Лекция 10. Числовые ряды.

§1. Основные понятия

Пусть $\{a_n\}$ - произвольная числовая последовательность. Запись этой последовательности в виде

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

наз. <u>числовым рядом</u>.

Основная задача числовых рядов: нахождение суммы слагаемых в некотором смысле.

<u>Опр.</u> сумма нескольких последов. членов ряда $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ наз. <u>частичной суммой</u>. Частичные суммы образуют последов-ть, кот. наз. последовательностью частичных сумм. Предел послед-ти частичных сумм, если он $\exists$, наз. <u>суммой ряда</u>. Т.о., под суммой ряда понимается предел

$$S = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right).$$

Если указанный предел $\exists$ и конечен, то говорят, что <u>ряд сходится</u>, в прот. случае - <u>расходится</u>.

Между послед-тями и рядами существует тесная связь: каждый ряд Σa_k генерирует последов-ть $\{S_n\}$ своих частичных сумм. Любая посл-ть $\{S_n\}$ явл. послед-тью частичных сумм некоторого ряда: $a_1 = S_1$; $a_n = S_n - S_{n-1}$. Сл-но, задачи опр-я суммы ряда и нахождения предела посл-ти явл. разными формулировками одной и той же задачи.

Если посл-ть членов ряда задаётся некоторой формулой, то эту формулу наз. <u>общим членом ряда</u>. Например, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ общий член имеет формулу $a_n = \frac{1}{n}$.

<u>Пример.</u> <u>Геометрич. прогрессией</u> наз. ряд, у кот. отношение двух соседних членов постоянно: $a_{n+1} / a_n = const = q$. Пар-р q наз. <u>знаменателем</u> прогрессии.

Общий член такого ряда задаётся ф-лой:
$a_n = c q^n$, где c — первый (или "нулевой") член ряда. n-я частичная сумма прогрессии:

$$S_n = c \sum_{k=1}^{n} q^k = c\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$\Rightarrow$ Ряд сходится при $|q|<1$ и расх. в прот. случае. Его суммой явл.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c q^n = \lim_{n\to\infty} c\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{c}{1-q}.$$

<u>Теор.</u> (<u>необходимый признак сходимости</u>). Если ряд $\sum a_k$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Д-во</u>: Если ряд сходится, то $\exists$ предел последовательности частичных сумм: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.
Тогда
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0. \blacksquare$$

<u>Пример</u>. Ряд $\sum (-1)^n$ расходится, т.к. $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$.

<u>Замечание</u>. Необходимый признак сход-ти не явл. достаточным. Например, <u>гармонический</u> ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, хотя необходимый признак выполнен. Действительно,

$$S_{2n} = S_n + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant S_n + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2}.$$

Поэтому, если $n = 2^p$, то $S_n > p/2$ $\Rightarrow$ посл-ть частичных сумм не имеет кон. предела.

<u>Теор.</u> (<u>об остатке</u>). Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ эквивалентна сход-ти ряда $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$. $\square$

<u>Опр.</u> Ряд, полученный отбрасыванием из данного ряда конечного числа первых слагаемых, наз. <u>остатком</u> исходного.
Посл-ть частичных сумм S_n д. ряда и посл-ть частичных сумм S'_l его остатка связаны соотношением: $S'_l = S_{k+l} - S_k$. При $l \to \infty$ обе части рав-ва имеют один и тот же предел или не имеют его вообще.

§ 2. Операции над рядами.

Опр. Произведением ряда $\sum a_n$ на число λ наз. ряд, получаемый умножением каждого члена ряда на λ, т.е. ряд $\sum \lambda a_n$.
Опр. Суммой двух рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$ наз. ряд $\sum (a_n + b_n)$.

Теор. (об операциях над рядами). При умножении ряда на число его сумма умножается на это число. При сложении двух рядов их суммы складываются:

1) $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$; 2) $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

Д-во. 1) Пусть $\{S_n\}$ - посл-ть частичных сумм ряда $\sum a_n$. Тогда посл-ть част. сумм ряда $\sum \lambda a_n$ равна:

$S_n' = \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k = \lambda S_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (S_n') = \lim_{n\to\infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Пусть $\{S_n\}$, $\{S_n'\}$ - посл-ти част. сумм рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$ соотв-но. Тогда посл-ть част. сумм ряда $\sum(a_n+b_n)$ равна

$S_n^+ = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n' + S_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n^+ = \lim_{n\to\infty} (S_n + S_n') = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} S_n' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. ■

Сформулированное утверждение обобщает обычные правила операций над числовыми выр-ями: св-ва коммутативности и дистрибутивности.

Операция сложения имеет обратную операцию вычитания.
Опр. Разностью $A - B$ двух рядов A и B наз. такой ряд C, что $B + C = A$.
Нетрудно убедиться, что разность рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$ явл. ряд $\sum(a_n - b_n)$. Суммой разности рядов явл. разность их сумм:

$\sum (a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n$.

§3. Знакоположительные числовые ряды

Особый интерес представляют ряды, все члены кот. имеют одинаковый знак, т.е. знакопостоянные ряды. Если этот знак '+', ряд наз. знакоположительным, иначе — знакоотрицательным. Знакоотриц. ряды легко сводятся к знакоположительным: дост-но такой ряд умножить на -1.
Все члены ряда положительны $\Leftrightarrow$ последовательность частичных сумм ряда монотонна. Если ряд не имеет нулевых слагаемых, то такая послед-ть строго монотонна.
Монотонная посл-ть всегда имеет предел (конечный или ∞). Конечность предела означает сходимость ряда. Т.о., по теор. о сходимости монотонной посл-ти получим, что для сходимости знакополож. ряда дост-но, чтобы последовательность его частичных сумм была огр.

Теор (первый признак сравнения). Пусть знакоположит. ряды $A = \sum a_n$ и $B = \sum b_n$ удовл. условию $a_n \le b_n$, $n = \overline{1, \infty}$. Тогда
1) Если ряд B сходится, то и ряд A сходится.
2) Если ряд A расх., то и ряд B расходится.

Д-во: обозначим через $\{S_n^A\}$ посл-ть част. сумм ряда A, через $\{S_n^B\}$ — ряда B.
1) Если ряд B сходится, то посл-ть $\{S_n^B\}$ огр. $\Rightarrow$ посл-ть $\{S_n^A\}$ огр $\Rightarrow$ ряд A сходится.
2) Если ряд A расх, то посл-ть $\{S_n^A\}$ не огр $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ посл-ть $\{S_n^B\}$ не огр $\Rightarrow$ ряд B расходится. ■

Замечание. Если для рядов $A = \sum a_n$ и $B = \sum b_n$ выполняется условие $a_n \le b_n$, $n = \overline{1,\infty}$, то ряд B наз. мажорирующим (мажорантой) для A. Будем обозначать это $A \le B$.

Теор (второй признак сравнения). Пусть для знакополож. рядов $A = \sum a_n$ и $B = \sum b_n$ существует конечный ненулев. предел

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0.$

Тогда ряд A сходится $\Leftrightarrow$ B сходится.

Д-во: Из усл-я $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = C$ следует, что последовательность a_n/b_n ограничена (т.к. она имеет конечный предел $\Rightarrow a_n/b_n \le C \Rightarrow$ ряд CB явл. мажорантой для A. Если ряд B сходится, то и CB сход $\Rightarrow$ по теор. о первом признаке сравнения сход. A.

Обратное тоже верно в силу симметричности условий для пары рядов A и B. ∎

Теор. (третий признак сравнения). Если $a_n \sim b_n$ при $n\to\infty$, то ряды $A = \sum a_n$ и $B = \sum b_n$ сходятся или расх. одновременно.

Д-во: $a_n \sim b_n$ при $n\to\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Rightarrow$ по второму признаку сравнения получаем треб. ∎

Пример Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}$ расх., т.к. $\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}} \sim \frac{1}{n}$ при $n\to\infty$.

Признаки сравнения позволяют решать задачу исследования сходимости ряда с помощью сравнения его с некоторым известным рядом. Однако ограничиться сравнением с одним "универсальным" рядом не удается.

Теор. Для любого сходящегося ряда $\sum a_n$ существует сход. ряд $\sum b_n$, для кот. $a_n = o(b_n)$ при $n\to\infty$. Для любого расходящегося ряда $\sum c_n$ существует расходящийся ряд $\sum d_n$, для кот. $d_n = o(c_n)$ при $n\to\infty$.

Д-во: Пусть $\sum a_n$ сходится. Положим

$$A_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,\ n=1,2,\dots;\quad b_n = \sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}},\ n=1,2,\dots$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sqrt{A_1} - \sqrt{A_{n+1}} \to \sqrt{A_1}$ при $n\to\infty$, т.е. ряд $\sum b_n$ сходится. При этом при $n\to\infty$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}}}{A_n - A_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{A_n} + \sqrt{A_{n+1}}} \to \infty \Rightarrow a_n = o(b_n).$$

Второе утв-е д-ся аналогично. Необходимо положить $d_n = \sqrt{C_{n+1}} - \sqrt{C_n}$, где C_n - част. сумма ряда $\sum c_n$. ∎

Теор. (радикальный признак Коши). Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, где $a_n\geq 0$, $n=1,2,\dots$, то
1) при $q<1$ ряд $\sum a_n$ сходится;
2) при $q>1$ ряд $\sum a_n$ расходится.

Д-во: 1) Если $q<1$, то выбрав произвольное число q', $q<q'<1$, заключаем, что начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n}<q'$. Тогда $a_n<(q')^n$, т.е. исходный ряд мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем $q'<1$, а потому сходится.
2) Если $q>1$, то, начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n}>1$ или $a_n>1$ $\Rightarrow$ необходимый признак сходимости не вып. $\Rightarrow$ ряд $\sum a_n$ расходится. ■

Теор. (признак Даламбера). Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, где $a_n\geq 0$, $n=1,2,\dots$, то
1) при $q<1$ ряд $\sum a_n$ сходится,
2) при $q>1$ ряд $\sum a_n$ расходится.

Д-во: самостоятельно (см. схему д-ва радикального признака Коши).

Пример. Ряд $\sum\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ сходится, т.к. по признаку Коши $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}<1$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ сходится, т.к. по признаку Даламбера
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=1/\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1/e<1.$

Теор. (интегральный признак Коши). Пусть ф-я $f(x)$ опр-на на пром-ке $[0;+\infty)$, неотрицательна и монотонно убывает на этом пром-ке. Тогда несобственный интеграл $\int^{+\infty}f(x)\,dx$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ сходятся или расходятся одновременно.

Д-во: В силу монотонности ф-и $f(x)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ имеем неравенства
$$f(n+1)\leq\int_n^{n+1}f(x)\,dx\leq f(n).$$

Складывая эти неравенства для различных значений n, получаем

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n+1) \le \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = \int_{0}^{N} f(x)\,dx$$

и

$$\int_{1}^{N} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то его частичные суммы ограничены. Значит, для нек. M верно

$$\int_{1}^{N} f(x)\,dx \le M.$$

Таким образом, функция $F(x) = \int_{1}^{x} f(x)\,dx$ монотонно возрастает, т.к. подынтегр. ф-я неотрицательна, причем $F(N) \le M$. Значит, $F(x)$ ограничена и имеет предел при $x \to +\infty$. Но $\exists$-е предела равносильно сходимости несобств. интеграла $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$.

Если сходится несобств. интеграл $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$, то функция, определенная равенством

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(x)\,dx,$$ ограничена.

Значит, ограничена посл-ть частичных сумм $S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n)$, что равносильно сходимости знакоположит. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. ■

<u>Замечание.</u> Если ф-я $f(x)$ опр-на, неотрицательна и убывает на пром-ке $[a; +\infty)$, для знакоположит. ряда $\sum a_n$ рав-во $a_n = f(n)$ выполняется, начиная с некоторого номера N, то утв-е пред. теор. остается в силе.

<u>Пример.</u> Исследуем на сходимость ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Если $p \le 0$, ряд расходится по необх. признаку. Поэтому пусть $p > 0$. В этом случае ф-я $f(x) = 1/x^p$ неотриц-на и монотонно убывает на пром-ке $[1; +\infty)$. Можно применить интегр. признак Коши:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\Bigg|_{1}^{+\infty} \begin{cases} \text{сходится при } p > 1, \\ \text{расходится при } p \le 1. \end{cases}$$

Ряд Дирихле сходится при $p > 1$, расх. при $p \le 1$.

Упражнения

(1) $1-1+1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots$

$\nexists \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$ – расх.

(2) $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\ldots$

$\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ сход $\Rightarrow$ сход.

(3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$, сравним с $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/2n}{1/n}=\frac{1}{2}$ – расх.

(4) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}+\ldots$

$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ при $n\to\infty$ $\Rightarrow$ расх.

(5) $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$

$\frac{2^n}{n}>\frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ расх. Можно ещё исп-ть необх. пр.

(6) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расх. (ряд Дирихле с $p<1$)

(7) $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\ldots+\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}+\ldots$

Признак Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n+1}=\frac{3}{4}<1$ $\Rightarrow$ сходится

(8) $\frac{2}{1}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots$

Радик. признак Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}<1$ $\Rightarrow$ сходится.

(9) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$ $\Rightarrow$ сходится

(10) $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\ldots+\frac{n^2}{2n^2+1}+\ldots$

Необх. признак $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}=\frac{1}{2}\neq0$ –
расходится

(11) $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n+\ldots$

необх. признак:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)^n=e^{-\frac{1}{3}}\neq 0 \Rightarrow \text{расх.}$$

(12) $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^2}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{n^n}+\ldots$

Радик. признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{2\cdot n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{2}\cdot n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{1/n}\cdot n}=0<1 - \text{сход.}$$

(13) $1+\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0<1 - \text{сход}$$

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$. Сравним с $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\cdot\sin\frac{1}{n^2}\right)=1$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сход $\Rightarrow$ д. р. сход

(15) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ расх. $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ расх.

(16) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$ интегр. признак Коши:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty \Rightarrow \text{расх.}$$

(17) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n+\sqrt{\ln^3 n}}$.

$\frac{1}{2n\ln n}$

$$\frac{1}{\sqrt{\ln^3 n}}=\frac{1}{\ln n\cdot\sqrt{\ln n}}>\frac{1}{n\ln n}\Rightarrow\frac{1}{n\ln n+\sqrt{\ln^3 n}}>$$

$\Rightarrow$ расх.

(18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. Признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1\Rightarrow\text{сход.}$$

(19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{3}{e}>1\Rightarrow\text{расходится.}$$