Лекция 14. Ряды Фурье

§1. Ортогональные системы в функциональных пространствах.

Рассмотрим некоторое линейное пространство функций (функциональное пространство): $\{f_n\}$, а также послед-ть коэф-тов $\{\alpha_n\}$. Получим функциональный ряд:

$$f(x) = \sum \alpha_n f_n(x),$$

кот. явл. обобщением понятия линейной комбинации в линейной алгебре. Рассмотрение разложения функций по базису наиболее просто, когда это линейное прост-во евклидово, а базис — ортонормированный.

Пусть $R[a;b]$ — линейное прост-во функций, определённых и интегрируемых на $[a;b]$. В этом прост-ве скалярное произв-е определяется как

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx,$$

где считается, что равны любые ф-и f и g, для которых $\|f-g\|^2 = 0$.

Опр. Функцион. последовательность $\{f_n\}$, $f_n \in R[a;b]$, $n = 1, 2, \ldots$, наз. ортогональной системой, если все функции этой системы попарно ортогональны, т.е. $\langle f_n, f_m \rangle = 0$ $\forall n, m: n \neq m$. Если к тому же $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f_n\|^2 = \langle f_n, f_n \rangle = 1$, то такую посл-ть наз. ортонормированной системой.

Пример 1. Посл-ть $1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots$ явл. ортогональной системой в $R[-l;l]$, напр.:

$$\left\langle \cos\frac{\pi n x}{l}, \cos\frac{\pi m x}{l} \right\rangle = \int_{-l}^{l} \cos\frac{\pi n x}{l}\cos\frac{\pi m x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{(n+m)\pi x}{l} + \cos\frac{(n-m)\pi x}{l}\right]dx = \frac{l}{2(n+m)\pi}\sin\frac{(n+m)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} +$$

$$+ \frac{l}{2(n-m)\pi}\sin\frac{(n-m)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0.$$

Эта посл-ть не явл. ортонормированной,

т.к. $\|1\|^2 = 2l$, $\|f_n\|^2 = l \quad \forall\ n=1,2,\ldots$
ортонормированная посл-ть функций:

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi x}{l},\ldots$$

Пример 2. Последовательность многочленов Лежандра: $P_n(t) = \frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$, $n=1,2,\ldots$
явл. ортогональной системой в $R[-1;1]$.
Эта посл-ть не явл. ортонормированной, т.к. $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.
Замечание. Посл-ть многочленов $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(t)$ можно построить, если посл-ть простейших мономов $\{t^n\}$, $n=0,1,\ldots$, подвергнуть процессу ортогонализации Грама-Шмидта.

§2. Задача о наилучшем приближении

Пусть в пространстве $R[a;b]$ задана ортогональная система из n функций $f_1,\ldots,f_n$.
Опр. Задачей о наилучшем приближении наз. задачу поиска таких коэф-тов $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, что для произвольной ф-и $f(x)\in R[a;b]$ величина

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\|$$

имела наименьшее значение, т.е. линейная комбинация ф-й $f_1,\ldots,f_n$ была наиболее близка к функции f.
Преобразуем квадрат искомой величины:

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\|^2 = \langle f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i,\ f-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j\rangle =$$

$$= \langle f,f\rangle - \langle f,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j\rangle - \langle f,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\rangle + \langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j\rangle =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle f,f_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\langle f_i,f_j\rangle =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle f,f_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\|f_i\|^2$$

Необх. условие минимума: все частные производные ФНП по переменным $\alpha_1,\ldots,\alpha_n = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\|^2\right) = -2\langle f,f_i\rangle + 2\alpha_i\|f_i\|^2 = 0$$

$\Rightarrow \alpha_i = \dfrac{\langle f, f_i \rangle}{\|f_i\|^2}$.

Если система $f_1, .., f_n$ ортонормирована, ф-лы упрощаются: $\alpha_i = \langle f, f_i \rangle$.

Если задана бесконечная ортогональная система $\{f_n\}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$, коэф-ты которого вычисляются по ф-лам $\alpha_i = \langle f, f_i \rangle$, обладает тем свойством, что его частичные суммы $S_n(f)$ являются наилучшими приближениями ф-и f. В частности, из этого следует, что последов-ть норм $\| f - S_n(f) \|$ монотонно убывает.

Опр. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$, коэф-ты которого вычисляются по формулам $\alpha_i = \langle f, f_i \rangle / \|f_i\|^2$ наз. рядом Фурье функции f по ортогональной системе $\{f_n\}$, а формулы $\alpha_i = \langle f, f_i \rangle / \|f_i\|^2$ наз. формулами Эйлера-Фурье.

§3. Свойства ряда Фурье

① Теор. Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$ по ортогональной системе $\{f_i\}$ сходится по норме к функции f, то коэф-ты α_i этого ряда вычисляются по формулам $\alpha_i = \langle f, f_i \rangle / \|f_i\|^2$. □

② Теор (неравенство Бесселя). Если $\{\alpha_n\}$ - последовательность коэф-тов Фурье для функции $f \in R[a;b]$ по ортонормированной системе $\{f_n\}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \le \|f\|^2$$

Д-во: Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ - знакоположительный, дост-но показать, что все частичные суммы $S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$ ограничены $\|f\|^2$. Тогда монотонная послед-ть частичных сумм будет иметь предел, кот. не превосходит $\|f\|^2$.

Рассмотрим норму разности между ф-ей и n-ой частичной суммой её ряда Фурье:

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\|^2 \underset{\uparrow}{=} \|f\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\underbrace{\langle f, f_i\rangle}_{=\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\underbrace{\|f_i\|^2}_{=1} =$$

получено в пред. §

$$= \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \leq \|f\|^2 \quad ■$$

Замечание 1. Если система ф-й $\{f_n\}$ ортогональная, то нер-во Бесселя имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\|f_n\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Замечание 2. При д-ве теоремы получили следующее: если α_i - коэф-ты Фурье функции f по ортонормированной системе $\{f_i\}$, то

$$\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = \|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\|^2, \; n=1,2,\dots$$

③ Теор. (равенство Парсеваля). Пусть $\{\alpha_n\}$ - послед-ть коэф-тов Фурье для функции $f\in R[a;b]$ по ортонормированной системе $\{f_n\}$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i$ сходится к ф-и f тогда и только тогда, когда верно равенство Парсеваля:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 = \|f\|^2.$$

Д-во: $\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$ (см. замеч. 2)

($\Rightarrow$) Ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i$ сходится к f $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2$$

($\Leftarrow$) $\|f\|^2 \to \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$ при $n\to\infty$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$ ряд сходится к ф-и f. ■

§4. Условие сходимости ряда Фурье к ф-и

Опр. Ортогональная система наз. полной, если её нельзя расширить добавлением новых ф-й. Т.е. орт. система $\{f_n\}$ полна, если условие $\langle f, f_n \rangle = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, выполняется только при $f \equiv 0$.

Теор. (необх. условие сходимости ряда Фурье к ф-и). Если каждая ф-я $f \in R[a;b]$ явл. суммой своего ряда Фурье по данной ортогональной системе $\{f_n\}$, то эта система полна.

Д-во: Если для нек. ф-и верно $\langle f, f_n \rangle = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\alpha_i = 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ ряд Фурье тривиальный. Сумма такого ряда $= 0$. ∎

Опр. Ортогональная система $\{f_n\}$ наз. замкнутой, если все возможные конечные линейные комбинации функций системы плотны в $R[a;b]$, т.е. множество всех ф-й, которые можно представить в виде $\sum_{i=1}^{m} c_i f_i$ с некоторым набором коэф-тов c_i, имеет замыкание в $R[a;b]$, совпадающее со всем пространством.

Теор. (необх. и дост. условие сход-ти ряда Фурье к ф-и). Для любой ортогональной системы $\{f_n\}$ след. условия эквивалентны:

1) Система $\{f_n\}$ замкнута;
2) любая ф-я есть сумма своего ряда Фурье;
3) Для любой ф-и верно рав-во Парсеваля.

Д-во: Экв-ть 2) $\Leftrightarrow$ 3) д-на ранее. Докажем эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2).

($\Rightarrow$) $\{f_n\}$ замкнута $\Rightarrow$ для произв. f в любой её окр-ти $U_\varepsilon(f) = \{h \in R[a;b] : \|h - f\| < \varepsilon\}$ имеется хотя бы одна лин. комбинация $h = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i$ ф-й системы. m-я частичная сумма $S_m(f)$ ряда Фурье ф-и f обеспечивает наименьшее уклонение от f, т.е. $\|f - S_m(f)\| \le \|f - h\| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $S_m(f) \in U_\varepsilon(f)$. Т.к. ε можно выбрать произвольно, то посл-ть $S_n(f)$ сходится к ф-и f.

($\Leftarrow$) Если любая ф-я f есть сумма своего ряда Фурье, то каждая ф-я явл. пределом посл-ти частичных сумм ряда, кот. представляет собой линейные комбинации ф-й ортог. системы $\Rightarrow$ в $\forall$ окрестности любой ф-и f содержатся линейные комбинации ф-й системы $\Rightarrow$ $\{f_n\}$ замкнута. ∎

Замкнутая ортогональная система всегда полна. В определённых евклидовых пространствах понятия замкнутости и полноты совпадают, однако подробнее останавливаться на этом не будем.

§5. Тригонометрическая система

Опр. Тригонометрической системой наз. систему функций 1, $\cos\frac{\pi x}{l}$, $\sin\frac{\pi x}{l}$, ..., $\cos\frac{\pi n x}{l}$, $\sin\frac{\pi n x}{l}$, ..., рассматриваемую на отр. $[-l; l]$.

Эта система ортогональна, но не ортонормирована!

$$\|1\|^2 = 2l; \ \left\|\cos\frac{\pi n x}{l}\right\|^2 = \left\|\sin\frac{\pi n x}{l}\right\|^2 = l.$$

Эта система замкнута и полна. Ряд Фурье ф-и f по этой системе записывается след. образом:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right),$$

где коэф-ты a_n и b_n определяются по ф-лам Эйлера - Фурье:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \ n=0,1,\ldots \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \ n=1,2,\ldots$$

Нер-во Бесселя в д. случае имеет вид:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx$$

и в силу замкнутости обращается в равенство (равенство Парсеваля).

Ряд Фурье сходится равномерно. Действительно, если $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < +\infty$, то

$$\left|a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right| \le |a_n| + |b_n|, \ n=1,2,\ldots,$$

и ряд Фурье сходится равномерно к f по признаку Вейерштрасса.

§ 6 Условия сходимости ряда Фурье в точке.

В этом параграфе кратко, без д-ва, обсудим, куда сходится ряд Фурье в точках разрыва и в граничных точках отрезка.

Теор. (Дини). Пусть интегрируемая на $[-l; l]$ функция $f(x)$ имеет в т. $x_0 \in [-l; l]$ разрыв первого рода и в этой точке для некоторого $\delta > 0$ выполнены условия Дини:

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)|}{t}\, dt < +\infty.$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в т. x_0 к значению $\frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right)$. □

Следствие. Если интегрируемая на $[-l; l]$ ф-я $f(x)$ дифф-ма в т. x_0, то ряд Фурье этой функции в т. x_0 сходится к значению $f(x_0)$.

Замечание 1. Из теор. следует, что если f имеет в граничных точках $-l$ и l односторонние производные, то ряд Фурье в этих точках сходится к значению $\frac{1}{2}\left(f(-l) + f(l)\right)$. Это следует из периодичности суммы ряда Фурье.

Замечание 2. Если интегрируемые ф-и $f(x)$ и $g(x)$ совпадают в окрестности т. x_0, то ряды Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ сходятся или расходятся одновременно, причем если сходятся, то к одному и тому же значению. Это значит, что поведение ряда Фурье в некоторой точке определяется поведением ф-и в этой точке, а характер ф-и в удаленных точках не влияет на ряд Фурье в данной точке. Это св-во наз. локальностью ряда Фурье.

Замечание 3. Условие $\sup\limits_{\tau} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < +\infty$ наз. условием ограниченной вариации для ф-и f, где τ - все разбиения рассм. отрезка.

Теор. (Дирихле). Ряд Фурье функции f ограниченной вариации сходится в каждой точке $x \in [-l; l]$ к значению $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$. □

Следствие. Пусть функция $f(x)$ удовл. условиям Дирихле:
1) ф-я $f(x)$ кусочно-непр. на $[-l; l]$;
2) ф-я $f(x)$ кусочно-монотонна на $[-l; l]$.

Тогда ряд Фурье ф-и $f(x)$ сходится на $[-l; l]$ к значению $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$.

След-но:
1) в каждых точках непр-ти ф-и $f(x)$ на $[-l; l]$ ряд Фурье сходится к $f(x)$ (из следствия теор. Дирихле)
2) В точках x_0 разрыва I рода ф-и $f(x)$ ряд Фурье этой ф-и сходится к $\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$.
3) В граничных точках интервала $[-l; l]$ ряд Фурье ф-и $f(x)$ сходится к значению $\frac{1}{2}(f(-l)+f(l))$.

Кроме того, сумма ряда Фурье явл. периодической функцией с периодом $2l$. Вне отрезка $[-l; l]$ сумма ряда Фурье продолжается по периодичности, хотя функция $f(x)$ м.б. вообще не определена.

Упражнения

① Разложить ф-ю $f(x) = x+1$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ в ряд Фурье. Построить график суммы ряда.

Решение: Для $l=\pi$ запишем формулы Эйлера-Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin nx\,dx.$$

Вычислим коэф-ты Фурье:

1) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2.$

{1-е почат.}

2) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\,d\sin nx =$

$= \frac{1}{\pi n}(x+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx =$

$= \frac{1}{\pi n}\Big[(\pi+1)\underbrace{\sin\pi n}_{=0} - (-\pi+1)\underbrace{\sin(-\pi n)}_{=0}\Big] + \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} =$

$= \frac{1}{\pi n^2}\left(\cos\pi n - \cos(-\pi n)\right) = \frac{1}{\pi n^2}(\cos\pi n - \cos\pi n) = 0.$

3) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\,d\cos nx =$

$= -\frac{1}{\pi n}(x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx =$

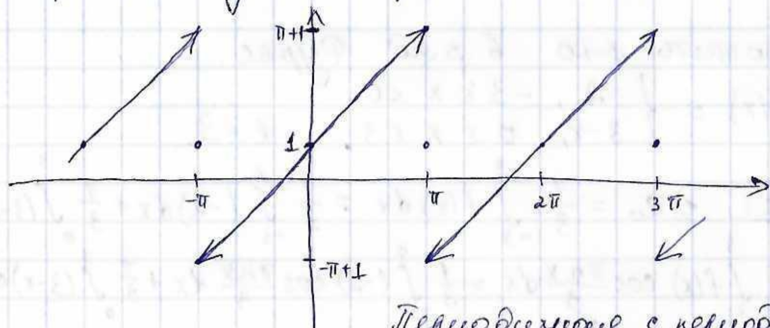
$= -\frac{1}{\pi n}\Big[(\pi+1)\cos\pi n - (-\pi+1)\cos(-\pi n)\Big] + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} =$

$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\underbrace{(-1)^n}_{=\cos\pi n}\underbrace{(\pi+1+\pi-1)}_{=2\pi} + \frac{1}{\pi n^2}(\underbrace{\sin\pi n}_{=0} - \underbrace{\sin(-\pi n)}_{=0}) = -\frac{2(-1)^n}{n}$

Подставим найденные коэф-ты в сумму ряда Фурье

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{n}\sin nx.$$

График суммы ряда:



Периодичная с периодом 2π

Значения в граничных точках:

$$\tilde{f}(\pi) = \frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi+1+(-\pi+1)}{2} = 1.$$

(2) Разложить функцию в ряд Фурье. Построить график суммы ряда:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & -\pi \le x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Решение:

1) $a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} (1-x)\,dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} 0\,dx = \frac{2+\pi}{2}.$

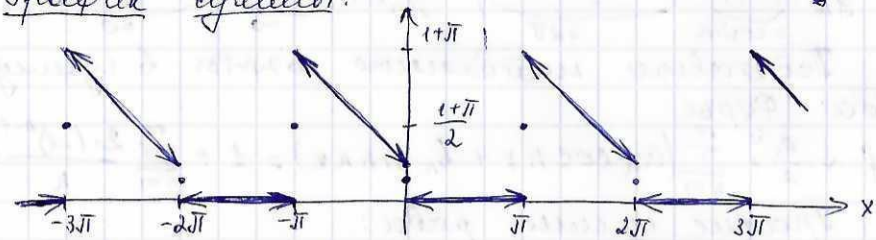
2) $a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} (1-x) \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right).$

3) $b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} (1-x) \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi n} \left((1+\pi)(-1)^n - 1 \right).$

Разложение в ряд Фурье:

$$f \sim \frac{2+\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos nx + \frac{1}{\pi n} \left((1+\pi)(-1)^n - 1 \right) \cdot \sin nx \right]$$

График суммы:



(3) Разложить ф-ю в ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -3 \le x < 0 \\ 3-x, & 0 \le x \le 3. \end{cases} \quad l = 3.$$

Решение: 1) $a_0 = \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{3} f(x)\,dx = \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{0} (-2)\,dx + \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{3} (3-x)\,dx = -\frac{1}{2}$

2) $a_n = \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{3} f(x) \cos \frac{\pi n x}{3}\,dx = \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{0} (-2) \cos \frac{\pi n x}{3}\,dx + \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{3} (3-x) \cos \frac{\pi n x}{3}\,dx =$

$= \frac{3}{\pi^2 n^2} \left(1 - (-1)^n \right).$

3) $b_n = \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{3} f(x) \sin \frac{\pi n x}{3}\,dx = \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{0} (-2) \sin \frac{\pi n x}{3}\,dx + \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{3} (3-x) \sin \frac{\pi n x}{3}\,dx =$

$= \frac{5 - 2 \cdot (-1)^n}{\pi n}.$

Разложение в ряд: $f \sim -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi^2 n^2} \left(1 - (-1)^n \right) \cos \frac{\pi n x}{3} + \frac{5 - 2 \cdot (-1)^n}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} \right)$

§ 7. Ряд Фурье по косинусам (синусам) кратных углов.

Если ф-я $f(x)$ определена на $[-l;l]$ и чётна, то её синус-коэффициенты $(b_n)=0$. Если $f(x)$ нечётна, то её косинус-коэф-ты $(a_n)=0$. В этих случаях формулы для ненулевых коэф-тов можно модифицировать, используя значения ф-и только на половине отрезка, например, правой.

- Для чётной функции
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,\ n=0,1,2,\dots$$
- Для нечётной функции
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx,\ n=1,2,\dots$$

Если на отрезке $[0;l]$ опр-на ф-я $f(x)$, её можно продолжить на симметричный отрезок $[-l;l]$ чётным и нечётным способом (в этом случае нужно также изменить на 0 знач-е ф-и при $x=0$).
При чётном продолжении в этом ряде будут присутствовать только слагаемые с косинусами:
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},\ \text{где } a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,\ n=0,1,2,\dots$$
При нечётном продолжении в этом ряде будут присутствовать только слагаемые с синусами:
$$f(x) \sim \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},\ \text{где } b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx,\ n=1,2,\dots$$
На отрезке $[0;l]$ системы ф-й $\cos\frac{\pi n x}{l}$, $n=0,1,2,\dots$, и $\sin\frac{\pi n x}{l}$, $n=1,2,\dots$, замкнуты. Эти системы явл. ортогональными на $[0;l]$.

Упражнения

(1) Разложить функцию $f(x)=2x+1$ в ряд по косинусам кратных углов на отрезке $[0;1]$.

Решение:

Получим "чётное продолжение" ф-и $f(x)$:
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,\ n=0,1,2,\dots$$
В данном случае

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 (2x+1)\,dx = 2(x^2+x)\Big|_0^1 = 4.$$

$$a_n = 2\int_0^1 (2x+1)\cos \pi n x\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^1 (2x+1)\,d\sin \pi n x =$$

$$= \ldots = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Получим $f(x) \sim 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos \pi n x$

② Разложить функцию $f(x)$ в ряд по синусам кратных углов:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 1-x, & 1 < x \le 2 \end{cases}, \quad \ell = 2$$

<u>Решение</u>: Получим "нечётное продолжение" ф-и $f(x)$:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

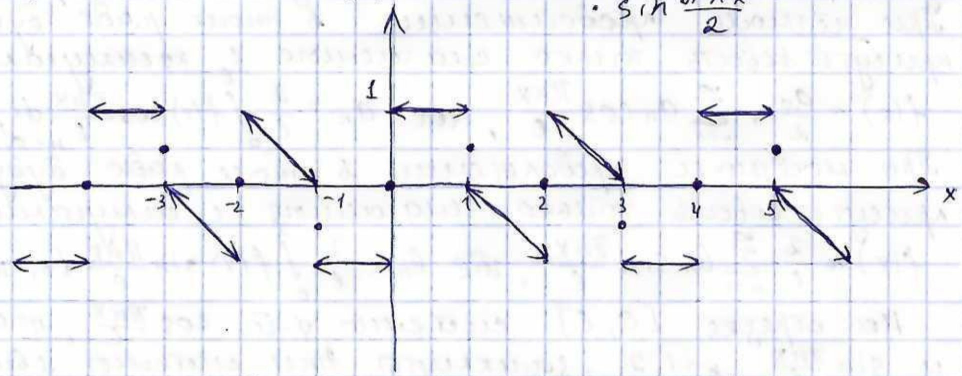
В данном случае

$$b_n = \int_0^2 f(x)\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx = \int_0^1 \sin\frac{\pi n x}{2}\,dx + \int_1^2 (1-x)\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(1 + (-1)^n - \cos\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}$$

Получим $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n}\left(1+(-1)^n - \cos\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right)\cdot$

$$\cdot \sin\frac{\pi n x}{2}$$



§8. Разложение функции на произвольном отрезке.

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a; b]$. Тогда её можно продолжить периодически на всю числовую ось, переопределив, если необходимо, в концах отрезка. Продолженную ф-ю можно представить рядом Фурье с периодом $T=2l=b-a$. При этом, в силу периодичности и продолженной ф-и $f(x)$, и тригонометрических ф-й,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{2\pi n x}{b-a}\,dx, \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{2\pi n x}{b-a}\,dx, \quad n=1,2,\ldots$$

Итак, на $\forall$ отрезке $[a;b]$ есть замкнутая система функций $1,\ \cos\frac{2\pi x}{b-a},\ \sin\frac{2\pi x}{b-a},\ \cos\frac{4\pi x}{b-a},\ \sin\frac{4\pi x}{b-a},\ \ldots,$ $\cos\frac{2\pi n x}{b-a},\ \sin\frac{2\pi n x}{b-a}, \ldots$

Эта система ортогональна.

Упражнения

(1) Разложить ф-ю $f(x) = \begin{cases} 0, & 1<x<2 \\ 1, & 2<x<3 \end{cases}$

в ряд Фурье. Построить график суммы ряда.

Решение: $b-a=2$, $l=1$. Коэф-ты Фурье в д. случае

$$a_0 = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^2 0\,dx + \int_2^3 1\cdot dx = 1$$

$$a_n = \int_1^3 f(x)\cos\pi n x\,dx = \int_2^3 \cos\pi n x\,dx = 0$$

$$b_n = \int_1^3 f(x)\sin\pi n x\,dx = \int_2^3 \sin\pi n x\,dx = \frac{1-(-1)^n}{\pi n}.$$

Получим ряд $f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin\pi n x$