Лекция 1. Функции. Свойства функций

§1. Литература:

1. Морозова В.И. Введение в анализ, т. I из серии "Математика в техническом университете"
2. Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного. т. II из серии "Математика в техническом университете"
3. Иванков П.Л. Конспект лекций по математическому анализу. mathmod.bmstu.ru / Учебная работа / Первокурсникам
4. Ефимов А.В. Демидович Б.П. Сборник задач по математике для ВТУЗов, ч. 1, "Линейная алгебра и основы математ. анализа"

Обозначения: $\forall$ для любого, любой
$\exists$ существует
$\exists!$ существует единств.
$:$ такой, что
$\Rightarrow$ следует
$\Leftrightarrow$ равносильно
("тогда и только тогда, когда", "необходимо и достаточно, чтобы")
$\ni$: принадлежит

Числовые множества:
$\mathbb{N}$ – натуральные числа
$\mathbb{Q}$ – рациональные числа
$\mathbb{R}$ – действительные числа
$\mathbb{C}$ – комплексные числа

Запись "$x \in \mathbb{N}$" означает, что x – натуральное число

§1. Элементы математ. логики

Высказывание – предложение, относительно которого можно сказать, истинно или ложно.

Предикат – высказывание относительно переменной: $P(x)$

прим. $x^2 \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$.

часто содержит кванторы:

$\forall x\ P(x)$ – для любого x вып. $P(x)$

$\exists x\ P(x)$ – сущ-ет x, для кот. вып. $P(x)$

пример. $\forall x: x > 4$ – ложно

$\exists x: x > 4$ – истинно

Как построить отрицание с квантором?

$\neg(\forall x\ P(x)) \to \exists x\ \neg P(x)$

$\neg(\exists x\ P(x)) \to \forall x\ \neg P(x)$

Методы доказательств:

1. Прямое доказательство: методом логических верных ~~ум~~ рассуждений из A выводится B. Получаем $A \Rightarrow B$.

2. Метод матем. индукции.
Пусть надо показать, что A выполнено $\forall n \in \mathbb{N}$. Для этого достаточно показать, что:
1) A выполнено при $n=1$ (база индукции)
2) Предположив, что A выполнено при произвольном $n=k$, показать, что A выполнено и при $n=k+1$.

Теор (неравенство Бернулли). Для любого натурального n, $x > -1$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Д-во: 1) пусть $n=1$

$1+x \geq 1+x$ – верно.

2) пусть выполнено $(1+x)^k \geq 1+kx, x \geq -1$.
Покажем, что $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)\cdot(1+x) =$
$= 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x + \underbrace{kx^2}_{\geq 0} \geq 1+(k+1)x.$

Из 1) и 2) следует, что $(1+x)^n \geq 1+nx$,
$\forall n \in N, x \geq -1$.

3) Доказательство контрапозицией используется, если надо доказать $A \Rightarrow B$, но проще доказать $\neg B \Rightarrow \neg A$. Прямое док-во $\neg B \Rightarrow \neg A$ дает д-во исходного утверждения

4) Доказательство от противного
Чтобы доказать $A \Rightarrow B$ методом от противного, предполагаем, что истинно A и $\neg B$ и приходим к противоречию, что значит, что импликация $A \to B$ не может быть ложной.

5) Для доказательства равносильности $A \Leftrightarrow B$ нужно доказать два утверждения:
1) необходимость : $A \Rightarrow B$.
2) Достаточность : $B \Rightarrow A$.

§2. Понятие функции

Опр. Отображением (функцией) из множества X во множество Y наз. правило f, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие $y \in Y$.

Обозн.: $f: X \to Y$, $y = f(x)$

Опр. Если $y = f(x)$, то y наз. образом элемента $x \in X$, а x наз. прообразом элемента $y \in Y$.

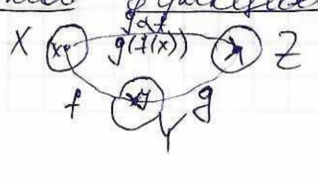
Опр. Множество X при этом наз. областью определения функции f. Множеством значений этой функции называется подмножество мн-ва Y, состоящее из тех (и только тех) $y \in Y$, для которых найдется x, такой, что $y = f(x)$.

Обозн.: $f(X)$.

Опр. Элемент $y_0 = f(x_0)$, поставленный в соответствие элементу $x_0 \in X$, наз. значением функции f в т. x_0.

x наз. независимой переменной (аргументом) функции.

Опр. Пусть даны два отображения: $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$. С их помощью можно построить новое отображение $g \circ f: X \to Z$, которое элементу $x \in X$ ставит в соответствие элемент $g(f(x))$. Такая операция над ф-ями наз. композицией, а ф-я $z = g(f(x))$ наз. сложной функцией.

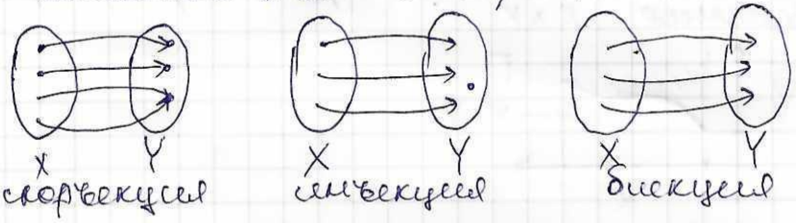


§3. Сюръекция, инъекция, биекция

Опр. Отображение $f: X \to Y$ наз. сюръективным, если $\forall y \in Y$ $\exists x \in X$ такой, что $y = f(x)$, т.е. $f(X) = Y$.

Опр. Отображение $f: X \to Y$ наз. инъективным, если $\forall x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 \neq x_2$, значения функции на них не равны: $f(x_1) \neq f(x_2)$ (у разных прообразов разные образы).

Опр. Биективным наз. сюръективное и инъективное отображение.



Примеры.

1) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ – биекция
2) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ – инъекция
3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ – не инъекция, не сюръ.
4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ – сюръекция
5) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ – биекция

Опр. Если $f: X \to Y$ – биекция, то каждому $y \in Y$ соответствует один $x \in X$, а значит, можно определить отобр-е $f^{-1}: Y \to X$, кот. каждому $y \in Y$ ставит в соответствие $x \in X$ такой, что $y = f(x)$. Это отображение наз. обратным к отобр-ю f и обознач. f^{-1}.

§ 4. Числовые функции

Опр. Ф-я $f: X \to Y$ наз. числовой функцией, если X, Y – числовые множества, напр. $\mathbb{R}$.

Рассмотрим плоскость, на кот. введена декартова система координат. Каждой точке плоскости можно поставить в соответствие упорядоченную пару чисел (x, y) – её координаты.

Опр. Графиком ф-ии $y = f(x)$, $f: X \to Y$ наз. множество $\Gamma = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in X\}$, подмножество декартова ~~произв~~ произведения $X \times Y$.

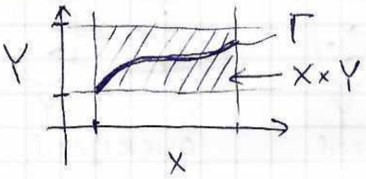
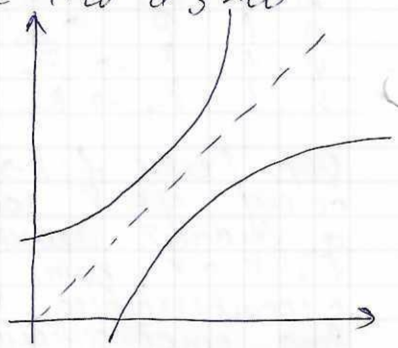


График обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику ф-ии $y = f(x)$ относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатного углов.



§5. Свойства числовых функций

① Монотонность

Опр. Ф-я $f: X \to \mathbb{R}$ наз. возр. / убыв. / невозр. / неубыв., если $\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ / $f(x_1) > f(x_2)$ / $f(x_1) \geq f(x_2)$ / $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Опр. Функция f наз. монотонной, если она возр, убыв., невозр или неубыв.

Опр Функция f наз строго монотонной, если она возр. или убыв.

② Ограниченность

Опр Ф-я $f: X \to \mathbb{R}$ наз. ограниченной снизу / сверху на множестве $A \subset X$, если $\exists C: \forall x \in A$ вып. $f(x) \geq C$ / $f(x) \leq C$

Опр. Ф-я $f: X \to \mathbb{R}$ наз. ограниченной на множестве $A \subset X$, если $\exists C_1, C_2: \forall x \in A$ вып. $C_1 \leq f(x) \leq C_2$

Замечание 1. Таким образом, ограниченная функция ограничена как сверху, так и снизу.

Замечание 2. Ограниченность функции $y = f(x)$ эквивалентна ограниченности сверху функции $y = |f(x)|$.

③ Четность / нечетность

Рассмотрим функцию, определенную на симметричном относительно начала координат промежутке X. Симметричность означает, что если $x \in X$, то и $-x \in X$.

Опр. Функция f наз. четной, если $\forall x \in X$ выполнено $f(x) = f(-x)$.

Опр. Функция f наз. нечётной, если $\forall x \in X$ вып. $f(-x) = -f(x)$.

④ Периодичность

Пусть T - некоторое ненулевое число (обычно считают $T > 0$) и пусть $X \subset \mathbb{R}$ (область определения ф-ии f) таково, что из $x \in X$ следует включение $x + kT \in X$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Опр. Функция $f: X \to \mathbb{R}$ наз. периодической, если $f(x) = f(x+T)$ $\forall x \in X$. При этом число T наз. периодом ф-ии.

Прим. 1) $y = \sin x$, $y = \cos x$ — периодические с периодом 2π.

2) $y = tg x$, $y = ctg x$ — периодические с периодом π.