Лекция 8. Основы теории поля

§1. Формула Стокса

Эта формула связывает поверхностный интеграл 2-го рода с криволинейным.

Пусть S — двусторонняя поверхность, γ — простой контур на этой поверхности. Он ограничивает часть поверхности. Будем считать, что ограничиваемая им часть поверхности находится слева от него (обозн.: $\operatorname{int}\gamma$)

Теор. (формула Стокса). Если функции P, Q, R определены на поверхности S и непрерывно дифференцируемы, то для простого гладкого контура $\gamma \in S$ верно равенство

$$\oint\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\operatorname{int}\gamma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Д-во: В силу симметрии достаточно доказать формулу:

$$\oint\limits_{\gamma} P\,dx = \iint\limits_{\operatorname{int}\gamma} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Кроме того, эта формула также аддитивна, т.е. если она верна для каждой из нескольких подобластей, на кот. разделена $\operatorname{int}\gamma$, то она верна и для всей области: поверхностные интегралы по прилегающим областям складываются, а криволинейные интегралы по границам областей взаимно уничтожаются, т.к. проходят дважды в противоположных направлениях (как в формуле Грина). Таким образом, можно ограничиться случаем, когда поверхность задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in G$$

Т.к. соответствие м/у поверхностью S и областью G переменных (u,v) явл. взаимно однозначным и непр. дифференцируемым, контуру γ соотв-ет контур C в пл-ти (u,v), кот. описывается ф-ями $u(t)$, $v(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$.
Интеграл по контуру γ переходит в интеграл по контуру C:

$$\oint_\gamma P\,dx = \int_\alpha^\beta P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta P(x(t), y(t), z(t))\,(x'_u u'_t + y'_v v'_t)\,dt =$$

$$= \int_C P(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))\,\varphi'_u\,du +$$

$$+ P(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))\,\varphi'_v\,dv.$$

Поверхностный интеграл по $\operatorname{int}\gamma$ также преобразуется в двойной интеграл по $\operatorname{int} C$:

$$\iint_{\operatorname{int}\gamma} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx = \iint_{\operatorname{int} C} \begin{pmatrix} 0 & P'_z & -P'_y \\ \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix} du\,dv$$

Применение формулы Грина для $\oint P\,dx$ и $\iint_{\operatorname{int}\gamma} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$ дает равенство этих частей. ∎

<u>Следствие.</u> Если всюду в односвязной области $G \subset R^3$ выполняются условия

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

то значение интеграла $\int_A^B P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не зависит от пути, соединяющего точки A и B и целиком лежащего в G.

<u>Д-во</u>: Достаточно показать, что интеграл по любому замкнутому контуру в G равен 0. Пусть γ – простой контур, который ограничивает поверхность S, целиком лежащую в G, а для ф-й P, Q, R вып. усл-е выше. Тогда по формуле Стокса интеграл по γ равен 0.

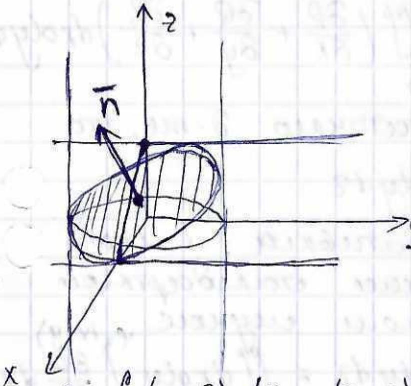
2 <u>Замечание.</u> Область в $\mathbb{R}^3$ считается односвязной, если любой простой контур явл. границей некоторой поверхности в этой области.

Упражнения

① Вычислить криволинейный интеграл с помощью формулы Стокса:

$$\oint_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz,$$

где C – эллипс $x^2+y^2=1$, $x+z=1$.



Решение:

$P = y-z$; $Q = z-x$; $R = x-y$.

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -1 - 1 = -2;$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -1 - 1 = -2;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 - 1 = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz = \iint_{\mathrm{int}C} -2\,dy\,dx - 2\,dz\,dx - 2\,dx\,dy \boxed{=}$$

$\overline{n} = \left\{\frac{1}{\sqrt2}; 0; \frac{1}{\sqrt2}\right\}$ – нормаль к плоскости $x+z=1$ (поверхность целиком лежит в этой плоскости)

$$\Rightarrow \boxed{=} \iint_{\mathrm{int}C} \left(-\frac{2}{\sqrt2} - \frac{2}{\sqrt2}\right) dS = \iint_{\mathrm{int}C} (-2\sqrt2)\frac{dS_1}{|\cos\gamma|} \boxed{=},$$

где γ – угол м/у пов-тью S и её проекцией на плоскость xoy. $|\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{=} \iint_{(\mathrm{int}C)'} -2\sqrt2\cdot\sqrt2\,dx\,dy = -4\underbrace{\iint_{(\mathrm{int}C)'} dx\,dy}_{=\text{ площадь круга } x^2+y^2=1} = -4\pi.$$

Проверка без формулы Стокса:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1-\cos t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi)$$ (параметризация контура C) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \oint_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz = \int_0^{2\pi} (\sin t - 1 + \cos t)(-\sin t\,dt)$$

$$+ (1-\cos t-\cos t)\cos t\,dt + (\cos t - \sin t)\sin t\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\cos^2 t - 2\sin^2 t)\,dt = -2\int_0^{2\pi} dt = -4\pi.$$

§2. Формула Остроградского-Гаусса

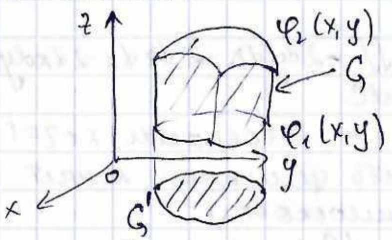
Теор. (формула Остроградского-Гаусса). Пусть трехмерная область G ограничена гладкой поверхностью S. Если функции P, Q, R определены и непрерывно дифференцируемы в G и на S, то

$$\oint\!\!\!\oint_S P\,dydz + Q\,dz\,dx + R\,dxdy = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

Д-во: В силу симметрии достаточно д-ть, что

$$\oint\!\!\!\oint_S R\,dxdy = \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz.$$

Формула Остроградского аддитивна, и мы можем ограничиться случаем стандартной области.



В этом случае

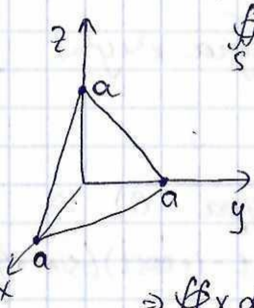
$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint_{G'} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint_{G'} \left(R(x,y,\varphi_2(x,y)) - R(x,y,\varphi_1(x,y))\right)dxdy =$$

$$= \oint\!\!\!\oint_S R(x,y,z)\,dxdy,$$ где G' - проекция G на плоскость xOy. ∎

Упражнения

① Вычислить поверхностный интеграл с помощью формулы Остроградского-Гаусса:



$$\oint\!\!\!\oint_S x\,dydz + y\,dz\,dx + z\,dxdy,$$ где

S - наружная сторона пирамиды, огр. пов-тями $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение: $P = x$, $Q = y$, $R = z$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint\!\!\!\oint_S x\,dydz + y\,dz\,dx + z\,dxdy = \iiint_V 3\,dxdydz =$$

$$= 3 \cdot \underbrace{\iiint_V dxdydz}_{\text{объем тетр.}} = 3 \cdot \frac{1}{6}a^3 = \frac{a^3}{2}.$$

(+) Можно вспомнить упр. 1 из §4 пред. лекции

Основы теории поля

§3. Скалярное и векторное поле

Опр. Если каждой точке области $G \subset \mathbb{R}^3$ поставлено в соответствие число, то говорят, что в G задано скалярное поле.

Т.о., скал. поле — ф-я трех арг-тов $f(x, y, z)$.

Опр. Если каждой точке области $G \subset \mathbb{R}^3$ поставлен в соотв-е вектор, то говорят, что в G задано векторное поле.

Т.о., вект. поле — вект. ф-я трех аргументов: $(P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z))^T$

Для описания скалярных полей в пространстве используют поверхности уровня.

Опр. Поверхностью уровня скалярного поля $f(x, y, z)$ наз. геометрическое место точек, определяемых уравнением $f(x, y, z) = C$ (для различных C).

Через каждую точку области G проходит поверхность уровня, причем только одна.

Опр. Градиентом скалярного поля $f(x, y, z)$ наз. векторное поле $(f'_x,\ f'_y,\ f'_z)$. обозн.: $\operatorname{grad} f$.

Градиент скалярного поля показывает направление роста функции f и в каждой точке перпендикулярен поверхности уровня.

Для описания векторных полей в пространстве используют векторные линии и вект. трубки.

Опр. Векторной линией векторного поля наз. линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением векторного поля.

Т.о., если векторное поле представляет собой поле скоростей текущей жидкости, то векторная линия есть траектория движения частиц этой жидкости.

Выведем уравнение векторных линий.

Пусть в области G задано векторное поле $\overline{v}$. Пусть в G кривая γ задана пар-ки

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta].$$

Тогда вектор (x'_t, y'_t, z'_t) — касательный вектор к кривой γ. Если γ — векторная линия $\overline{v}$, то вектор $\overline{v}(x(t), y(t), z(t))$ касателен к γ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow (x'_t, y'_t, z'_t) \parallel \overline{v}(x(t), y(t), z(t))$. Запишем условие коллинеарности:

$$\left.\begin{aligned} x'_t &= \lambda v_x(x(t), y(t), z(t)) \\ y'_t &= \lambda v_y(x(t), y(t), z(t)) \\ z'_t &= \lambda v_z(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{кривая } \gamma \text{ явл. решением}$$

системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'_t = \lambda v_x(x, y, z) \\ y'_t = \lambda v_y(x, y, z) \\ z'_t = \lambda v_z(x, y, z) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}}}_{\text{в.л. } \overline{v}} \text{ (в симм. форме)}$$

<u>Опр.</u> Векторной поверхностью S наз. такую поверхность, что в каждой точке S вектор $\overline{v}$ касается её.

Если векторная линия начинается на этой пов-ти, она все время остаётся на ней. Если выбрать кривую γ (не векторную линию) и провести вект. линии через каждую точку γ, то получим векторную поверхность.

<u>Опр.</u> Если кривая γ представляет собой простой контур, то построенную таким образом векторную поверхность наз. <u>векторной трубкой</u>.

<u>Упражнения</u>

1. Вычислить градиент скалярных полей

а) $|\overline{r}|$

Решение: $f(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

$f'_x = x/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $f'_y = y/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $f'_z = z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$\Rightarrow \operatorname{grad}|\overline{r}| = (f'_x; f'_y; f'_z) = \dfrac{\overline{r}}{|\overline{r}|}$.

б) $|\overline{r}|^2 \quad (2\overline{r})$.

в) $f(|\bar{r}|) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$;

$$f'_x = f'_r \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ f'_y = f'_r \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ f'_z = f'_r \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(|\bar{r}|) = f'_r \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}.$$

② Показать, что векторными линиями векторного поля $a(P) = \bar{c}$, где $\bar{c}$ – постоянный вектор, являются прямые, параллельные $\bar{c}$.

Решение: Пусть $\bar{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$.

Тогда уравнения векторных линий им. вид

$$\frac{dx}{c_1} = \frac{dy}{c_2} = \frac{dz}{c_3} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = c_1 \\ \dot{y} = c_2 \\ \dot{z} = c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 t + \tilde{c}_1 \\ y = c_2 t + \tilde{c}_2 \\ z = c_3 t + \tilde{c}_3 \end{cases} -$$

уравнения прямой в парам. виде. Канонические уравнения такой прямой:

$$\frac{x-\tilde{c}_1}{c_1} = \frac{y-\tilde{c}_2}{c_2} = \frac{z-\tilde{c}_3}{c_3} \text{ – прямая, } \parallel\text{-ная } \{c_1; c_2; c_3\}.$$

③ Доказать некоторые свойства градиента:

а) $\operatorname{grad}(c_1 u + c_2 v) = c_1 \operatorname{grad} u + c_2 \operatorname{grad} v$

$$\operatorname{grad}(c_1 u + c_2 v) = \frac{\partial(c_1 u + c_2 v)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial(c_1 u + c_2 v)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial(c_1 u + c_2 v)}{\partial z}\bar{k} = c_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right) + c_2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\bar{k}\right) = c_1 \operatorname{grad} u + c_2 \operatorname{grad} v$$

б) $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$

$$\operatorname{grad}(uv) = \frac{\partial(uv)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial(uv)}{\partial z}\bar{k} =$$

$$= \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bar{i} + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bar{j} + \left(u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\bar{k} =$$

$$= u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\bar{k}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right) = \ldots$$

в) $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v)$

г) $\operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad} u$

д) $\operatorname{grad} \varphi(u) = \varphi'_u \operatorname{grad} u$

§ 4. Линейный интеграл и поток

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\bar a$ с координатами a_x, a_y, a_z в данной системе координат.

Опр. Линейным интегралом в.п. $\bar a$ наз. криволинейный интеграл

$$\int_\gamma a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz = \int_\gamma \bar a\, d\bar r$$

Новая форма записи подчеркивает физическую интерпретацию интеграла как работу силового поля $\bar a$ при перемещении материальной точки единичной массы.

Опр. Если кривая γ замкнута, то линейный интеграл $\oint a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz$ наз. циркуляцией векторного поля $\bar a$.

Опр. Поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S a_x\,dy\,dz + a_y\,dz\,dx + a_z\,dx\,dy = \iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,dS$$

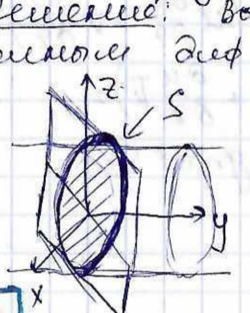
наз. потоком векторного поля $\bar a$ через поверхность S

Физический смысл потока: количество жидкости, протекающей через площадку, если $\bar a$ — поле скоростей текущей жидкости.

Упражнения

① Найти циркуляцию в.п. $\bar a = \{x; y; z\}$ по контуру γ: $x^2+z^2=1$, $x=y$, а также поток через поверхность S, огр. этим контуром.

Решение: выражение $x\,dx + y\,dy + z\,dz$ явл. полным диф-лом $\Rightarrow \oint_\gamma \bar a\, d\bar r = 0$.



Вычислим поток в.п. $\bar a$:

$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy \boxed{=}$$

$$\bar n = \left\{\frac{1}{\sqrt2}; -\frac{1}{\sqrt2}; 0\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{=} \iint_{S'} \left(\frac{x}{\sqrt2} - \frac{y}{\sqrt2}\right)\frac{dS'}{|\cos\beta|} = \iint_{S'} (x-y)\,dz\,dx = 0 \ (\text{т.к. } y=x).$$

проецируем на xOz

§5. Вихрь и формула Стокса

Циркуляция явл. протяженной характеристикой, но если контур очень мал, то она характеризует поведение векторного поля в окрестности точки. Пусть контур γ расположен в плоскости с единичным вектором нормали $\bar{n}$. Тогда по формуле Стокса:

$$\oint_\gamma \bar{a}\,d\bar{r} = \oint_\gamma a_x dx + a_y dy + a_z dz = \iint_{int\gamma}\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)n_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)n_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)n_z\right]dS.$$

При фиксированном $\bar{n}$ полученный поверхностный интеграл имеет предел при стягивании контура в точку, равный скалярному произведению $\bar{b}\bar{n}$ вектора

$$\bar{b} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k}$$

на вектор нормали $\bar{n}$.

Опр. Вектор $\bar{b}$ в теории поля наз. вихрем или ротором векторного поля $\bar{a}$.

Обозн.: $\bar{b} = \operatorname{rot}\bar{a}$.

Вихрь в.п. $\bar{a}$ м.б. вычислен по ф-ле:

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

где "умножение" $\frac{\partial}{\partial x}$ на a_y означает взятие частной производной $\partial a_y/\partial x$.

Вихрь определен в коорд. форме, но выбор системы координат не явл. существенным, т.к. проекция этого вектора

$$(\operatorname{rot}\bar{a})_{\bar{n}} = \lim_{\mu(S_n)\to 0}\frac{\oint_{\partial S_n}\bar{a}\,d\bar{r}}{\mu(S_n)},$$

где S_n - площадка, $\perp$-ная вектору $\bar{n}$, не зависит от какой-либо системы координат.

С учетом новых обозначений формула Стокса принимает вид

$$\oint_\gamma \bar{a}\,d\bar{r} = \iint_{int\gamma}\bar{n}\operatorname{rot}\bar{a}\,dS$$

§6. Дивергенция и формула Остроградского-Гаусса

Поток также является протяженной характеристикой, но в пределе приводит к локальному свойству.

Пусть в. п. $\bar{a}$ гладко в области G. Выберем в G некоторый объем, ограниченный гладкой поверхностью ∂V. Применим к нему ф-лу Остроградского:

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial V} \bar{a}\bar{n}\, dS = \oint\!\!\!\oint_{\partial V} a_x\, dy dz + a_y\, dz dx + a_z\, dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

В пределе, когда диаметр объема V стремится к нулю, полученный тройной интеграл сводится к значению подынтегр. функции, если эта функция непр.

Опр. Величина $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$, вычисл. в точке, наз. дивергенцией в. п. $\bar{a}$ в этой точке.

Обозн.: $\operatorname{div} \bar{a}$

Из формулы Остроградского вытекает другое определение дивергенции: дивергенция $\operatorname{div}\bar{a}$ — это число, равное $\operatorname{div}\bar{a} = \lim\limits_{V \to 0} \frac{\oint\!\!\oint_{\partial V} \bar{a}\cdot\bar{n}\, dS}{\mu(V)}$ (поток на единицу объема). Т.о. дивергенция не зависит от выбора с-ы координат.

С учетом введенного понятия формула Остроградского-Гаусса принимает вид

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial V} \bar{a}\bar{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\bar{a}\, dV,$$

где dV - дифференциал объема, т.е. $dV = dx dy dz$.

§7. Векторные дифференциальные операции второго порядка

В результате вычисления вихря и дивергенции от некоторых векторных полей получаются другие поля, к кот. можно применять различные операции. Иногда применение операций приводит к интересным рез-там.

(1) Если исходный объект — скалярное поле f, к нему можно применить только одну операцию: градиент, в рез-те кот. получается векторное поле. Далее возможны 2 случая:

а) вторая операция — ротор

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = \bar{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) -$$

$$- \bar{j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = 0.$$

б) вторая операция — дивергенция

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \frac{\partial f'_x}{\partial x} + \frac{\partial f'_y}{\partial y} + \frac{\partial f'_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$$

В результате получаем оператор Лапласа.

Опр. Функцию f, для кот. $\Delta f = 0$, наз. гармонической.

(2) Если исходный объект — векторное поле, к нему можно применить 2 операции: дивергенцию (в результате получится скалярное поле) и ротор (в результате получится векторное поле). Таким образом, возможны 3 случая:

а) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a}$

Получаем некоторое новое в. п.

б) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}$

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \bar{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) +$$

$$+ \bar{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = 0.$$

в) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a}$

Получается некоторое новое векторное поле

Диф. операторы теории поля удобно записывать с помощью оператора Гамильтона:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Применение оператора Гамильтона можно трактовать как умножение:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f, \quad \operatorname{div} \bar{a} = \nabla \bar{a},$$

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \nabla \times \bar{a}, \quad \Delta f = \nabla \nabla f = \nabla^2 f$$

Диф. операции второго порядка:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla) f = 0$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a} = \nabla (\nabla \times \bar{a}) = (\nabla \times \nabla) \bar{a} = 0$$

Операции согласуются с векторным, скалярным и смешанным произведением. Известна формула: $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\bar{b})\bar{c}$.

Получаем соотношение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a} = \nabla \times (\nabla \times \bar{a}) = \nabla(\nabla \bar{a}) - \nabla^2 \bar{a} =$$

$$= \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a} - \Delta \bar{a},$$

где применение оператора Лапласа к векторному полю $\bar{a}$ выполняется покомпонентно:

$$\Delta \bar{a} = (\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z).$$

Получили связь м/у двумя дифференциальными операциями второго порядка, опираясь на формулу векторной алгебры.