Лекция 2. Числовая последовательность и её предел

§1. Понятие числовой последоват-ти и её предела

<u>Опр.</u> <u>Последовательностью</u> наз. числовую ф-ю натурального аргумента, т.е. отобр-е $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Обозначим $f(n) = a_n$, получим формулу n-го члена, по кот. можно определить члены послед-ти с номером n.

Обозн.: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

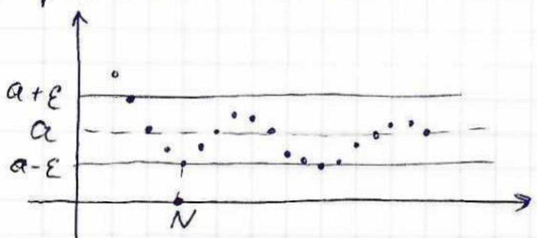
<u>Пример</u> $a_n = \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots$

<u>Опр.</u> Число a наз. <u>пределом</u> послед-ти $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что для всех $n > N$ вып. неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$

Обозн.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ означает, что все члены послед-ти, начиная с некоторого номера $N+1$, попадают в ε-окрестность т. a



$$|a_n - a| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$
$$a_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$$

<u>Примеры.</u> 1) пусть $a_n = n$, $\varepsilon = 1$.
За пределами $(a-1; a+1)$ находится ∞ много эл-тов посл-ти $\Rightarrow$ последовательность расходится.

2) $a_n = \frac{1}{n}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Выберем произвольный $\varepsilon > 0$. Тогда
$\exists N: N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, $\forall n > N$ $\frac{1}{n} < \varepsilon$ $(n > \frac{1}{\varepsilon})$
Здесь $[x]$ - целая часть числа x

<u>Опр.</u> Последоват-ть, кот. имеет предел, наз. <u>сходящейся</u>, иначе - <u>расходящейся</u>.

§2. Основные свойства сходящихся последовательностей

① **Теор.** (о единственности предела). Посл-ть не может иметь более одного предела, т.е. если $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$, то этот предел единств.

Д-во: От противного.

Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$; $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, $a \neq b$.

Тогда для $\varepsilon = |a-b|/3$ $\exists N_1$ такой, что при всех $n \geq N_1$ вып. $|a_n - a| < \varepsilon$ и $\exists N_2$ такой, что при всех $n \geq N_2$ вып. $|a_n - b| < \varepsilon$

пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда при $n \geq N$ вып. оба нер-ва: $|a_n - a| < \varepsilon$ и $|a_n - b| < \varepsilon$.

$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b|$. Получили противоречие. ∎

② **Теор** (о пределе постоянной) Если $a_n = C$ $\forall n$, то $\lim_{n\to\infty} a_n = C$.

Д-во: Выберем $\varepsilon > 0$. Пусть $N = 1$. Тогда при $n \geq N$ вып.

$|a_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$. В соответствии с определением предела получаем, что $\lim_{n\to\infty} a_n = C$. ∎

③ Понятие ограниченности сверху и снизу можно естественным образом обобщить на понятие послед-ти.

Опр. Числовая послед-ть $\{a_n\}$ наз. ограниченной сверху / снизу, если $\exists C$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq C$ ($a_n \geq C$).

Опр Числовая послед-ть $\{a_n\}$ наз. ограниченной, если $\exists m, M$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $m \leq a_n \leq M$.

Замечание. Ограниченность посл-ти $\{a_n\}$ экв-на огр-ти сверху посл-ти $\{|a_n|\}$.

Теор (об ограниченности сход. посл-ти). Всякая сходящаяся посл-ть ограничена.
Д-во: пусть $\{a_n\}$ сходится и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда для произв. ε $\exists N$: $\forall n > N$ вып. $|a_n - a| < \varepsilon$. Тогда для этих n

$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$.

Значит, $\forall n$ $|a_n| \le M$, где

$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, \varepsilon + |a|\}$.

Посл-ть $\{|a_n|\}$ огр. сверху $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ ограничена. ■

Замечание Отбрасывание конечного числа членов посл-ти не влияет ни на сходимость, ни на ограниченность посл-ти.

4 Теор. (о пределе неотриц. посл-ти) Пусть $\forall n > N_0$ $a_n \ge 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Тогда $A \ge 0$.
Д-во: от противного.
Пусть при выполнении условий теор $A < 0$. Тогда $\varepsilon = -A > 0$. Для этого ε $\exists N_1 : \forall n > N_1$
$|a_n - A| < -A \Rightarrow$

$$-(-A) < a_n - A < -A \quad | +A$$

$$2A < a_n < 0 \Rightarrow a_n < 0.$$

получили противоречие. ■

§3. Арифметические операции над сходящимися послед-тями.

Пусть даны послед-ти $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.
Опр. Посл-ти $\{a_n \pm b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ наз. соответ-но суммой, разностью, произведением или частным посл-тей.

Теор. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$.

Д-во: Пусть задано $\varepsilon > 0$.
Тогда для $\varepsilon/2 > 0$
$\exists N_1 : \forall n \geq N_1$ вып. $|a_n - A| < \varepsilon/2$
$\exists N_2 : \forall n \geq N_2$ вып. $|b_n - B| < \varepsilon/2$.
Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n \geq N$ выполнены оба нер-ва и
$|(a_n \pm b_n) - (A \pm B)| = |(a_n - A) \pm (b_n - B)| \leq$
$\leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
Отсюда по определению предела посл-ти получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

Теор. (о произведении и частном сходящихся послед-тей). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ (если $b_n \neq 0$ $\forall n$, $B \neq 0$). $\square$

§4. Фундаментальные посл-ти

Опр. Посл-ть наз. фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall m, n \geq N$ вып. $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Теор (критерий Коши сходимости посл-ти). Для того, чтобы посл-ть была сходящейся, необходимо и дост-но, чтобы она была фундаментальна.

Д-во: $(\Rightarrow)$ Необходимость.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда для $\varepsilon/2 > 0 \quad \exists N$ такой, что для $m, n \geq N$ вып.

$|x_m - a| < \varepsilon/2$ и $|x_n - a| < \varepsilon/2$.

Тогда $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow \{a_n\}$ фундам.

$(\Leftarrow)$ Достаточность

на самост. проработку. ■