращается в повторный, причем внутр. интеграл легко вычисляется

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b [P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))]\,dx$$

Сравнивая рез-ты, получаем ф-лу Грина. ■

Двумерная область м.б. ограничена несколькими простыми несопр. контурами. Такая область наз. многосвязной. Кол-во огран. контуров опр-ет связность области. 1 огран. контур — односвязная обл-ть (без сквозных дыр), 2 контура — двусвязная область (кольцо) и т.д.

Среди контуров, огран. многосвязную область G, один явл. внешним, ост. — внутренними. Обход контуров произв-ся таким образом, что обл-ть G остается слева. Формула Грина обобщается на случай многосвязной области.

Теор. (обобщенная ф-ла Грина). Если обл-ть G ограничена неск. простыми контурами, ф-ии P и Q определены и непр-диф-мы в G, то

$$\oint_{\partial G} P\,dx + Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Д-во: Внешние контуры соединяются с внутренними с помощью гладкого разреза ⇒ односвязная область, а разрезы прох-ся дважды в противоп. напр-ях ⇒ многосвязный случай сводится к односвязному. ■

Упражнения

① С помощью ф-лы Грина преобразовать криволин. интеграл в двойной:

$$J = \oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left(xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy$$

Решение: $P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; $Q(x,y) = y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \, ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xy}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$$

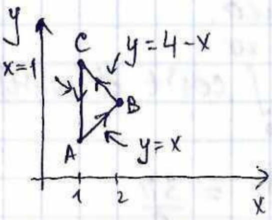
$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \ldots - y^2 \Rightarrow$$

$$J = \iint_S y^2\,dx\,dy$$

② Применяя ф-лу Грина, вычислить

$$J = \oint_C 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy,$$

где C — контур треугольника с вершинами $A(1,1)$, $B(2,2)$; $C(1;3)$



Решение: $P(x,y) = 2(x^2+y^2)$

$Q(x,y) = (x+y)^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y \, ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y)$$

$$\Rightarrow J = \iint_S (2x+2y-4y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (2x-2y)\,dy = \int_1^2 (2xy-y^2)\Big|_x^{4-x} dx =$$

$$= \int_1^2 \left[\left(2x(4-x)-(4-x)^2\right) - \left(2x^2-x^2\right)\right] dx =$$

$$= \int_1^2 (8x-4x^2)\,dx = 4x^2\Big|_1^2 - \frac{4}{3}x^3\Big|_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

Можно сделать проверку, вычислив криволин. ∫-л 2-го рода.

§52 Вычисление площадей с пом. криволинейных интегралов

Оказывается удобно, когда граница области задана пар-ки и вычислять криволин. интеграл проще, чем двойной.

Подберем ф-и P и Q, определенные в G так, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1.$$

Тогда по формуле Грина

$$\int_{\partial G} P\,dx + Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \equiv \mu(G).$$

Наиболее простыми явл. варианты

$P(x,y) = -y$; $Q(x,y) = 0$ и

$P(x,y) = 0$; $Q(x,y) = x$. В рез-те

$$\mu(G) = \int_{\partial G} x\,dy = -\int_{\partial G} y\,dx$$

Упражнения

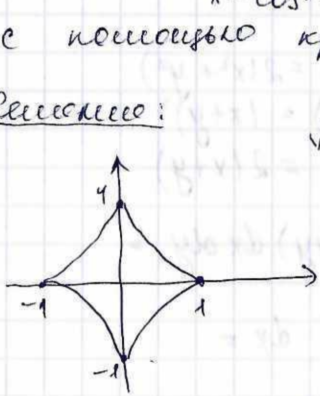
① Вычислить площадь кривой, огр. астроидой

$$x = \cos^3 t \ ; \ y = \sin^3 t$$

с помощью криволин. интеграла.

Решение:

$$\mu(G) = \int_{\partial G} x\,dy = \int_0^{2\pi} \cos^3 t \, d(\sin^3 t) =$$



$$= 3\int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t\,dt = \frac{3\pi}{8}.$$

Лекция 5. Случай полного дифференциала. Поверхностный интеграл

§13 Криволин. интегралы, не зависящие от пути.

Предположим, что ф-ии P, Q опр-ны и непр. в некоторой области G пл-ти, $\exists$ криволин. $\int$-л $\int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy$ по любой кривой $\gamma \in G$, причем значение интеграла зависит только от концов кривой. Это значит, что если 2 различные кривые γ_1 и γ_2 соединяют т. A и B и целиком лежат в G, то

$$\int\limits_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$$

Фиксируем т. $M_0(x_0, y_0) \in G$. Тогда для любой точки $M(x, y) \in G$ интеграл

$$F(x,y) = \int\limits_{M_0}^{M} P\,dx + Q\,dy,$$

взятый вдоль некоторой кривой, соед. M_0 и M, не зависит от выбора кривой, а зависит от выбора т. M, т.е. этот интеграл я-вл. ф-ей в G.
Если стартовую точку M_0 изменить на M_0', то значение интеграла изменится на константу, равную $\int\limits_{M_0}^{M_0'} P\,dx + Q\,dy$.

Таким образом, зн-е ф-и F позволяет вычислить криволин. интеграл по координатам концов $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$\int\limits_{M_1}^{M_2} P\,dx + Q\,dy = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$$

Эта ф-ла я-вл. обобщением ф-лы Ньютона-Лейбница для криволин. интеграла и она сама явл. наз. ф-лой Ньютона-Лейбница.
Как же найти такую ф-ю $F(x,y)$?

Теор 1. Если ф-ии P и Q непр. в области G, а криволин. интеграл $\int_{M_0}^{M} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути, соединяющего точки M_0 и M, то

а) определяемая диф-ном ф-я F явл. диф-мой в области G

б) ЧП ф-ии F связаны с P и Q формулами
$F'_x = P(x;y)$, $F'_y = Q(x;y)$

Д-во: Возьмем произв. т. $M(x;y)$ и зададим приращения Δx, Δy независим. переменных x, y, т.е. выберем точку $M'(x+\Delta x; y+\Delta y)$. Тогда

$$\Delta F(x,y) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = \int_{M_0}^{M'} P\,dx + Q\,dy - \int_{M_0}^{M} P\,dx + Q\,dy = \int_{M}^{M'} P\,dx + Q\,dy.$$

Вычислим ЧП ф-ии $F(x;y)$: Имеем:

$$F(x+\Delta x, y) - F(x,y) = \int_{x}^{x+\Delta x} P\,dx + \underbrace{Q\,dy}_{0} = \int_{x}^{x+\Delta x} P(\xi,y)\,d\xi,$$

откуда, диф-я опред. $\int$-л по переменному верхнему пределу, находим

$$F'_x(x;y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x}^{x+\Delta x} P(\xi,y)\,dy = P(x,y)$$

Аналогично $F'_y(x;y) = Q(x;y)$

т.к. ЧП при этом непр., то ф-я F явл. диф-мой. ■

Таким образом, если криволин. интеграл $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования, то выр-е $P\,dx + Q\,dy = F'_x\,dx + F'_y\,dy$ представляет собой полный диф-л некоторой ф-ии F.

Верно и обратное: если выражение $P\,dx + Q\,dy$ является полным диф-ом некоторой ф-ии, то криволин. $\int$-л $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегр-я, а зависит от координат точек конца кривой.

Теор. 2. Если выражение $Pdx+Qdy$ явл. полным диф-лом, то криволин. интеграл

$$\int_\gamma Pdx+Qdy$$ не зависит от пути интегр-я.

Д-во: Пусть в обл-ти G выполняются соотношения $P(x;y)=F'_x(x;y)$, $Q(x;y)=F'_y(x;y)$. Выберем произвольную кусочно-гладкую кривую, соед. точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Пусть кривая задается пар-ки ф-ями $[\varphi(t),\psi(t)]$, определенными на отр $[\alpha;\beta]$. Тогда

$$\int_\gamma Pdx+Qdy=\int_\alpha^\beta\left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right]dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[F'_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+F'_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right]dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{d}{dt}\Big(F(\varphi(t),\psi(t))\Big)dt=F(\varphi(\beta),\psi(\beta))-F(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=$$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1).$$

Значит, $\int$-л равен зн-ю разности ф-и F в концах кривой и не зависит от пути $\int$-я. ■

Упражнения

Вычислить криволин. интегралы от выражений, явл. полными диф-лами

① $$\int_{(-1;2)}^{(3;4)}x\,dy+y\,dx=\int_{(-1;2)}^{(3;4)}y\,dx+x\,dy$$

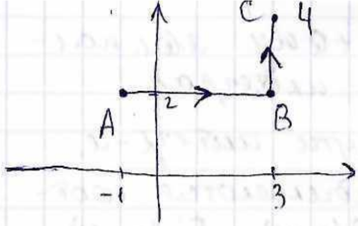
$$P(x,y)=F'_x=y;\quad Q(x;y)=F'_y=x$$

$$\left.\begin{aligned}F&=\int y\,dx=xy+\varphi(y)\\F&=\int x\,dy=xy+\psi(x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow F=xy$$

$$\Rightarrow\int_{(-1;2)}^{(3;4)}x\,dy+y\,dx=xy\Big|_{(-1;2)}^{(3;4)}=12-(-2)=14.$$

Как это можно проверить?

Можно выбрать произвольный путь, соед. точки $(-1;2)$ и $(3;4)$, и вычислить крив. $\int$-л вдоль этого пути.



Интеграл по прямой AB:

$$I_1 = \int_{(-1;2)}^{(3;2)} y\,dx + x\,dy = \int_{-1}^{3} 2\,dx =$$

$$= 2x\Big|_{-1}^{3} = 6-(-2) = 8.$$

$$I_2 = \int_{(3;2)}^{(3;4)} y\,dx + x\,dy = \int_{2}^{4} 3\,dy = 3y\Big|_{2}^{4} = 12-6 = 6$$

$$\Rightarrow \int_{(-1;2)}^{(3;4)} y\,dx + x\,dy = I_1 + I_2 = 8+6 = 14.$$

2) $$\int_{(0;0)}^{(1;1)} (x+y)(dx+dy) = \int_{(0;0)}^{(1;1)} (x+y)\,dx + (x+y)\,dy$$

$$I_1 = \int_{(0;0)}^{(1;0)} (x+y)(dx+dy) = \int_{0}^{1} (x+0)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_{(1;0)}^{(1;1)} (x+y)(dx+dy) = \int_{0}^{1} (1+y)\,dy = \left(y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = 2.$$

Восстановим ф-ю по её полному диф-лу

$$F(x,y) = \int \frac{\partial F}{\partial x}\,dx = \int (x+y)\,dx = \frac{x^2}{2} + \underline{yx} + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = \int \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = \int (x+y)\,dy = \underline{xy} + \frac{y^2}{2} + \psi(x)$$

$$\Rightarrow F(x;y) = xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2},$$ и тогда

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)} (x+y)(dx+dy) = \left(xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{(0;0)}^{(1;1)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Замечание. Ф-я F, для кот. выр-е $P\,dx + Q\,dy$ явл. полным диф-лом, явл. решением с-ы ДУ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

§24 Условия независ-ти интеграла от пути

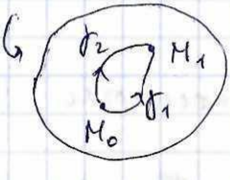
Теор. 1 (об необх. условиях незав-ти $\int$-ла от пути). Пусть ф-и P и Q определены и непр-дифф-мы в открытой области G. Тогда если криволин. интеграл $\int P dx + Q dy$ не зависит от пути, то
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Д-во: Утв-е следует из теор. о рав-ве смеш. произв.
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$
Для рав-ва смешанных производных достаточно их непр-ти. ■

Обратное утверждение в полном объеме не выполняется.

Теор. (о дост. условиях незав-ти инт-ла от пути). Если ф-и P и Q определены и непр.-дифф. в односвязной обл-ти G, причем $Q'_x = P'_y$ всюду в G, то дифф-л $P dx + Q dy$ я-ся полным, а значит, соотв. криволин. интеграл не зависит от пути.

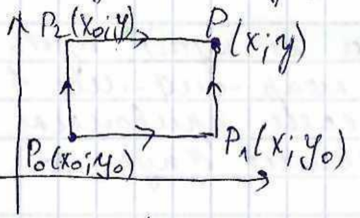
Д-во: Незав-ть $\int$-ла от пути экв-на тому, что интеграл по любому замкнутому контуру равен 0.



Пусть $M_0(x_0, y_0) \in G$, выберем произв. 2 разл. кривые γ_1 и γ_2 связывают т. M_0 и т. $M_1(x_1; y_1)$. $\gamma_1 - \gamma_2$ (сначала проходится γ_1, потом γ_2 в обр. напр-и) является контуром, целиком лежащим в $O_\delta(M_0)$. Применив к нему ф-лу Грина, получим, что интеграл равен $0 \Rightarrow$ интегралы по γ_1 и γ_2 равны. ■

Восстановление ф-и по её полному дифф-лу м.б. выполнено с помощью криволин. $\int$-ов II рода.

Пусть $(x_0;y_0)$ — фикс. точка; $(x;y)$ — произв. точка



Интеграл не завис-т от пути $\Rightarrow$ интегр-ем по 2 ломаным: P_0P_1P и P_0P_2P

$\underline{P_0P_1P}$: сначала по P_0P_1 (x меняется от x_0 до x; $y=y_0$; $dy=0$), потом по P_1P (y меняется от y_0 до y; $x=x$, $dx=0$).

$$\Rightarrow F(x,y)-F(x_0,y_0)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy$$

Аналогично $\underline{P_0P_2P}$:
сначала по P_0P_2 (y мен. от y_0 до y; $x=x_0$; $dx=0$), потом по P_2P (x меняется от x_0 до x; $dy=0$; $y=y$)

$$\Rightarrow F(x,y)-F(x_0,y_0)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0;y)\,dy+\int\limits_{x_0}^{x} P(x;y)\,dx$$

Упражнения

Проверить, что подынтегр. ф-е явл. полным дифф-лом, восстановить ф-ю по её полному диф-лу, вычислить криволин. интеграл.

1. $\displaystyle\int\limits_{(0;1)}^{(3;4)} x\,dx+y\,dy$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=0;\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=0 \Rightarrow x\,dx+y\,dy$ явл. полным диф-лом

$$F(x;y)-F(x_0;y_0)=\int\limits_0^x x\,dx+\int\limits_0^y y\,dy=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C \text{ или}$$

$$F(x;y)-F(x_0;y_0)=\int\limits_0^y y\,dy+\int\limits_0^x x\,dx=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x;y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$$

$$\int\limits_{(0;1)}^{(3;4)} x\,dx+y\,dy=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{(0;1)}^{(3;4)}=\left(\frac{9}{2}+\frac{16}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)=12.$$

② $\displaystyle\int_{(1;2)}^{(2;1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ (по пути, не перес. ось Ox)

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} \qquad P(x;y) = \frac{1}{y};\ Q(x;y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2};\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$

Пусть $(x_0;y_0) = (1;1)$

$$F(x;y) - F(x_0;y_0) = \int_1^x \frac{dx}{1} + \int_1^y \left(-\frac{x}{y^2}\right) dy = x - 1 + \frac{x}{y}\Big|_1^y =$$

$$= x - 1 + \cancel{1}\ \frac{x}{y} - \cancel{1}x = \frac{x}{y} + C$$

$$F(x;y) - F(x_0;y_0) = \int_1^y \frac{dy}{y} - \int_1^x \frac{\cancel{x}\,dx}{y^2} = \cancel{\frac{x}{y}\Big|_1^y}$$

$$= \frac{1}{y}\Big|_1^y + \frac{x}{y}\Big|_1^x = \frac{1}{y} - 1 + \frac{x}{y} - \frac{1}{y} = \frac{x}{y} + C$$

$$\Rightarrow F(x;y) = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \int_{(1;2)}^{(2;1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{(1;2)}^{(2;1)} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

③ $\displaystyle\int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$

$$\left.\begin{array}{l} P(x;y) = x^4 + 4xy^3;\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2 \\ Q(x;y) = 6x^2y^2 - 5y^4;\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2 \end{array}\right\} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$(x_0;y_0) = (0;0)$

$$F(x;y) - F(0;0) = \int_0^x (x^4\,dx) + \int_0^y (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5 + C$$

$$F(x;y) - F(0;0) = \int_0^y (-5y^4\,dy) + \int_0^x (x^4 + 4xy^3)\,dx = \underline{-y^5 + \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3} + C$$

$$\Rightarrow F(x;y) = \frac{x^5}{5} - y^5 + 2x^2y^3$$

$$\int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy = \left(\frac{x^5}{5} - y^5 + 2x^2y^3\right)\Big|_{(-2;-1)}^{(3;0)} =$$

$$= \frac{243}{5} - \left(\frac{-32}{5} + 1 - 4\right) = \frac{246}{5} = 49,2.$$

§ 15 Циклические постоянные.

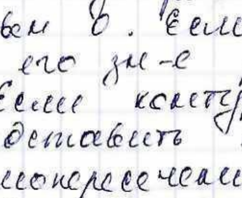
Рассмотрим спец. случай неодносвязной области — проколотый круг $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 < R^2\}$. Пусть P и Q опр-ны и непр-дифф-мы в односвязной обл-ти G, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда в силу обобщенной ф-лы Грина, примененной к кольцу $\rho_1^2 < x^2+y^2 < \rho_2^2 < R^2$, заключаем, что интеграл по любой окружности имеет одно и то же знач-е, кот. обозначим $\varkappa$ (обход против часовой стрелки).

Рассмотрим контур γ без самопересечений. Если его внутр-ть не сод-т выколотой точки, к нему применима ф-ла Грина и интеграл равен 0. Если он охватывает выколот. точку, то его зн-е равно $\pm \varkappa$.

Если контур имеет самопересеч-е, его можно представить как сумму неск. контуров без самопересечений. Тогда зн-е интеграла равно $n\varkappa$, n — кратность обхода.

Опр. Величина $\varkappa$ наз. циклической постоянной.

Частный случай распространяется на общий. Пусть G ограничена конечным числом кусоч.-но-гладких контуров.



Вычислим интеграл по каждому внутр. контуру границы, обходе его против часовой стрелки. получим набор значений $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$ — циклич. постоянных для G.

Знач-е любого интеграла по замкнутому контуру в G м.б. представлено в виде суммы $n_1\varkappa_1 + \dots + n_m\varkappa_m$, где n_i — кратности обхода каждой границы.

§4.6 Трехмерный случай

На трехмерный случай переносятся утв-я теор. 1 и 2. Если ф-ии P, Q, R опр-ны и непр. в трехмерной открытой обл. G, то интеграл

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

не зависит от пути в обл-ти G, если выр-е $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ явл. полным диф-ом. Ф-я $F(x,y,z)$ опр-ся с точностью до пост. и равна зн-ю интеграла

$$\int_{M_0}^{M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

от некоторой фикс. т. M_0 до т. $M(x;y;z)$.

Если $F'_x = P$, $F'_y = Q$, $F'_z = R$, то из теор. о рав-ве смеш. производных получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Эти усл-я я-ся необходимыми. Они будут явл. достаточными, если на обл-ть G наложить огран-е, аналогичные односвязности.

Упражнение

① Вычислить крив. интеграл $\displaystyle\int_{(1;2;2)}^{(6;2;3)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

по любому пути, не прох. через $(0;0;0)$.

Решение: $F(x;y;z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow$

$$\int_{(1;2;2)}^{(6;2;3)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\Big|_{(1;2;2)}^{(6;2;3)} = \sqrt{49} - \sqrt{9} = 7 - 3 = 4.$$