Лекция 12. Функциональные ряды.

§1. Функциональные послед-ти (ФП)

<u>Опр.</u> <u>Функциональной</u> послед-тью наз. послед-ть, составленную из функций, т.е отобр-е натур. ряда в некоторое прост-во функций.

Полагаем, что все члены ФП имеют одну и ту же область определения, кот. назовем <u>областью определения</u> ФП. Тогда ФП — это отобр-е $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Фиксируя натур. аргумент, получаем ф-ю действит. переменного, явл. <u>членом</u> ФП. Если зафиксировать действит. аргумент, получим числовую послед-ть — послед-ть значений ФП в данной точке. Мн-во тех точек области, в кот. сходится такая числовая послед-ть, наз. <u>областью сходимости</u> ФП.

<u>Опр.</u> Если мн-во X принадлежит области сходимости ФП, то говорят, что ФП сходится на X <u>поточечно</u>. Областью сходимости X часто оказывается область определения ФП.

Поточечная сходимость проста и естественна, т.е. опирается на св-ва числовых послед-тей. Но она не сохраняет важнейшие св-ва, присущие функциям: непрерывность, дифференцируемость и т.д. Например, послед-ть $\{x^n\}$ непр. на $[0;1]$ ф-й сходится поточечно к функции, кот. равна 0 на $[0;1)$ и 1 в т. $x=1$.

На понятие сходимости ФП можно посмотреть шире. Пусть все члены ФП явл. элемента-ми некоторого масштного прост-ва L функций (непр, дифф-еренцируемых и т.д). Пусть в этом пространстве задано расстояние $\rho(f,g)$ между любыми функциями. Такое расстояние должно удовлетворять аксиомам расстояния:

- $\rho(f,g) = \rho(g,f)$
- $\rho(f,g) \geq 0$, причем $\rho(f,g) = 0 \Leftrightarrow f=g$
- $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$ (нер-во Δ-ка)

С таким расстоянием пр-во L становится метрическим, и в нем можно определить сходимость обычным образом: послед-ть $\{f_n\} \in L$ сходится к некоторому пределу $f \in L$, если
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n: n > N \Rightarrow \rho(f_n, f) < \varepsilon$

Такой подход к понятию сходимости ФП дает неограниченное кол-во вариантов. Подход может быть расширен еще больше, если вместо расстояния использовать непосредственное описание окрестностей функций. Если понятие окрестности определено, то под пределом ФП можно понимать следующее: функция f есть предел послед-ти $\{f_n\}$, если для любой окрестности $O(f)$ функции f существует такое натуральное N, что при $n > N$ имеем $f_n \in O(f)$. Таким образом м.б. введена поточечная сходимость.

Окрестности могут определяться расстоянием (метрикой). В свою очередь метрика может задаваться <u>нормой</u>. Норма в лин. прост-ве — это функция, определенная на этом прост-ве и обозначаемая $\|f\|$, кот. удовлетворяет аксиомам нормы:

- $\|f\| \geq 0$
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$
- $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (нер-во Δ-ка)

Каждой норме $\|f\|$ соответствует расстояние $\rho(f, g) = \|f - g\|$. Примеры норм:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx},$$

Сходимость на основе $\|f\|_\infty$ наз. <u>равномерной сходимостью</u>, на основе $\|f\|_2$ — <u>сходимостью в среднем квадратичном</u>.

Альтернативные фор-ки равном. сход-ти:

1) $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N$
$\forall x \in X \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

2) $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N$
$\sup_{x \in X} \{ |f_n(x) - f(x)| \} < \varepsilon$

Сравним первую из этих формулировок с определением поточечной сходимости:

$$f_n \underset{X}{\to} f \Leftrightarrow \forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x) \ \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Поменялся лишь порядок кванторов.

Равномерная сходимость сохраняет осн. св-ва пределов:

1) если $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, то $f_n \underset{X}{\to} f$

2) если $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, $g_n \underset{X}{\rightrightarrows} g$, то

 а) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f_n + \beta g_n \underset{X}{\rightrightarrows} \alpha f + \beta g$

 б) $f_n g_n \underset{X}{\rightrightarrows} fg$

3) если $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, причем для некоторого действительного $c > 0$ выполнено $|f(x)| \geq c_0$ $\forall x \in X$ ~~то~~, то $1/f_n \underset{X}{\rightrightarrows} 1/f$.

Д-во: Из условия $\inf\limits_{x \in X} |f(x)| \geq c$ получаем, что в каждой точке $x \in X$ $|f_n(x)| \geq |f(x)| - |f_n(x) - f(x)| \geq c/2$. Поэтому

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\| = \sup_{x \in X} \left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \sup_{x \in X} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)| \cdot |f(x)|} \leq \frac{2}{c^2} \|f_n - f\| \blacksquare$$

4) равномерно сходящаяся послед-ть равномерно ограничена, т.е. если $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, то $\exists M > 0$, что $\|f_n\|_\infty < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Другими словами, $|f(x)| < M$ в каждой точке $x \in X$ и для любого n.

5) <u>критерий Коши</u>: послед-ть $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на X $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N \quad \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

(это условие означает, что посл-ть $\{f_n(x)\}$ <u>равномерно фундаментальна</u> на X)

Следующие св-ва, отражающие связь понятия равномерной сходимости с такими св-вами, как непрерывность, явл. ключевыми.

Теор. 1. Если $f_n \in C(X)$, $n = 1, 2, \ldots$ и $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, то $f \in C(X)$.

Д-во: Выберем произвольную точку $x_0 \in X$ и докажем, что функция $f(x)$, явл. равномерным пределом ФП, непр. в этой точке. По условию $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$: при $\forall n > N$ и $x \in X$ вып. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Выберем произвольное $n>N$ и зафиксируем его. Для выбранного ε можно указать такие окрестности $O(x_0)$ и $O_n(x_0)$ т. x_0, что $|f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon$ при $x \in O_n(x_0) \cap X$ и $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ при $x \in O(x_0) \cap X$. Если $x \in O_n(x_0) \cap O(x_0) \cap X$, то

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)| < \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Т.к. ε выбиралось произвольно, то $f(x)$ непр. в т. x_0. ∎

Теор. 2. Если $f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$, то $\int_a^x f_n(\xi)d\xi \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \int_a^x f(\xi)d\xi$.

Д-во: В самом деле,

$$\left|\int_a^x f_n(\xi)d\xi - \int_a^x f(\xi)d\xi\right| = \left|\int_a^x (f_n(\xi)-f(x))d\xi\right| \le$$

$$\le \int_a^x |f_n(\xi)-f(\xi)|\,d\xi \le \int_a^b |f_n(\xi)-f(\xi)|\,d\xi \le \|f_n-f\|(b-a)$$

поэтому, переобозначив первообразные ф-ии $f_n(x)$ и $f(x)$ через $F_n(x)$ и $F(x)$ соот-но, получим $\|F_n - F\| \le (b-a)\|f_n - f\|$. ∎

Следствие. Если $f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$, то $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$.

Сформулированное следствие говорит о том, что равномерно сходящиеся послед-ти можно интегрировать почленно. След. теорема дает условия, достаточные для почленного дифференцирования ФП.

Теор. 3. Пусть каждая из функций $f_n(x)$ диф-ма на $(a;b)$ и выполняются условия:

- посл-ть $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in (a;b)$,
- $f_n' \underset{(a;b)}{\rightrightarrows} \varphi$.

Тогда $f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$, причем ф-я $f(x)$ диф-ма на интервале $(a;b)$ и $f'(x)=\varphi(x)$ на $(a;b)$.

Д-во: Опирается на теорему Лагранжа, но выходит за рамки курса. □

Анализ ФП на равномерную сходимость достаточно трудоемок. Однако при некоторых дополнительных условиях равномерная сходимость будет вытекать из поточечной.

Теор. 4 (теорема Дини). Если послед-ть $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций сходится поточечно на компакте X к некоторой непрерывной ф-ии $f(x)$, причем для каждого $x \in X$ числовая послед-ть $\{f_n(x)\}$ монотонна, то $\{f_n\}$ сходится на X равномерно. ☐.

Напомним, что мн-во K числовой прямой явл. компактом, если оно замкнуто и ограничено.

§2. Функциональные ряды

Опр. Функциональный ряд (ФР) представляет собой особую форму записи функциональной послед-ти: рядом наз. запись

$$f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

где $\{f_k(x)\}$ - произвольная ФП.

Для функциональных рядов вводят понятие n-ой частичной суммы:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

Суммой ФР наз. предел послед-ти его частичных сумм. Этот предел может рассматриваться различными способами: введением различных расстояний, норм и т. д. Отметим поточечную и равномерную сходимость.

Между ФП и ФР вне зависимости от способа предельного перехода сохраняется та же связь, что и между числовыми, а именно: любая ФП может интерпретироваться как последовательность частичных сумм ряда, а любой ряд ассоциируется со своей послед-тью частичных сумм.

Поэтому большинство свойств ФП переносится на функциональные ряды:

- из равномерной сходимости ряда на данном множестве следует его поточечная сходимость на этом мн-ве
- сумма равномерно сходящихся рядов, произведение равномерно сходящегося ряда на функцию равномерно сходятся;
- сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных ф-ий есть ф-я непрерывная (на множестве равномерной сходимости);
- равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно, получаемый при этом ряд из интегралов с переменным верхним пределом сходится равномерно;
- ФР из дифференцируемых на данном интервале функций можно дифференцировать почленно, если он сходится хотя бы в одной точке интервала, а ряд из производных сходится на интервале равномерно;
- <u>Теорема</u> <u>Дини</u>: если ряд Σf_n из непрерывных и неотрицательных на компакте X функций f_n сходится к непрерывной на X функции f, то он сходится на X равномерно

Тем не менее, как и для числовых рядов, исследование ФР м. б. более простым по сравнению с последовательностями. Отметим основные факты, которыми ряды отличаются от послед-тей.

§ 3. Признаки равномерной сходимости рядов

Теор. Пусть ФР $\sum f_k(x)$ сходится на мн-ве X поточечно. Тогда этот ряд сходится на X равномерно $\Leftrightarrow r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$, где
$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

Д-во: Из соотношения $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, где $S(x)$ — сумма ряда в точке x, $S_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда в точке x и кот. верно $\forall n$. ■

Теор. (необходимый признак сходимости). Если ряд $\sum f_k(x)$ сходится равномерно на множестве X, то $f_k \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $k\to\infty$.

Д-во: Если ряд $\sum f_k(x)$ сходится равномерно на X, то $\exists$ предел посл-ти частичных сумм: $S_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$. Тогда
$$|S_k - S_{k-1}| = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f_k \underset{X}{\rightrightarrows} 0. \ ■$$

Теор. (признак Вейерштрасса). Если $|f_n(x)| \le a_n$ при $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum f_n(x)$ сходится на X равномерно.

Д-во: В каждой точке $x \in X$ числовой ряд $\sum f_n(x)$ сходится абсолютно в силу первого признака сравнения. Значит, $\sum f_n(x)$ сходится на X поточечно. Для д-ва равномерной сходимости воспользуемся теоремой Дини. В каждой точке $x \in X$ имеем оценку
$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_n,$$
откуда $\|r_n\|_\infty \le a_n$. В силу сходимости ряда $\sum a_n$ посл-ть $\{a_n\}$ его остатков сходится к 0. А это означает, что $\|r_n\| \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по первой теор. этого параграфа ФР $\sum f_k(x)$ сходится на X равномерно. ■

Замечание 1. Ряд $\sum a_n$, на основании кот. делают вывод о равномерной сходимости ФР, наз. мажорантой. Минимальной мажорантой для данного ФР на X яв. ряд $\sum \|f_n\|_\infty$ поэтому признак Вейерштрасса можно сформулировать так: ряд $\sum f_n$ сходится на X равномерно, если ряд $\sum \|f_n\|_\infty$ сходится. В такой интерпретации признак Вейерштрасса представляет собой обобщение признака абсолютной сходимости.

Замечание 2. Признак Вейерштрасса не явл. необходимым, т.е. можно построить равномерно сходящийся на X ряд $\sum f_n$, для которого $\sum \|f_n\|_\infty$ расходится. Например, для частного случая ФР — числового — признак Вейерштрасса представляет собой признак абсолютной сходимости.

Но даже если потребовать, чтобы $f_n(x) \geq 0$ $\forall x \in X$, признак Вейерштрасса не станет необходимым. Рассмотрим послед-ть ф-ий:

$$f_n(x) = \begin{cases} 4(n+1)\left((n+1)x - 1\right)(1-nx), & x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & , x \notin \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Ряд $\sum f_n$ сходится поточечно на $[0;1]$, т.к. в каждой точке отрезка только один из членов ряда отличен от 0. При этом

$$\|r_n\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_\infty = \max_{k \geq n+1} \left\{ \frac{4(k+1)}{4k(k+1)} \right\} = \frac{1}{n+1},$$

т.е. сходимость равномерная. однако $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, т.е. ряд $\sum \|f_n\|_\infty$ расходится.

Теор. (признак Дирихле). Пусть

- последовательность частичных сумм ряда $\sum \alpha_n(x)$ равномерно ограничена на мн-ве X;
- послед-ть $\{\beta_n(x)\}$ монотонна $\forall x \in X$.

Тогда ФР $\sum \alpha_n(x)\beta_n(x)$ сходится на X равномерно.

$\underline{Д\text{-}во}$: Вспоминаем преобразование Абеля:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x)\beta_k(x) = A_{n+p}(x)\beta_{n+p}(x) - A_n(x)\beta_{n+1}(x) +$$
$$+\sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k(x)\left(b_k(x) - b_{k+1}(x)\right), \text{ где } A_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x).$$

Учитывая, что частичные суммы $A_n(x)$ для ряда $\sum \alpha_n(x)$ равномерно ограничены, т.е. $\exists$ такая константа M, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$ $|A_n(x)| \le M$, заключаем, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x)\beta_k(x)\right| \le M\left|b_{n+p}(x)\right| + M\left|b_{n+1}(x)\right| +$$
$$+M\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left|b_k(x) - b_{k+1}(x)\right| = M b_{n+p}(x) + M b_{n+1}(x) +$$
$$+M\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left[b_k(x) - b_{k+1}(x)\right] = M b_{n+p}(x) + M b_{n+1}(x) +$$
$$+M\left[b_{n+1}(x) - b_{n+p}(x)\right] = 2M b_{n+1}(x).$$

След-но, $\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k\beta_k\right\| \le \|b_{n+1}\|_\infty$. Применение критерия Коши завершает д-во. ■

Теор. ($\underline{\text{признак Абеля}}$) пусть:
- ряд $\sum \alpha_n(x)$ равномерно сходится на X;
- послед-ть $\{\beta_n(x)\}$ монотонна $\forall x \in X$ и на X равномерно ограничена.

Тогда ФР $\sum \alpha_n(x)\beta_n(x)$ сходится на X равномерно.

$\underline{Д\text{-}во}$: аналогично пред. теор. ■