Лекция 9. Специальные векторные поля. Подготовка к КР

§1. Потенциальное поле

Опр. Потенциальным наз. векторное поле $\bar{a}$, которое может быть представлено как градиент некоторого скалярного поля: $\bar{a} = \operatorname{grad} f$. В этом случае скалярное поле f наз. потенциалом векторного поля a.

Из св-в диф. операций для потенциального поля получаем: $\operatorname{rot}\bar{a} = \operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$. Т.о., условие $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$ явл. необходимым условием того, чтобы в.п. $\bar{a}$ было потенциальным.

Если $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ – потенциальное векторное поле, то выражение $a_x dx + a_y dy + a_z dz$ явл. полным дифф-лом. Из св-в криволинейного интеграла получаем эквивалентность ряда условий:

1) криволин. интеграл $\int a_x dx + a_y dy + a_z dz$ не зависит от пути;
2) криволин. интеграл $\oint a_x dx + a_y dy + a_z dz$ по любому контуру равен 0;
3) дифференциал $a_x dx + a_y dy + a_z dz$ явл. полным;
4) линейный интеграл $\int \bar{a}\, d\bar{r}$ не зависит от пути
5) циркуляция $\oint \bar{a}\, d\bar{r}$ равна 0 по любому контуру
6) $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$.

Все эти условия экв-ны, если вект. поле $\bar{a}$ определено в односвязной области. При этом потенциал поля м.б. вычислен с помощью линейного интеграла $\int \bar{a}\, d\bar{r}$ с переменным верхним пределом.

Если в.п. – это поле сил, то потенциальность силового поля означает отсутствие внешних сил, а независимость лин. интеграла от пути означает, что от пути не зависит работа потенциального силового поля.

Потенц. поле характеризуется своим потенциалом, но потенциал определяется с точностью до некоторой постоянной. В случае неограниченной области потенциал выбирают так, что он равен 0 в ∞. Поверхности уровня потенциала наз. <u>эквипотенциальными поверхностями</u>.

§2. Соленоидальное поле

<u>Опр.</u> Векторное поле $\bar{a}$ наз. <u>соленоидальным</u>, если оно явл. вихрем некоторого вект. поля $\bar{b}$: $\bar{a} = \mathrm{rot}\,\bar{b}$. При этом вект. поле наз. <u>векторным потенциалом</u> поля $\bar{a}$.

Необх. условие такого соотн-е: $\mathrm{div}\,\bar{a} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\bar{b} = 0$. След-но, поток соленоидального поля через замкнутую пов-ть равен 0 (по ф-ле ~~Стокса~~ Острогр.-Гаусса). Если в.п. $\bar{a}$ представляет собой поле скоростей сплошной среды (жидкости), то поток этого в.п. через замкнутую поверхность характеризует суммарную мощность всех источников (или стоков).

Дивергенция есть точечная хар-ка распределения источников и стоков. В случае соленоидального поля источники и стоки отс-ют. Характерным примером такого поля явл. поле магнитной напряженности. Эта составляющая электромагнитного поля отличается тем, что не явл. порождением статических эл-тов типа статического электрического заряда. Отсутствие магнитных зарядов в природе с матем. точки зрения есть св-во соленоидальности поля магнитной напряженности.

Условие $\mathrm{div}\,\bar{a} = 0$ явл. необх. условием соленоидальности вект. поля $\bar{a}$. Для того, чтобы оно было достаточным, нужно, чтобы область определения поля G была <u>объемно</u> <u>односвязной</u>, т.е.

любая замкнутая поверхность в G ограничивала область, целиком леж. в G.

§3 Гармоническое поле.

Опр. Если вект. поле $\vec{a}$ явл. одновр-но и потенциальным, и соленоидальным, то его наз. гармоническим или лапласовым.

Т.к. $\vec{a}$ потенциально, оно описывается скалярным потенциалом u. Соленоидальность поля означает, что

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} \vec{a} = 0,$$

т.е. скалярный потенциал u удовл. ур-ю Лапласа $\Delta u = 0$. Такие ф-и наз. гармоническими.

Св-ва гармонических функций:

1) верна теорема о среднем: тройной интеграл от гармонической функции по шару, делённый на объем этого шара, равен значению гармон. функции в центре шара. Т.о, значение функций в центре шара совпадает со средним значением ф-и в шаре.

2) Из теор. о среднем следует, что гармон. ф-я не может иметь лок. экстремумов, т.к. тогда значение в точке экстремума д.б. больше любого близкого значения, а значит, и больше среднего.

3). Векторные линии гармон. поле не м.б. замкнутыми, т.к. циркуляция по таким линиям д.б. не нулевой. Они всегда начинаются и заканчиваются на границе области.

§7. Разложение поля на потенциальное и соленоидальное.

Теор. Любое поле $\bar{a}$ м.б. представлено в виде суммы двух полей $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, одно из которых ($\bar{a}_1$) явл. потенциальным, а второе – соленоидальным.

Д-во: Попробуем найти потенц. поле $\bar{a}_1$, кот. удовл. уравнению

$$\operatorname{div} \bar{a}_1 = \operatorname{div} \bar{a}.$$

Т.к. $\bar{a}_1$ потенциально, оно описывается скалярным потенциалом и, сводя уравнение к этому потенциалу, получим уравнение $\Delta u = \operatorname{div} \bar{a}$, кот. наз. уравнением Пуассона. Это ур-е всегда имеет реш-е (ур-я матем. физики). Т.о., и уравнение $\operatorname{div} \bar{a}_1 = \operatorname{div} \bar{a}$ имеет решение. Тогда в.п. $\bar{a}_2 = \bar{a} - \bar{a}_1$ удовл. соотношению $\operatorname{div} \bar{a}_2 = 0$, т.е. явл. соленоидальным. ∎

Подготовка к контрольной работе № 1
Кратные и криволинейные интегралы

4 задачи:

1) Вычисление двойного $\int$-ла / площади;
Смена пределов $\int$-я в повт. $\int$-ле
Замена переменных в дв. $\int$-ле
2) Вычисление тройного $\int$-ла / объема тела
сведение тройного $\int$-ла к повторному
Замена переменных в тройном $\int$-ле
3) Вычисление криволин. $\int$-ла 1 рода
вычисление криволин. $\int$-ла 2 рода / крив. $\int$-ла по замкн. контуру / циркуляции в.п.
Вычисление криволин. $\int$-ла с пом. ф. Грина
Вычисление поверх. $\int$-ла 2 рода;
Вычисление поверх. $\int$-ла через замкн. пов-ть / потока в.п. через замкн. пов-ть с пом. ф. О.-Г.
4) Д-ть, что в.п. явл. потенциальным и найти его потенциал
Д-ть, что крив. $\int$-л не зависит от пути $\int$-я и вычислить его
Д-ть, что в.п. явл. гармоническим

Примеры задач

① В повторном интеграле $\int_{-2}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{-x}} f(x,y)\,dy$ изменить порядок $\int$-я. Сделать чертеж.

② Вычислить дв. $\int$-л $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ по области D, огр. прямыми $y=x$, $y=-x$, $y=2$.

③ ~~С помощью замен~~ Перейти к полярным координатам в двойном интеграле:
$\iint_D (x^3y + xy^3)\,dx\,dy$, где D - область, огр. окружностью $x^2+y^2=4x$.

(4) Вычислить двойной $\int$-л, перейдя к полярным координатам: $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, где D – область, огр. окружностью $x^2+y^2=2y$.

---

(5) Вычислить интеграл $\iiint\limits_G x\,dx\,dy\,dz$ по области G, огр. поверхностями $x=0, y=0, y=h, z=0, x+z=a$.

(6) Вычислить объем тела, огр. поверхностями $y=x^2,\ z=0,\ z=1-y^2$.

(7) Вычислить интеграл $\iiint\limits_G \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$ по области G, ограниченной поверхностью $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

<u>Примечание.</u> $x=ar\cos\psi\cos\varphi$
$y=br\cos\psi\sin\varphi$
$z=cr\sin\varphi$, $\psi\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $\varphi\in[0;2\pi]$.

---

(8) Вычислить криволин. $\int$-л $\int\limits_C xy^2\,dS$, где C – дуга окр-ти $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

(9) Вычислить $\int\limits_L xy\,dy+y\,dx$ вдоль параболы $y=x^2$ от точки $O(0;0)$ до т. $A(1;1)$.
Или: выч-ть лин. $\int$-л. в.п. $\bar{a}=(xy;y;0)$...

(10) Вычислить крив. $\int$л по замкнутому контуру: $\oint\limits_L (x^2+y)\,dx+(y^2+x)\,dx$, где L – контур, образованный верхней частью окружности $x^2+y^2=1$ и участком прямых $x-y=1$ и $x+y=-1$ в положительном направлении
{Или: выч-ть циркуляцию в.п. ...}
Результат проверить с пом. ф. Грина

(11) Вычислить поток векторного поля $\bar{F} = (x^2; y^2; z^2)$ через замкн. поверхность, огран. пов-тями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+2y+3z=6$.

(12) Д-ть, что в. п.

$$\bar{F}(x,y,z) = (e^{x+y+z} + x)\bar{i} + (e^{x+y+z} + y)\bar{j} + + (e^{x+y+z} + z)\bar{k}$$

явл. потенциальным и найти его потенциал.

(13) Вычислить криволин. интеграл

$$\int_{(-1;2)}^{(1;0)} e^{xy}\left((xy+1)\,dx + x^2\,dy\right)$$

(14) Доказать, что криволин. интеграл по любому контуру γ равен 0:

$$\oint_{\gamma} (2x\cos y - 3)\,dx - x^2 \sin y\,dy$$

(15) Д-ть, что векторное поле явл. соленоидальным:

$$\bar{F} = (6xz + 2y)\bar{i} + 2x\bar{j} - 3z^2\bar{k} \;/$$

$$/\; \bar{F} = (z+y)\bar{i} + xy\bar{j} - xz\bar{k}$$

(16) Д-ть, что векторное поле явл. гармоническим

$$\bar{F} = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$$