Лекция 11. Знакопеременные числовые ряды

§1. Понятие абсолютной сходимости

Теор. (об абсолютной сходимости). Если ряд $\sum|a_n|$ сходится, то и ряд $\sum a_n$ тоже сходится.
Д-во: Если ряд $\sum|a_n|$ сходится, то по критерию Коши

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n \ \forall p\in\mathbb{N}: \sum\limits_{i=n+1}^{n+p}|a_i|<\varepsilon$

но тогда для выбранного δ

$$\left|\sum_{i=N+1}^{N+P}a_i\right| \leq \sum_{i=N+1}^{N+P}|a_i|<\varepsilon \Rightarrow \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.} \blacksquare$$

Замечание. Теорема может быть доказана иначе, более красиво: Положим

$$a_n^+=\begin{cases}a_n, & a_n>0\\ 0, & a_n\leq 0\end{cases} \qquad a_n^-=\begin{cases}0, & a>0\\ -a_n, & a_n\leq 0\end{cases}$$

Тогда $|a_n|=a_n^++a_n^-$ и $a_n=a_n^+-a_n^-$.

$\sum|a_n|$ сходится $\Rightarrow$ сходятся ряды $\sum a_n^+, \sum a_n^-$

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$ сходятся $\Rightarrow$ сходится $\sum a_n$. $\blacksquare$

Опр. Ряд $\sum a_n$, для которого $\sum|a_n|$ сходится, наз. абсолютно сходящимся. Если ряд $\sum a_n$ сходится, но $\sum|a_n|$ расходится, его наз. сходящимся условно.

Согласно доказанной теореме, абсолютная сходимость есть усиление требования сходимости.

Признак абсолютной сходимости – простейший признак сходимости знакопеременных числовых рядов. В частности, этот признак позволяет применять признаки Даламбера и Коши. Рассмотрим предел

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

Если $q<1 \Rightarrow \sum|a_n|$ сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сход.
Если $q>1$, то посл-ть $\{|a_n|\}$ не стремится к нулю $\Rightarrow \{a_n\}$ не стремится к $0 \Rightarrow \sum a_n$ расх.
Те же рассуждения верны и для признака Даламбера.

§2. Признаки сходимости знакочер. рядов

Опр. Ряд $\sum a_n$ наз. знакочередующимся, если любые 2 соседних члена ряда имеют противоположные знаки. Такой ряд можно записать в виде $\sum (-1)^n |a_n|$, разделив знак и абсолютные значения членов ряда.

Теор. (признак Лейбница). Пусть для знакочередующегося ряда $\sum (-1)^n a_n$, $a_n > 0$, при $n = \overline{1,\infty}$ выполняются условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
2) $a_{n+1} \le a_n$, $n = \overline{1,\infty}$.

Тогда ряд $\sum (-1)^n a_n$ сходится.

Д-во: Знак первого члена ряда не явл. существенным (при необходимости можно умн-ть на -1). Для опр-ти считаем, что $a_1 > 0$. Тогда последовательность чётных частичных сумм явл. возр., ограниченной сверху любой нечётной частичной суммой. С другой стороны, посл-ть нечётных частичных сумм монотонно убывает и ограничена снизу любой чётной частичной суммой. В самом деле,

$$\left.\begin{aligned} S_{2n+2} &= S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \ge S_{2n} \\ S_{2n+3} &= S_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} \le S_{2n+1} \end{aligned}\right\} \text{монотонность}$$

$$\left.\begin{aligned} S_{2n+1} &= S_{2n} + a_{2n+1} \ge S_{2n} \\ S_{2n+2} &= S_{2n+1} - a_{2n+2} \le S_{2n+1} \end{aligned}\right\} \text{ограниченность}$$

Значит, последовательности чётных и нечётных частичных сумм имеют предел. Разность этих последовательностей есть последовательность членов ряда ⇒ стремится к 0. ⇒ единая последовательность частичных сумм имеет предел ⇒ ряд сходится. ∎

Замечание. Анализируя д-во, получаем

$$|S_n - S| \le a_{n+1}.$$

Значит, сумма остатка ряда не превосходит первого отброшенного члена. Значит, признак Лейбница даёт не только д-во сходимости ряда, но и оценку его остатка.

Пример. ~~Вычислить~~ Сколько слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ нужно взять, чтобы вычислить сумму ряда с точностью 0,001?

Для ряда $\sum (-1)^n/n$ выполнены условия признака Лейбница. Значит,

$$r_n = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < 0{,}001 \iff n = 1000.$$

Следующие два признака основаны на техническом приёме, аналогичном интегр-ю по частям.

Пример. Рассмотрим интеграл $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Непосредственно трудно сказать, сходится ли этот интеграл. Но если проинтегрировать по частям:

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x}\,d\cos x = \underbrace{-\frac{\cos x}{x}\Big|_{\pi}^{\infty}}_{\text{кон. число}} + \underbrace{\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{\text{сход. абс.}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ данный интеграл сходится.

Рассмотрим две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Сумма

$$S = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \quad (\underline{\text{сегмент ряда}})$$

м.б. преобразована следующим образом. Выберем последовательность $\{S_n\}$ так, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, $n=\overline{1,\infty}$ (т.е. S_n, например, — посл-ть частичных сумм ряда $\sum a_n$). Подставим выражение a_n через S_n в сумму S:

$$S = \sum_{k=1}^{p} (S_{n+k} - S_{n+k-1})\, b_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} S_{n+k} b_{n+k} - \sum_{k=1}^{p} S_{n+k-1} b_{n+k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} S_{n+k} b_{n+k} - \sum_{k=0}^{p-1} S_{n+k} b_{n+k+1} = S_{n+p} b_{n+p} - S_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} S_{n+k} \cdot (b_{n+k} - b_{n+k+1})$$

Полученное преобразование аналогично интегрированию по частям, роль производных играют первые разности последовательностей. Это преобразование иногда наз. <u>преобразованием Абеля</u>.

Теор. (признак Дирихле). Пусть
1) посл-ть частичных сумм ряда $\sum a_n$ огр.,
2) посл-ть $\{b_n\}$ явл. монотонной и беск. малой.
Тогда ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Д-во: Считаем, что $b_n > 0$ $\forall n$. Пусть A_n — посл-ть частичных сумм ряда $\sum a_n$. Применим к сегменту ряда $\sum a_n b_n$ преобразование Абеля:
$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} A_{n+k}(b_{n+k} - b_{n+k+1}).$$
Это приводит к оценке сегмента ряда:
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le |A_{n+p} b_{n+p}| + |A_n b_{n+1}| + \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k}|(b_{n+k} - b_{n+k+1}) \le$$
$$\le M\Big[b_{n+p} + b_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1}(b_{n+k} - b_{n+k+1})\Big] = M(b_{n+p} + b_{n+1} +$$
$$+ b_{n+1} - b_{n+p}) = 2M b_{n+1}.$$
$\Rightarrow$ по критерию Коши сходимости посл-ти посл. частичных сумм ряда $\sum a_n b_n$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum a_n b_n$ сходится. ■

Теор. (признак Абеля). Пусть
1) ряд $\sum a_n$ сходится
2) посл-ть $\{b_n\}$ явл. монотонной и ограниченной.
Тогда ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Д-во: Пусть $A_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ — посл-ть остатков ряда $\sum a_n$. Она стремится к 0 при $n \to \infty$. Применим к сегменту ряда $\sum a_n b_n$ преобр-е Абеля:
$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} A_{n+k}(b_{n+k} - b_{n+k+1}).$$
Это приводит к след. оценке:
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k}(b_{n+k} + b_{n+k+1})\right| \le$$
$$\le |A_{n+p}|\underbrace{|b_{n+p}|}_{\le M} + |A_n|\underbrace{|b_{n+1}|}_{\le M} + \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k}|\Big(\underbrace{|b_{n+k}|}_{\le M} + \underbrace{|b_{n+k+1}|}_{\le M}\Big) \le$$
$$\le M\Big[\underbrace{|A_{n+p}|}_{\to 0} + \underbrace{|A_n|}_{\to 0} + \sum_{k=1}^{p-1} 2\underbrace{|A_{n+k}|}_{\to 0}\Big] \to 0 \text{ при } n \to \infty$$
$\Rightarrow$ по критерию Коши ряд $\sum a_n b_n$ сход. ■

Упражнения

Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

(1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

Ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ расх.

Признак Лейбница: 1) $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\ldots>\frac{1}{2n-1}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$

$\Rightarrow$ ряд сходится условно

(2) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сход. $\Rightarrow$ д. ряд сход. абс.

(3) $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 2}+\frac{7}{3\cdot 4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$

Ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. По признаку сравнения (второму):

$\frac{2n+1}{n(n+1)}\sim\frac{2}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ расх $\Rightarrow$ ряд из модулей расх.

Проверяем условия Лейбница:

$a_n=\frac{2n+1}{n(n+1)}$, $a_{n+1}=\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$

1) $a_n-a_{n+1}=\frac{2n+1}{n(n+1)}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=\frac{(2n+1)(n+2)-(2n+3)n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n(n+2)}>0$

$\Rightarrow a_{n+1}<a_n$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}=0$ $\Rightarrow$ ряд сходится условно

(4) $-\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{7}\right)^2-\left(\frac{7}{10}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

Ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ сходится по радикальному признаку Коши $\Rightarrow$ д. ряд сходится абсолютно.

(5) $\frac{1}{7}-\frac{1\cdot 4}{7\cdot 9}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{7\cdot 9\cdot 11}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$

Ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$

Признак Даламбера: $q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+7}=\frac{3}{2}>1.$

5

$\Rightarrow$ д. ряд расходится

(6) $\frac{\sin\alpha}{\ln 10} + \frac{\sin 2\alpha}{(\ln 10)^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$

Ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{(\ln 10)^n}$

$\frac{|\sin n\alpha|}{(\ln 10)^n} \leq \frac{1}{(\ln 10)^n}$, т.е. $\sum \frac{1}{(\ln 10)^n}$ - мажор ряд

Исследуем сход-ть $\sum \frac{1}{(\ln 10)^n}$ по радик. признаку Коши:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln 10)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} < 1 \Rightarrow \text{сход.}$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{(\ln 10)^n}$ сход. по 1-му признаку сравнения $\Rightarrow$ д. ряд сходится абсолютно

(7) Дан ряд $-1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$

Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы этого ряда суммой первых 4-х членов? суммой первых 5-ти членов? Что можно сказать о знаках этих ошибок?

Для ряда вып. условия признака Лейбница $\Rightarrow$
$\Rightarrow |R_n| \leq |a_{n+1}|$

$\Rightarrow |R_4| \leq |a_5| = \frac{1}{120} \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{120}$

Эта ошибка отрицательна, т.к. $a_5 < 0$.

Аналогично

$\left| \sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$ (и эта ошибка положительна)

§ 3. ~~Перестановка~~ Группировки

Рассмотрим ряд $\sum a_n$. При помощи любой строго возрастающей последовательности $\{n_k\}$ натуральных чисел, начинающейся с 0, можно образовать новый ряд $\sum b_k$, положив $b_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i$. В результате получим ряд

$$\underbrace{(a_1 + \ldots + a_{n_1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1}, \ldots, a_{n_2})}_{b_2} + \ldots,$$

кот. получается из исходного ряда <u>группированием членов</u> (грубо говоря, расстановкой скобок). Такое преобразование м.б. полезно при ~~ис~~ исследовании на сходимость.

Сформулируем 2 утв-е, касающиеся сходимости группированного ряда:

1) Если ряд $\sum a_n$ сходится, то любой ряд $\sum b_n$, полученный группировкой исходного, сходится к той же сумме

2) Если общий член ряда $\sum a_n$ стремится к 0, ряд $\sum b_n$ получен группировкой первого, причем каждый его член есть сумма не более K членов ряда $\sum a_n$, то из сходимости $\sum b_n$ следует сходимость $\sum a_n$.

Группировка ряда равносильна выделению из посл-ти S_n его частичных сумм некоторой подпоследовательности S_{n_k}. Т.о, первое утв-е означает, что любая подпослед-ть сходящейся посл-ти сходится.

Если каждая группа содержит не более K членов исходного ряда, то любая из отброшенных частичных сумм отличается от ближайшей оставшейся не более, чем на сумму K модулей подряд идущих членов исх. ряда:

$$|S_n - S_{n_k}| \leq |a_{n_k+1}| + \ldots + |a_{n_{k+1}}|, \; n_k+1 \leq n \leq n_{k+1}$$

Если общий член ряда стремится к 0, то и указанная сумма стремится к 0.

Если в ряде часть членов (конечное или бесконечное их число) равна 0, то их можно выбросить из ряда. При этом вновь полученный ряд будет сходиться или расходиться наравне с исходным. Описанная операция – вариант группирования членов (нулевые члены группируются с последними ненулевыми из предшествующих членов). В этом случае дополнительных условий не требуется. С точки зрения послед-ти частичных сумм указанная операция есть исключение в последовательности идущих подряд повторений.

Упражнения

① Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots$$

Применим группировку:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}+1}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)}=\frac{2}{n-1}$$

Получили знакополож. ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$.

Этот ряд расходится $\Rightarrow$ д. ряд расходится.

§ 4. Перестановки

Опр. Рассмотрим взаимно однозначное отображение $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ множества натур. чисел на себя, $p(n)$ – значение отображения для аргумента n. Ряд $\sum a_{p(n)}$ наз. перестановкой ряда $\sum a_n$.

Перестановка – расположение членов ряда в ином порядке. Утв-е, что после перестановки ряд сходится к той же сумме, явл. обобщением закона коммутативности для конечных сумм. Однако такое утверждение верно лишь при некоторых дополнительных условиях.

1) Если существует такое число K, что $p(n) - n < K$ при всех n, то исходный ряд и его перестановка сходятся или расходятся одновременно, причем если сходятся, то к одной сумме.

2) Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то любая его перестановка сходится абсолютно и к той же сумме.

3) Если ряд сходится условно, то в рез-те его перестановки можно получить как расходящийся ряд, так и ряд, сходящийся к любому заданному числу (теор. Римана).

Доказательство этих утверждений оставим за рамками курса.

Упражнения

Исследовать на сходимость / расходимость

(1) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{3^k} + \ldots$

$a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$; $a_{2k} = -\frac{1}{3^k}$. Перестановка:

$S_{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ – расходится

$S_{2k} = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ – сходится

$\Rightarrow$ д. ряд расходится

(2) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{3^{2k-1}}$

$a_{2k-1} = \frac{1}{2^{k-1}}$; $a_{2k} = -\frac{1}{3^{2k-1}}$. При перестановка:

$S_{2k-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$ - сходится

$S_{2k} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3^3} - \dots - \frac{1}{3^{2k-1}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k-1}}$ - сходится

$\Rightarrow$ д. ряд сходится (абсолютно)

(3) Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ суммой его первых n членов. Оценить точность приближения при $n = 1000$.

$R_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots > \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots =$

$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \dots = \frac{1}{n+1} \Rightarrow R_n > \frac{1}{n+1}$.

но $R_n < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+n} < R_n < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{1001} < R_{1000} < \frac{1}{1000}$

(4) Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)5^n}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01? 0,001? 0,0001?

$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)5^k}$ - остаток ряда

$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)5^k} = \frac{n+1}{(2n+3)\cdot 5^n \cdot 5} + \frac{n+2}{(2n+5)\cdot 5^n \cdot 5^2} + \frac{n+3}{(2n+7)\cdot 5^n \cdot 5^3} + \dots <$

$< \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^n}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^n}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^n}\cdot\frac{1}{5^3} + \dots =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^n}\underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots\right)}_{\text{сумма } \infty \text{ убыв. геом. прогр.}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^n}\cdot\frac{1/5}{1-1/5} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5^n} < \varepsilon$

- $\varepsilon = 0{,}01 \Rightarrow \frac{1}{5^n} < 8\varepsilon$
  при $n = 2$: $\frac{1}{25} = 0{,}04 < 0{,}08 \Rightarrow$ 2 слагаемых
- $\varepsilon = 0{,}001 \Rightarrow \frac{1}{5^n} < 8\varepsilon$
  при $n = 3$: $\frac{1}{125} = 0{,}008 = 0{,}008 \Rightarrow$ 3 слагаемых
- $\varepsilon = 0{,}0001$; $n = 5$: $\frac{1}{5\cdot 625} = \frac{1}{3125} = 0{,}00032 < 0{,}0008 \Rightarrow$ 5 слагаемых

§ 5. Умножение рядов

При перемножении двух конечных сумм $(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_m)$ необходимо вычислить все попарные произведения левых слагаемых с правыми, а рез-ты сложить. Порядок сложения не явл. существенным. Все попарные произведения образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \ldots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \ldots & a_2 b_m \\ & \ldots & & \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \ldots & a_n b_m \end{pmatrix}$$

В случае произведения двух рядов все попарные произведения образуют бесконечную в обе стороны матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \ldots & a_1 b_m & \ldots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \ldots & a_2 b_m & \ldots \\ \ldots & & & & \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \ldots & a_n b_m & \ldots \\ \ldots & & & & \end{pmatrix}.$$

В общем случае сумма всех попарных произведений зависит от порядка. Поэтому нужно дополнить это требованием абсолютной сходимости рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$.

Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ знакоположительны, то и $\sum a_n \cdot \sum b_n$ знакоположителен, причем произведение сумм равно сумме произведения рядов. Это же верно и для абсолютно сходящихся рядов.

Группировка членов может обеспечить это и при более слабых условиях: Если указанные ряды сходятся, причем хотя бы один из них абсолютно, то ряд $\sum c_n$ с общим членом $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$ сходится абсолютно, и его суммой явл. произведение сумм исходных рядов.