Глава 4. Поверхностные интегралы

§51 Площадь поверхности

Изучение поверхностных интегралов начнем с одной практической задачи. Пусть требуется найти массу тонкой искривлённой пластинки S, в каждой точке которой задана поверхностная плотность ρ. Делим пластинку на мелкие части ΔS_i, а затем составим интегр. сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \, \mu(\Delta S_i)$$

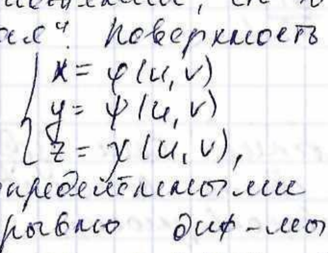
$\mu(\Delta S_i)$ – площадь поверхности ΔS_i,
ρ_i – средняя плотность i-той части.

Точное значение площади получается в результате предельного перехода при неогран. измельчении разбиения.

Площадь поверхности основывается на предположении, что в малом поверхность "почти плоская". Поверхность задана уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v), \end{cases}$$

определёнными в двумерной области G и непрерывно диф-мыми. Пусть отобр-е $G \to S$, заданное этими ф-ями, я.вл. взаимно-однозначным. Тогда (u,v) можно трактовать как коор-ты на пов-ти.



Разобьём область G прямоуг. сеткой на ΔG_i. Каждому прямоугольнику разбиения соотв-ет эл-т ΔS_i пов-ти S.
Т.к. ф-ии φ, ψ, χ непр. диф-мы, поверхность S имеет в каждой точке касательную плоскость, кот. м.б. задана парой касат. векторов $(\varphi'_u, \psi'_u, \chi'_u)$, $(\varphi'_v, \psi'_v, \chi'_v)$.

Можно пок-ть, что если эти векторы не коллинеарны, то локально отобр-е $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ взаимно-однозначно. Пусть это треб-е вып-ся всюду в G.

В каждом элементе разбиения ΔG_i выберем точку (u_i, v_i). Пусть $\Delta \hat S_i$ – проекция ΔS_i на касат. плоскость в т. $M_i(u_i, v_i)$.

Составим сумму

$$\sigma = \sum_i \mu(\Delta \hat{S}_i)$$

Граница $\Delta \hat{S}_i$ состоит из дуг четырех непр.-диф. кривых. В этом случае элемент явл. измеримым мн-вом и сумма составлена корректно.

Если эта интегр. сумма имеет предел при диаметре разбиения $\to 0$, то этот предел наз. площадью пов-ти S.

В кач-ве точки (u_i, v_i) возьмем левый нижний угол ΔG_i. Рассмотрим параллелограмм, образованный касательными векторами $r_u = (\varphi'_u, \psi'_u, \chi'_u)$, $r_v = (\varphi'_v, \psi'_v, \chi'_v)$. Этот параллелограмм явл. линеаризацией криволин. четырехугольника $\Delta \hat{S}_i$. В пределе можно площади криволин. четырехугольников заменить площадями пар-мов. Найдем площадь параллелограмма с пом. вект. произв-я. Получим сумму.

$$\hat{\sigma} = \sum_i |\bar{r}_u(u_i, v_i) \times r_v(u_i, v_i)| \, \Delta u_i \, \Delta v_i$$

При переходе к пределу получим дв. $\int$-л

$$\mu(S) = \iint\limits_G |\bar{r}_u(u, v) \times r_v(u, v)| \, du \, dv$$

Точный рез-т в теореме.

Теор. Пусть поверхность задана парам. ур-ями

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v), \end{cases}$$

где ф-и φ, ψ, χ непр-но диф-мы в обл. G, причем ранг матрицы Якоби отобр-я в каждой точке G равен 2. Тогда для пов-ти S определена площадь $\mu(S)$, кот. м.б. вычислена по ф-ле:

$$\mu(S) = \iint\limits_G |\bar{r}_u(u, v) \times \bar{r}_v(u, v)| \, du \, dv. \quad \square$$

Пример. Рассмотрим сферу рад. R. В сферит. координатах она задаётся ур-ями

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta. \end{cases}$$

Касат. векторы:

$$\bar{r}_\theta = R(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)^T;$$

$$\bar{r}_\varphi = R(-\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ 0)^T$$

Поэтому площадь сферы равна

$$\mu(S) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |\bar{r}_\theta \times \bar{r}_\varphi|\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} R^2 \sin\theta\, d\theta =$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi R^2.$$

Замечание. Если пов-ть представляет собой график некоторой ФДП $z = f(x,y)$, то в кач-ве координат на пов-ти удобно взять простр. коор-ты x и y. Тогда $r_x = (1; 0; f'_x)$, $r_y = (0; 1; f'_y)$. Их векторное произв-е равно

$$\bar{r}_x \times \bar{r}_y = (-f'_x,\ -f'_y,\ 1)$$

Значит, если f непр-но диф-мо, то её график над измеримой G имеет ~~вид~~ площадь

$$S = \iint_G \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\, dx\,dy.$$

§ 4.2 Поверхностный интеграл I рода

Пусть пов-ть S измерима по Жордану, на ней задана некоторая непр ф-я f. Разобьем поверхность на измеримые эл-ты ΔS_i. В каждом эл-те выберем т. N_i и составим сумму

$$\sigma(T) = \sum_i f(N_i)\,\mu(\Delta S_i),$$

кот. наз. интегральной. Если сущ-ет предел инт. сумм при диаметре разбиения $\to 0$, не зависящей от выбора разбиения, то этот предел наз. поверхностным интегралом и обозн.

$$\iint\limits_S f(M)\,ds$$

Теор (вычисление поверхн. интеграла). Пусть пов-ть S задана пар-ми уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v), \end{cases}$$

причем ф-и φ, ψ, χ непр диф-мы на G, а ранг матрицы Якоби отобр-я в каждой точке обл. G равен 2. Тогда для любой непр. ф-и f, опр-ной на S, существует поверхностный интеграл, кот. м.б. вычислен по формуле

$$\iint\limits_S f(M)\,ds = \iint\limits_G f\big(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)\big)\,|\bar r_u(u,v)\times \bar r_v(u,v)|\,du\,dv. \ \square$$

Замечание. Если пов-ть явл. графиком непр-но диф-мой ф-и $z = \varphi(x,y)$, то

$$\iint\limits_S f(M)\,ds = \iint\limits_G f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,du\,dv$$

Поверхностный интеграл явл. двум. аналогом криволин. $\int$-ла 1-го рода и поэтому схож по своим свойствам:
1) Линейность,
2) Аддитивность,
3) Теорема об оценке

Упражнения

① На сколько отличаются друг от друга поверхностные интегралы

$$I_1 = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dS \quad \text{и} \quad I_2 = \iint\limits_P (x^2+y^2+z^2)\,dP,$$

где S — поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ и P — поверхность октаэдра $|x|+|y|+|z|=|a|$, вписанного в эту сферу?

Решение: 1) Вычислим I_1.

Параметризация пов-ти:
$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi \\ z = a\cos\theta, \quad \theta\in[0;\pi], \\ \qquad \varphi\in[0;2\pi]. \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=a^2$

Вычислим касат. в-ры:

$$\bar r_\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta};\ \frac{\partial y}{\partial\theta};\ \frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^T = (a\cos\theta\cos\varphi;\ a\cos\theta\sin\varphi;\ -a\sin\theta)^T;$$

$$\bar r_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi};\ \frac{\partial y}{\partial\varphi};\ \frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^T = (-a\sin\theta\sin\varphi;\ \sin\theta\cos\varphi;\ \theta)^T$$

$$\bar r_\theta\times\bar r_\varphi = a^2\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\bar i\,(a^2\sin^2\theta\cos\varphi) +$$

$$+\bar j\,(a^2\sin^2\theta\sin\varphi) + \bar k\,(a^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + a^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi)$$

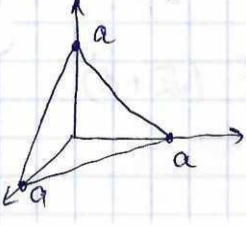
$$\Rightarrow |\bar r_\theta\times\bar r_\varphi| = \sqrt{a^4\sin^4\theta\cos^2\varphi + a^4\sin^4\theta\sin^2\varphi + a^4\sin^2\theta\cos^2\theta} =$$

$$= \sqrt{a^4\sin^2\theta\,(\sin^2\theta+\cos^2\theta)} = a^2\sin\theta \quad (\text{т.к. } \sin\theta>0).$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} a^2\sin\theta\cdot a^2\,d\varphi = a^4\cdot\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta}_{=2}\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{=2\pi} = 4\pi a^4$$

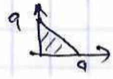
2) Вычислим I_2.

В силу симметрии и пов-ти, и подынтегр. ф-и заметим, что дост-но выч-ть только пов-ный $\int$-л через плоскость $x+y+z=a$ и умножить на 8.



Ур-е плоскости: $x+y+z=a \Rightarrow z=a-x-y$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt3.$$



$0\le x\le a, \quad 0\le y\le a-x$

13.1

$$I_2 = 8\int_0^a dx \int_0^{a-x} \left(x^2+y^2+(a-x-y)^2\right) dy = 8\sqrt{3}\int_0^a dx \cdot \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} - \frac{(a-x-y)^3}{3}\right)\Bigg|_0^{a-x} =$$

$$= 8\sqrt{3}\int_0^a \Big(\underbrace{x^2(a-x)}_{ax^2-x^3} + \frac{(a-x)^3}{3} + \frac{(a-x)^3}{3}\Big) dx = 8\sqrt{3}\cdot\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}\cdot\frac{(a-x)^4}{4}\right)\Bigg|_0^a =$$

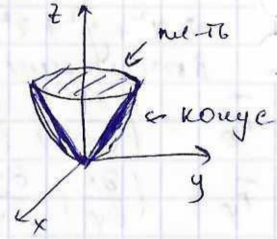
$$= 8\sqrt{3}\left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{6}\right) = 8\sqrt{3}\cdot\frac{a^4}{4} = 2\sqrt{3}\,a^4$$

$$\Rightarrow I_1 - I_2 = \underbrace{(4\pi - 2\sqrt{3})}_{\approx 9.1}\, a^4.$$

(2) Вычислить поверхностный $\int$-л I рода

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dS, \text{ где } S - \text{граница}$$

тела $\underset{\text{конус}}{\sqrt{x^2+y^2}} \le z \le \underset{\text{пл-ть}}{1}$



1) параметризация для конуса:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = r \end{cases}$$

$$\bar{r}_r = \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right)^T = (\cos\varphi; \sin\varphi; 1)^T$$

$$\bar{r}_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}; \frac{\partial y}{\partial \varphi}; \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^T = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)^T$$

$$\bar{r}_r \times \bar{r}_\varphi = -r\cos\varphi\cdot\bar{i} - r\sin\varphi\cdot\bar{j} + r\cdot\bar{k}$$

$$|\bar{r}_r \times \bar{r}_\varphi| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + r^2} = r\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3\sqrt{2}\,dr = \sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

2) параметризация для плоскости:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = 1 \end{cases}, \quad |\bar{r}_r \times \bar{r}_\varphi| = r.$$

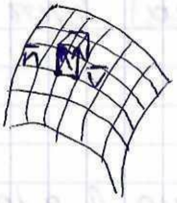
$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3\,dr = 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \iint_S (x^2+y^2)\,dS = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1).$$

13.2

§ 73 Поверхностный интеграл 2-го рода

Пусть в ~~поверхности~~ прост-ве задано поле скоростей жидкости. Выберем пов-ть S в пр-ве и предположим, что в каждой точке $M \in S$ задан единичный вектор $\bar{n}(m)$ нормали к пов-ти, причем вектор-ф-я $\bar{n}(m)$ непр. на пов-ти S. Построим разбиение S на элементы ΔS_i, в каждом эл-те выберем т. N_i. Если эл-т ΔS_i дост-но мал, то перенос жидкости через этот элемент прибл-но равен скал. произв-но $\rho \cdot \mu(\Delta S_i) \bar{v}(N_i) \bar{n}(N_i)$ вектора скорости $\bar{v}(N_i)$ на вектор нормали $\bar{n}(N_i)$ частиц жидкости в растоянии ΔS_i, умнож. на площадь эл-та разбиения $\mu(\Delta S_i)$ и плотность ρ. Суммируя рез-ты по всем эл-там разбиения, получим интегр. сумму



$$\sigma = \rho \sum_i \bar{v}(N_i)\, \bar{n}(N_i) \mu(\Delta S_i)$$

В пределе при диаметре разбиения $\to 0$ получим

$$M = \rho \iint_S \bar{v}\, \bar{n}\, dS$$

Полагая, что $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ выражен через свои направл. косинусы; $\bar{v} = (P, Q, R)$ записан в координатах, получим коорд. представл-е последнего интеграла:

$$M = \rho \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS$$

Конечно, не для всякой пов-ти можно однозначно выбрать нормаль (лист Мёбиуса). Этот интеграл корректно определен только для двусторонних поверхностей.

Кроме того, по-разному м. б. выбрана сторона пов-ти (ориентация). Значит, интеграл берется по ориентир. поверхностям.

Его называют поверхностным интегралом 2-го рода.

§8.4 Вычисление поверхн. интеграла 2-го рода

При выч-и пов. интеграла 2-го рода следует учесть, что выбор координат на пов-ти означает и выбор её ориентации, т.к. $\bar{r}_u \times \bar{r}_v$ нормальна к пов-ти. В рез-те

$$\iint_S \bar{v}\,\bar{n}\,dS = \iint_S \bar{v}\,\frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|}\,dS = \iint_S v(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)\,du\,dv =$$

$$= \iint_S \underbrace{\begin{pmatrix} P & Q & R \\ \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix}}_{\text{смешанное произв-е векторов}} du\,dv$$

Наиболее просто пов. интеграл считается тогда, когда коор-тами на пов-ти явл. x и y.

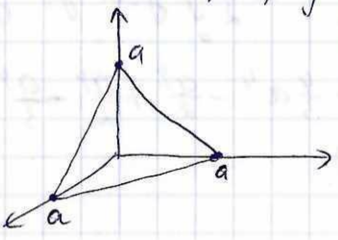
Тогда
$$\iint_S R\cos\gamma\,dS = \iint_S R\cos\gamma\,\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} = \pm \iint_{пр_{Oxy} S} R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$$

В интеграле выбирается знак "+", если угол между $\bar{n}$ и Oz острый, и "−" в противоп. случае. Поэтому для этого интеграла исп-ся обозн-е
$$\iint_S R\cos\gamma\,dS = \iint_S R\,dx\,dy.$$

Учитывая остальные составляющие, получим
$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy$$

Упражнения

① Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода
$$\iint_S yz\,dy\,dz + xz\,dz\,dx + xy\,dx\,dy,$$
S − ~~верхняя~~ внешняя сторона пов-ти тетраэдра:
$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=a.$$



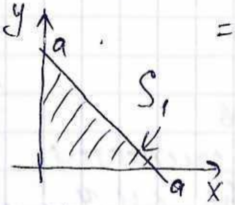
~~[illegible]~~ а) $x+y+z=a \Rightarrow$
$$\Rightarrow \bar{n} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \text{ − внешняя нормаль}$$

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iint_S \left(\frac{yz}{\sqrt{3}} + \frac{xz}{\sqrt{3}} + \frac{xy}{\sqrt{3}}\right) dS \ominus$$

$$dS = \frac{dS_1}{|\cos\gamma|} = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{3}\,dxdy$$

$$\ominus \iint_{S_1} (y(a-y-x) + x(a-y-x) + xy)\,dxdy =$$



$$= \iint_{S_1} (ay - y^2 - xy + ax - xy - x^2 + xy)\,dxdy =$$

$$= \iint_{S_1} (a(y+x) - (x^2+y^2) - xy)\,dxdy$$

б) $z=0$: $\vec{n} = \{0;0;-1\}$

$$\Rightarrow -\iint_S xy\,dS = -\iint_{S_1} xy\,dxdy$$

в) $x=0$; $\vec{n} = \{-1;0;0\}$

$$\Rightarrow -\iint_{S_2} yz\,dydz$$

г) $y=0$; $\vec{n} = \{0;-1;0\}$

$$\Rightarrow -\iint_{S_1} xz\,dzdx$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} (y(a-y-x) + x(a-y-x) + xy)\,dxdy - \iint_{S_1} xy\,dxdy -$$

$$- \iint_{S_1} yz\,dydz - \iint_{S_1} xz\,dxdz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (ay - y^2 - 2xy + ax - x^2)\,dy -$$

$$- \int_0^a dy \int_0^{a-y} yz\,dz - \int_0^a dx \int_0^{a-x} zx\,dz =$$

$$= \int_0^a dx \left(\frac{ay^2}{2} - \frac{y^3}{3} - xy^2 + axy - x^2y\right)\Big|_0^{a-x} - \frac{1}{2}\int_0^a y(a-y)^2\,dy -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^a x(a-x)^2\,dx = \ldots = \frac{a^4}{12} - a^4 + \frac{4}{3}a^4 - \frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{3} -$$

$$- \frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{4} = 0.$$