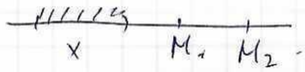
Лекция 3. Монотонные последовательности. Число e.

§1. Ограниченность числовых множеств.

Опр. Любое подмн-во X числового мн-ва действительных чисел $\mathbb{R}$ наз. числовым множеством.

Аксиома полноты множества $\mathbb{R}$. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ и $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ $a \le b$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A \ \forall b \in B \ a \le c \le b$.

Опр. Множество $X \subset \mathbb{R}$ наз. ограниченным сверху, если $\exists M : \forall x \in X \ x \le M$. При этом M наз. верхней гранью мн-ва X.



← верхние грани

Опр. Наименьшую верхнюю грань мн-ва X наз. точной верхней гранью. Т.о., число β наз. точной верхней гранью мн-ва $X \subset \mathbb{R}$, если

1) $\forall x \in X \ x \le \beta$ (β – верхняя грань)
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$ (если немного уменьшить β, то она перестанет быть верхней гранью). Обозн.: $\sup X = \beta$.

Теор (о точной верхней грани мн-ва X). Если $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, то $\exists \sup X$.

Д-во: Пусть Y — мн-во всех верхних граней мн-ва X. Тогда $\forall x \in X, \forall y \in Y \ x \le y$ $\Rightarrow$ (аксиома полноты) $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in X, \forall y \in Y$ $x \le c \le y$. Покажем, что $c = \sup X$.

1) $\forall x \in X \ x \le c$ (следствие акс. полноты)
2) Т.к. $x \le c \ \forall x \in X \Rightarrow c$ – верхняя грань $X \Rightarrow c \in Y$.

Т.к. $c \le y \ \forall y \in Y$, то c – наименьшая из всех верхних граней $\Rightarrow c = \sup X$. ■

Опр. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ наз. точной нижней ~~верхней~~ гранью мн-ва $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall x \in X \;\; x \geq \alpha$.

Опр. Наибольшую из всех нижних граней мн-ва X наз. точной ~~верх~~ нижней гранью.

Т.о. точная нижняя грань мн-ва $X \subset \mathbb{R}$ — это такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что

1) $\forall x \in X \;\; x \geq \alpha$ (α - нижняя грань)

2) $\forall \varepsilon > 0 : \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon \in (\alpha; \alpha+\varepsilon)$ или $x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$

Обозн.: $\inf X$

Теор. (о точной нижней грани числового мн-ва) Если $X \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, то $\exists \inf X$. □

§2. Монотонные последовательности.

Понятия монотонности из теории ф-й применимы к посл-тям.

Опр. Посл-ть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ наз. возр / убыв. / неубыв. / невозр, если $\forall n \in \mathbb{N}$ вып.
$a_{n+1} > a_n$ / $a_{n+1} < a_n$ / $a_{n+1} \geq a_n$ / $a_{n+1} \leq a_n$.
Опр. Посл-ть $\{a_n\}$ наз. монотонной, если она возр, убыв., неубыв. или невозр.
Опр посл-ть $\{a_n\}$ наз. строго монотонной, если она возр или убыв.

Теор. (о сходимости монотонной посл-ти).
Монотонная посл-ть сходится $\Leftrightarrow$ она огр

Д-во: ($\Rightarrow$) Необходимость
Следует из теор об огр-ти сход. посл-ти
($\Leftarrow$) Достаточность.
Пусть для опр-ти посл-ть $\{a_n\}$ неубыв. она ограничена. Огр-ть снизу не имеет значения, из огр-ти сверху следует по теор. о точной верхней грани, что мн-во чисел посл-ти имеет точную верхнюю грань M. Для числа M вып.
1) $\forall n \ \ a_n \leq M$
2) $\exists a_N$ такой, что $a_N > M - \varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0$.
Пусть для нек. $\varepsilon > 0$ нашли такой a_N, что $a_N > M - \varepsilon$. Для эл-тов посл-ти, у которых $n > N$, нер-во $a_n > M - \varepsilon$ будет так же вып., т.к посл-ть не убывает. Т.о, $\forall n \geq N$ имеем $M - \varepsilon < a_n \leq M$ или
$M - \varepsilon < a_n < M + \varepsilon \Rightarrow |a_n - M| < \varepsilon$.
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$, $\{a_n\}$ сходится. ■

Примеры. 1) $\{a_n = \frac{1}{n}\}$.
Посл-ть убывает, она огр. $\Rightarrow$ сходится
2) $\{a_n = n\}$
Посл-ть возр., но не огр. сверху $\Rightarrow$ расходится.

§3. Число e.

Рассмотрим послед-ть $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что она сходится. Для этого рассмотрим вспомогат. послед-ть $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и докажем, что она убыв.

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} \geq \left\{ \begin{array}{c} \text{нер-во Бернулли:} \\ (1+x)^n \geq 1+nx \end{array} \right\}$$

$$\geq \left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} = 1$$

$\Rightarrow y_n > y_{n+1} \Rightarrow$ посл-ть $\{y_n\}$ убывает

посл-ть огран. (сверху — своим первым эл-том, снизу — нулем), след-но, она сходится.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$. Таким же будет и предел посл-ти $\{x_n\}$. В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

Вычислять e научимся позднее.

$e \approx 2{,}7\underbrace{1828}_{\text{гр. Л.Н.Т.}}1828459045\ldots$

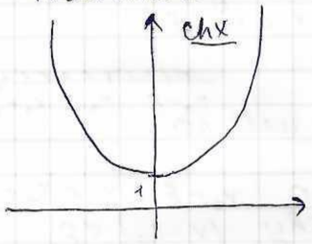
§4. ~~[illegible]~~ Гиперболические функции

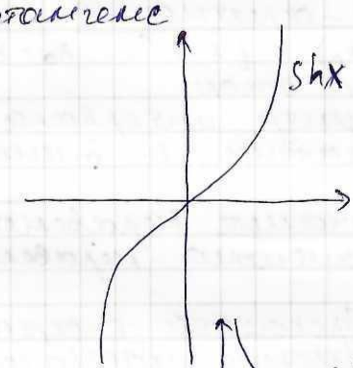
$ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

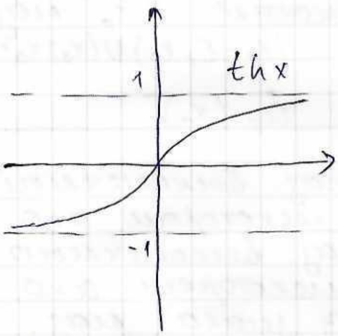
гиперб. косинус гиперб. синус

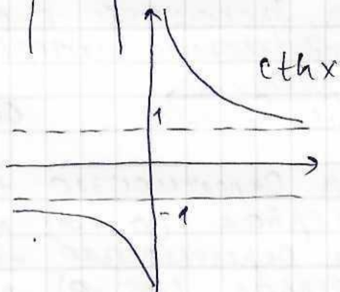
$th\,x = \dfrac{sh\,x}{ch\,x}$; $cth\,x = \dfrac{ch\,x}{sh\,x}$

тангенс котангенс









Свойства гиперб. функций похожи на соотв. свойства тригоном. функций. например,

$$sh\,(x \pm y) = sh\,x \cdot ch\,y \pm sh\,y \cdot ch\,x$$

$$ch\,(x \pm y) = ch\,x \cdot ch\,y \pm sh\,x \cdot sh\,y$$

Из последнего равенства при $x = y$, получим $\boxed{ch^2 x - sh^2 x = 1}$ – основное гиперболическое тождество

§ 5. Понятие окрестности точки.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$.

Опр. Окрестностью т. x_0 наз. любой интервал, содержащий т. x_0.

Обозн.: $U(x_0)$.

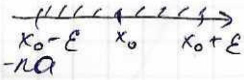
Опр. ε-окрестностью т. x_0 наз. множество

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$$

при этом

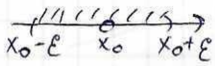
x_0 - центр интервала,

ε - радиус, 2ε - длина инт-ла



Замечание. Неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ эквивалентно неравенству $|x - x_0| < \varepsilon$.

Опр. Проколотой ε-окрестностью т. x_0 наз. объединение интервалов $(x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon)$



Обозн.: $\mathring{U}_\varepsilon(x_0)$.

Опр. Окрестностью $+\infty$ наз. бесконечный интервал $(a; +\infty)$ при некотором $a > 0$.

Опр. Окрестностью $-\infty$ наз. бесконечный интервал $(-\infty; -a)$ при некотором $a > 0$.

Опр. Окрестностью ∞ (без знака) наз. объединение интервалов $(-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$ для некоторого $a > 0$.