Лекция 13. Степенные ряды

§1. Интервал сходимости.

Опр. Функциональный ряд вида
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$
наз. степенным, параметр x_0 наз. центром степенного ряда, а числовая послед-ть $\{a_n\}$ — коэф-тами степенного ряда.

Область сходимости степенного ряда всегда непуста: степенной ряд сходится в т. x_0. Отметим, что область сходимости D_0 степенного ряда $\sum a_n x^n$ получается из области сходимости ряда $\sum a_n (x-x_0)^n$ сдвигом на x_0 влево (если первый сходится в т. y, то второй — в т. $y = x + x_0$, а значит, между точками двух областей сходимости $\exists$-ет взаимно-однозначное соотв-е). Это позволяет остановиться на частном случае степенного ряда $\sum a_n x^n$.

Степенной ряд по своему характеру близок к геометрической прогрессии, поэтому для него эффективно использование радикального признака Коши и Даламбера.

Пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Положив $a_n = x^n/n$, вычислим пар-р q:
$$q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$
При $|x| < 1$ ряд сходится абсолютно, при $|x| > 1$ расходится (нарушен необх. признак сходимости), при $|x| = 1$ требуется дополнит. исследование. В этих точках ($x = 1$ и $x = -1$) получаются ряды:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ (расх.) и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} \text{ (сход. условно по пр. Лейб.)}$$
Значит, областью сходимости данного ряда является полуинтервал $[-1; 1)$.

В общем случае областью сходимости степенного ряда явл. интервал, полуинтервал или отрезок (связное множество).

Частным случаем интервала явл. вся числовая ось, а частным случаем отрезка — единственная точка, центр степенного ряда.

Теор. (первая теорема Абеля). Если ряд $\sum a_n x^n$ сходится в т. x_0, то он сходится абсолютно в любой точке x, для кот. $|x| < |x_0|$.

Д-во: Т.к. ряд $\sum a_n x_0^n$ сходится, то послед-ть $\{a_n x_0^n\}$ явл. бесконечно малой и потому ограничена. Значит, $\exists M>0: |a_n x_0^n| \le M$. Но тогда

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

т.е. ряд $\sum a_n x^n$ при $|x| < |x_0|$ мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, а потому сходится по 1-му признаку сравнения. ■

Следствие. Любой степенной ряд имеет такой интервал $(-R, R)$, внутри которого ряд сходится абсолютно, а вне — расходится. При этом на концах интервала ряд может как сходиться, так и расходиться.

Д-во: Рассмотрим область D сходимости ряда и пусть $R = \sup\{|z| : z \in D\}$. Тогда согласно определению числа R ряд при $|x| > R$ расх. Пусть $|x| < R$. $\exists x_0$, что ряд сходится в т. x_0 и при этом $|x| < |x_0| < R$. Из первой теоремы Абеля заключаем, что в точке $|x|$ ряд сходится абсолютно. ■

Опр. Число R наз. радиусом сходимости степенного ряда, интервал $(-R, R)$ - интервалом сходимости этого ряда.

Область сходимости ряда представляет собой интервал сходимости с добавлением, возможно, его граничных точек.

Применим к ряду $\sum a_n x^n$ радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot q$$

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, то ряд сход. абсолютно при $|x| < \frac{1}{q}$ и расходится при $|x| > \frac{1}{q}$. Значит, число $R = \frac{1}{q}$ представляет собой радиус сходимости ряда. Итак,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$ — формула Коши-Адамара

или $$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$ (из признака Даламбера)

Применение формулы Коши-Адамара может приводить к ошибкам. Лучше исследовать степенной ряд непосредственно по признаку Коши и Даламбера.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum a_k x^{2k}$ из чётных степеней. Лобовое применение ф-лы Коши-Адамара приводит к пределу

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

но эту ф-лу нужно применить к послед-ти

$$b_n = \begin{cases} a_k, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1, \end{cases}$$

что равносильно вычислению предела

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}.$$

$R = 0$, если область сход-ти из одной точки,
$R = \infty$, если область сход-ти — вся числ. ось

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ расходится всюду, кроме точки 0, т.к.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Ряд $\sum \frac{x^n}{n^n}$ сходится всюду на числ. оси:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Теор. (о равномерной сходимости). Пусть $R>0$ – радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$. Тогда на любом отрезке $[-r, r]$, $r<R$, ряд $\sum a_n x^n$ сходится равномерно.

Д-во: В т. r интервала сходимости ряд $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно, т.е. сходится ряд $\sum |a_n| r^n$. А т.к. $|a_n x^n| \le |a_n| r^n$ при $x \in [-r; r]$, то по признаку Вейерштрасса ряд на отрезке $[-r; r]$ сходится равномерно. ∎

Теор (вторая теорема Абеля). Пусть ряд $\sum a_n x^n$ имеет радиус сход-ти $R>0$. Если этот ряд сходится в т. R ($-R$), то он сходится равномерно на $\forall$ отр. $[-r; R]$, $0 \le r < R$.

Д-во: Опирается на признак Абеля. Можно считать, что $r=0$, т.к. для случая сходимости в т. R отрезок $[r, R]$ содержится в $[0, R]$ или является объединением отрезков $[r, 0]$ и $[0, R]$ при $r<0$. Если на каждом из двух множеств ряд сходится равномерно, то он сходится равномерно на объединении множеств.

Положив $\alpha_n(x) = a_n R^n$, $\beta_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n$, $n=1,2,\ldots$ получим, что ряд $\sum \alpha_n(x)$ сходится равномерно на $[0, R]$ (это просто числовой ряд), посл-ть $\{\beta_n(x)\}$ $\forall x \in [0; R]$ является монотонной и равномерно ограниченной на $[0; R]$. Тогда по признаку Абеля ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\beta_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится на $[0; R]$ равномерно. ∎

Упражнение

Найти интервал сходимости ряда и исследовать на границах

① $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow R=1.$$

Интервал сходимости: $-1 < x < 1$

$x=1: \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1^n$; $x=-1: \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ расх. (по необх. признаку)

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

$$\frac{1}{R^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}} = 1 \Rightarrow -1<x<1 \text{ - интервал сход-ти}$$

$x=1: \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ расх; $x=-1: \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{(-1)^{2n-1}}^{-1}}{2n-1}$ расх.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$...

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \text{ - интервал сход-ти}$$

$x=1: \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сход. условно (признак Лейб.)

$x=-1: \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ расх.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = \infty$$

$\Rightarrow$ Ряд сходится на всей числ. оси

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Ряд сходится только в т. $x=0$.

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \cdot \ln n}$. Ф-ла Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n \cdot 3^n \cdot \ln n}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n \cdot \ln n}} ?$$

Иначе:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 3^n \ln n}{(n+1) 3^{n+1} \cdot \ln(n+1)} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow R=3 \Rightarrow -3 < x < 3$ - интервал сходимости

$x=3: \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n \cdot \ln n \cdot 3^n} = \frac{1}{3} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ - расх. по интегральн. пр-ку

$x=-3: \frac{1}{3} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot \ln n}$ - сход. усл. (пр-к Лейбн.)

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R=3 \Rightarrow$ $-3<x-5<8$
$2<x<8$ – интервал

$x=2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ – расх; $x=8$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ – сход. усл.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$

$\frac{1}{R^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 9^n}{(n+1)\cdot 9^{n+1}} = \frac{1}{9} \Rightarrow R=3 \Rightarrow$ $-3<x-1<3$
$-2<x<4$ – интервал сход-ти

$x=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{2n}}{n\cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расх; $x=4$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расх.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \Rightarrow R=1 \Rightarrow$ $-1<x+3<1$
$-4<x<-2$ – интервал сход.

$x=-4$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ – сход. абс, $x=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сход.

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$

$\frac{1}{R^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot 4^n}{2(n+1)\cdot 4^n\cdot 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow R=2 \Rightarrow$ $-2<x+5<2$
$-7<x<-3$ – интервал сход-ти

$x=-7$: $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{4n}$ – расх; $x=-3$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ – расх.

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}\cdot(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$. Ф-ла Коши – Адамара:

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow R=\frac{9}{4}$

$-\frac{9}{4}<x-1<\frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{4}<x<\frac{13}{4}$

$x=-\frac{5}{4}$: $-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n-3}{6n-4}\right)^{2n}$; $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-3}{6n-4}\right)^{2n} = e^{\frac{1}{3}} \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ряд расх. по необх. пр-ку

$x=\frac{13}{4}$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{6n-3}{6n-4}\right)^{2n}$ – расх. (по необх. пр-ку)

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} \Rightarrow R=e$

$-e-3<x<e-3$

6 на границах ряд расх. по необх. пр. $n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$ – ф-ла Стирлинга

§2. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Степенной ряд можно почленно интегр-ть. Именно, если дан степенной ряд $\sum a_n x^n$ с радиусом сходимости $R>0$, то степ. ряд

$$\sum a_n \left(\int_0^x x^n dx\right) = \sum a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

сходится равномерно на любом отрезке $[-r, r]$, $0 \leq r < R$, причем

$$\sum a_n \left(\int_0^x x^n dx\right) = \int_0^x \left(\sum a_n x^n\right) dx$$

Поск. получаемый в процессе почленного $\int$-е ряд тоже явл. степенным, он сходится на интервале $(-R, R)$ абсолютно.

Может ли при $\int$-и увеличиться радиус сходимости? Пока ясно только, что он не уменьшается.

Теор. (об интегрировании степ. рядов). Степенной ряд можно почленно интегрировать. При этом радиус сходимости полученного ряда не меняется.

Д-во: покажем, что радиус сходимости не увеличивается при интегрировании. Пусть ряд $\sum a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$, полученный $\int$-ем ряда $\sum a_n x^n$, сходится в т. x_0. Тогда

$$|a_n x^n| = \left|a_n \cdot \frac{x_0^{n+1}}{n+1}\right| \cdot \frac{n+1}{|x_0|} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \cdot \frac{n+1}{|x_0|} q^n,$$

где $M = \sup \left|a_n \cdot \frac{x_0^{n+1}}{n+1}\right|$, $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$.

Ряд $\sum M \cdot \frac{n+1}{|x_0|} q^n$ сходится абс. при $|q|<1$. Тогда по первому признаку сравнения ряд $\sum a_n x^n$ сходится при $|x| < |x_0|$ $\Rightarrow$ радиус сходимости исходного ряда не меньше, чем радиус сходимости проинтегрированного. ■

Теор. (о дифференцировании степенных рядов)
Если R – радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$, то ряд $\sum n a_n x^{n-1}$, получаемый почленным дифференцированием исходного, имеет тот же радиус сходимости R и, кроме того, $(\sum a_n x^n)' = \sum a_n (x^n)'$

Д-во: Это утверждение следует из предыдущей теоремы. Действ-но, ряд $\sum a_n x^n$ м.б. получен из ряда $\sum n a^n x^{n-1}$ почленным $\int$-ем. Значит, радиусы сход-ти этих рядов совпадают. при этом $\sum a_n x^n = \sum \int_0^x (n a_n \xi^{n-1} d\xi) = \int_0^x \sum n a_n x^{n-1} dx$

Если продиф-ть записанное рав-во, получим требуемое. ∎

Следствие. Сумма степенного ряда явл. ф-ей, ∞ дифференцируемой в интервале сходимости.

§ 3. Ряд Тейлора

Теор. Если ф-я $f(x)$ есть сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, сходящегося на интервале $|x-x_0| < R$, то $f \in C^{\infty}$ и $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Д-во: ∞ диф-ть констатируется следствием из предыдущей теоремы. Кроме того, из этой теоремы следует, что степенной ряд можно диф-ть почленно любое число раз в интервале сходимости, поэтому

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n (x-x_0)^n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)(x-x_0)^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)(x-x_0)^{n-k} = \{ n-k = m \} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (m+k)(m+k-1) \dots (m+1)(x-x_0)^m$$

Полагая $x = x_0$, получим $f^{(k)}(x_0) = a_k k(k-1) \dots 1$, что равносильно $a_k = f^{(k)}(x_0) / k!$ ∎

Следствие. Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ в нек. окр-ти т. x_0, то $a_n = b_n$, $n = 1, 2, \dots$

Опр. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$,

наз. рядом Тейлора бесконечно дифф-мой в окрестности т. x_0 ф-и $f(x)$.

Очевидно, что ∞ дифф-ть ф-и является необходимым условием для разложения её в ряд Тейлора. однако это условие не является достаточным: для ∞ дифф-мой ф-и ряд Тейлора можно выписать, но он может не сходиться к заданной ф-и.

Пример ф-я $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

∞ дифф-ма всюду на действ. оси, все производные $f^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow$ ряд Тейлора явл. тривиальным (нулевым) $\Rightarrow$ он сходится к ф-и, тожд-но равной нулю $\neq f(x)$.

Чтобы убедиться в сходимости ряда Тейлора к самой ф-и $f(x)$, нужно оценить по абсолютной величине разность $r_n(x) = f(x) - S_n(x; f)$ между ф-ей и n-ой частичной суммой ряда в произвольной точке x. Эта разность фигурирует в формуле Тейлора как остаток, кот. м.б. записан в различной форме. наиболее известна запись остатка в форме Лагранжа.

Остаток в ф-ле Тейлора — не есть остаток ряда Тейлора. Их совпадение означает, что ф-я явл. суммой своего ряда Тейлора. Необходимым и достаточным условием такого совпадения явл. условие

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - S_n(x, f)\right) = 0,$$

кот. должно выполняться в каждой точке x из некоторой окрестности т. x_0 (центра ряда Тейлора).

Отметим важный частный случай, когда выполняется сформулированный критерий.

Теор. Пусть $f \in C^{\infty}(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$. Если $\exists M>0$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in (x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ $|f^{(n)}(x)| \le M$, то ф-я $f(x)$ в интервале $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ равна сумме своего ряда Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta).$$

Д-во: Запишем остаток $r_n(x,f)$ ф-лы Тейлора в форме Лагранжа и оценим его абсолютную величину:

$$|r_n(x,f)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| < \frac{M\,\delta^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где $\Delta x = x - x_0$, $|\Delta x| \le \delta$.

Т.к. остаток стремится к 0 в каждой точке интервала $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, ф-я совпадает на этом интервале с суммой своего ряда Тейлора. ■

§4. Стандартные разложения в ряд Тейлора

Исходя из формулы Тейлора основных элементарных функций, можно получить разложение этих функций в ряд Тейлора.

① Показательная функция e^x.

Т.к. для этой ф-и $f^{(n)}(x) = e^x$, то в каждом интервале $(-R, R)$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| \le M$, где в качестве M можно взять $M = e^R$. Тогда получим (по пред. теор §3):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

верное в каждом интервале $(-R, R)$, а потому и на всей числовой оси.

② Тригонометрические функции

Используем формулы:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad (\cos x)^{n} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

из которых следует, что все производные

функций $\sin x$ и $\cos x$ ограничены на всей числовой оси константой $M = 1$. Применение формул Тейлора и теор. из § 3 даст разложения

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, x \in \mathbb{R}$$

(3) Степенная функция $(1+x)^p$, $p \in \mathbb{R}$.

Разложение этой функции в степенной ряд с центром 0 возможно только в пределах интервала $(-1, 1)$, т.к. при действ. отриц. p ф-я не определена в т. -1. Вычислим n-ю производную ф-и:

$$[(1+x)^p]^{(n)} = p(p-1)\ldots(p-n+1)(1+x)^{p-n}.$$

поэтому ряд Тейлора для этой ф-и им. вид

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1; 1).$$

Чтобы показать, что степенная ф-я действительно равна сумме своего ряда Тейлора в интервале $(-1; 1)$, нужно использовать запись остатка не в форме Лагранжа, а в форме Коши:

$$r_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \Delta x)(1-\theta)^n}{n!}(x - x_0)^{n+1}.$$

В нашем случае

$$r_n(x, f) = p(p-1)\ldots(p-n)\frac{(1+\theta x)^{p-n}(1-\theta)^n}{n!} x^{n+1} =$$

$$= p(p-1)\ldots(p-n)(1+\theta x)^p \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^n} \cdot \frac{x^{n+1}}{n!}$$

При $|x| < \delta < 1$ имеем

$$|r_n(x, f)| \leq (1+\theta x)^p \left|\frac{1-\theta}{1-\theta\delta}\right|^n \frac{1}{n!} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(1-\theta)^{\min\{0, p\}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Если p явл. натуральным, то разложение ф-и $(1+x)^p$ в ряд Тейлора приводит к биному Ньютона. Важнее также частный случай $p = -1$, в котором мы приходим к формуле суммы геометрической прогрессии со знаменателем $-x$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1;1)$$

Отметим также случай $p=-2$, в кот. разложение имеет вид:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n, \quad x \in (-1;1).$$

④ Логарифмическая функция $\ln(1+x)$.

Т.к. эта ф-я не определена в т. -1, то разложение этой ф-и в степенной ряд с центром в т. 0 возможно только в пределах интервала $(-1,1)$. По ф-ле $\int$-я рядов для ряда $\frac{1}{1+x}$ получим

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1;1)$$

Упражнения

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x. Указать интервал сходимости полученного разложения.

① $\frac{2x-3}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)+2-3}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$

ст. разложение $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1;1)$

$$\Rightarrow \frac{2}{x-1} = -2\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Теор. о диф-ие рядов: $\frac{1}{(x-1)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' =$

$$= \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3}{(x-1)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} 2x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n$$

$x \in (-1;1)$.

② $xe^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$

(3) $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$

(4) $\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$

(5) $\cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$

(6) $\frac{x}{9+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}, \quad -3 < x < 3$

(7) $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$

(8) $\sqrt[3]{8+x} = 2\sqrt[3]{1+\frac{x}{8}} = 2\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{8} - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!} \frac{x^2}{8^2} + \ldots + \right.$

$\left. + (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (4-3n)}{3^n \cdot n!} \cdot \frac{x^n}{8^n} + \ldots \right), \quad -8 < x < 8$

(9) $\ln(x^2+3x+2) = \ln(1+x) + \ln(2+x) = \ln 2 +$

$+ \ln(1+x) + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} +$

$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{2^n \cdot n} = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right),$

радиус сходимости: $\begin{cases} |x| < 1 \\ |x| < 2 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 1$

(10) $\frac{1}{x}$ по степеням $(x-1)$

$\frac{1}{x} = \left\{ \begin{matrix} x-1 = y \\ x = y+1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n,$

$|x-1| < 1$

(11) $\frac{1}{x^2+3x+2}$ в ряд по степеням $(x+4)$

$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \left\{ \begin{matrix} x+4 = y \\ x+1 = y-3 \\ x+2 = y-2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(y-2)(y-3)} =$

$= \frac{1}{y-3} - \frac{1}{y-2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{y}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{y}{2}} =$

$= -\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{2^{n+1}} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} y^n \left(-\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+4)^n \left(-\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

~~Радиус~~ Интервал сходимости: $|x+4| < 2 \Leftrightarrow -6 < x < -2$

(12) e^x по степеням $(x+2)$

$$e^x = \left\{ \begin{matrix} x+2=y \\ x=y-2 \end{matrix} \right\} = e^{y-2} = \frac{1}{e^2}\cdot e^y = \frac{1}{e^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{e^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}$$, интервал сход-ти: $x \in \mathbb{R}$

(13) $\cos x$ в ряд по степеням $(x-\frac{\pi}{2})$

$$\cos x = \left\{ \begin{matrix} x-\frac{\pi}{2}=y \\ x=y+\frac{\pi}{2} \end{matrix} \right\} = \cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin y = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$, интервал сход-ти: $x \in \mathbb{R}$

(14) Применить дифференцирование рядов для разложения $f(x) = \arcsin x$ по степеням x

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot x^6 + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$, инт-л сход-ти: $-1 < x < 1$

← двойной факториал от n

(15) Применить интегр-е рядов для разложения $f(x) = \int_0^x e^{-x^2}dx$ по степеням x

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \Rightarrow \int_0^x e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)},$$

интервал сходимости: $x \in \mathbb{R}$

(16) Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,0001.

(см. 15)

Ряд знакочередующийся $\Rightarrow |R_n| \le |a_{n+1}| \le 0{,}0001$.

Дост-но 7 членов ряда $\left(\frac{1}{7!\cdot 15} \approx 0{,}0000132 < \ldots\right)$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!\,5} - \frac{1}{3!\,7} + \frac{1}{4!\,9} - \frac{1}{5!\cdot 11} + \frac{1}{6!\cdot 13} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} \approx 0{,}7468.$$

(17) Сколько нужно взять членов ряда $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$, чтобы вычислить $\cos 18°$ с точностью до 0,001?

Дост-но 2-х членов ряда:

$$\cos 18° = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - 0{,}049 \approx 0{,}95.$$