Лекция 4. Предел функции в точке

§1. Предел функции в точке

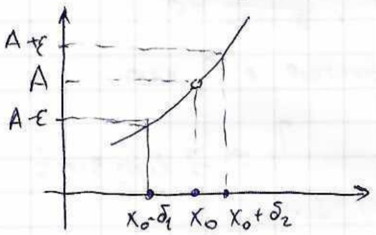
Опр. (по Коши). Число A наз. пределом ф-и $f(x)$ в т. x_0 (или при $x \to x_0$), если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0$
$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Обозн.: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Заметим, что $0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$,
$|f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Определение предела на языке окр-тей:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0: \; x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Геом. интерпретация: Для любой ε-окр-ти т. A найдется такая проколотая δ-окрестность т. x_0, что $\forall x$ из этой δ-окрестности, за исключением, возможно, самой точки x_0, значения ф-и лежат в этой ε-окрестности.



$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Опр (по Гейне). Число A наз. пределом ф-и $f(x)$ в т. x_0, если для любой последов-ти $\{x_n\}$, такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

вып. условие $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Теор. Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

Примеры.

1) Покажем, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

Пусть $\{x_n\}$ — послед-ть такая, что
1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, 2) $x_n \neq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow$ по опр-ю предела по Гейне $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

2) Покажем, что $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

1) пусть $x_n^{(1)} = \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$
Эта послед-ть сходится к 0 ; $\frac{1}{\pi n} \neq 0$

2) пусть $x_n^{(2)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \neq 0$

Эта послед-ть тоже сходится к 0, но

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} f(x_n^{(1)}) = \lim_{n\to\infty} \sin\pi n = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} f(x_n^{(2)}) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

§2. Свойства предела функции

① Теор (о единственности предела ф-ии в точке). Ф-я $f(x)$, определённая в окрестности т. x_0, может иметь не более одного предела в этой точке.

Д-во: От противного.
Пусть $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; $b = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; $a \neq b$.

Тогда $|a-b| > 0$. Для $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}$:

• $\exists \delta_1(\varepsilon): \forall x: 0 < |x-x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

• $\exists \delta_2(\varepsilon): \forall x: 0 < |x-x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда $\forall x: 0 < |x-x_0| < \delta$ выполняются оба нер-ва и
$|a-b| = |a - f(x) + f(x) - b| \leq |a - f(x)| + |f(x) - b| <$
$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b|$. Противоречие. ■

② Теор. (о локальной огран-ти функции, имеющей конечный предел). Для ф-ии $f(x)$, определённой в проколотой окр-ти т. x_0 и имеющей предел при $x \to x_0$, существует проколотая окр-ть этой точки, в кот. ф-я ограничена.

Д-во: Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Для произв. ε $\exists \delta > 0: \forall x: 0 < |x-x_0| < \delta : |f(x) - a| < \varepsilon$, и пусть эта δ-окрестность такова, что $f(x)$ определена в этой окр-ти. Тогда $\forall x: 0 < |x-x_0| < \delta$
$|f(x)| = |f(x) - a + a| \leq |f(x) - a| + |a| < \varepsilon + |a|. \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ф-я $f(x)$ ограничена в этой окр-ти. ■

③ Теор (о сохранении функцией знака своего предела). Пусть $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$. Тогда ф-я $f(x)$ положительна в некоторой проколотой окр-ти точки x_0.

Д-во: Для $\frac{a}{2} > 0$ $\exists \delta > 0$: при $0 < |x-x_0| < \delta$
$\Rightarrow |f(x) - a| < \frac{a}{2} \Rightarrow$
$-\frac{a}{2} < f(x) - a < \frac{a}{2} \quad | + a \Rightarrow \underbrace{\frac{a}{2} < f(x)} < \frac{3a}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) > \frac{a}{2} > 0$. в этой окр-ти. ■

④ <u>Теор.</u> <u>(о предельном переходе в нер-во).</u>
Пусть ф-и $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ т. x_0, причем $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$ выполнено усл-е $f(x) \geq g(x)$. Тогда, если эти функции имеют пределы $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то $a \geq b$.

<u>Д-во:</u> От противного.
Пусть, при выполнении условий ~~упр僅ленной~~ теоремы, $a < b$. Пусть $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Тогда
$\exists \delta_1$: при $\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

$\exists \delta_2$: при $\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$
Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a - \frac{(b-a)}{2}} < f(x) < a + (b-a)/2 \Rightarrow f(x) < (a+b)/2 \\ \underline{b - \frac{(b-a)}{2}} < g(x) < b + (b-a)/2 \Rightarrow g(x) > (a+b)/2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) < g(x).$$

Противоречие. ∎

<u>Замечание.</u> Если в условии теоремы нер-во заменить на строгое: $f(x) > g(x)$, то отсюда, вообще говоря, не следует, что $a > b$. Например, при $-1 < x < 1$ $|x| > x^2$, но $\lim\limits_{x \to 0} |x| = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

<u>Следствие</u> (<u>теор. о сохранении пределом знака функции</u>). Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $f(x) \geq a$ в некоторой окрестности т. x_0. Тогда $a \geq 0$.
<u>Д-во:</u> Пусть $g(x) = 0$ в предыдущей теореме.
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow a \geq 0$. ∎

⑤ <u>Теор (о пределе промежуточной функции)</u> — <u>"лемма о двух милиционерах"</u>. Пусть ф-и $f(x), g(x), h(x)$ определены в проколотой окрестности т. x_0, и пусть $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$ выполнено двойное неравенство: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, и пусть $\exists$ пределы: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.

Д-во: пусть выбрано $\varepsilon > 0$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Rightarrow \exists \delta_1(\varepsilon): \forall x: 0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a \Rightarrow \exists \delta_2(\varepsilon): \forall x: 0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |h(x)-a|<\varepsilon$

пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ выполняются оба неравенства. Тогда

$|f(x)-a|<\varepsilon \Rightarrow \underline{a-\varepsilon < f(x)} < a+\varepsilon$

$|h(x)-a|<\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon < \underline{h(x) < a+\varepsilon}$

$\Rightarrow a-\varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < a+\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon < g(x) < a+\varepsilon$

$\Rightarrow |g(x)-a| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a.$ ∎

⑥ Теор. (об арифм. операциях над функциями, имеющими предел). Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ $(B \ne 0,\ g(x) \ne 0\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0))$

Д-во: пусть $\{x_n\}$ — такая посл-ть, которая сходится к x_0. Согласно определению предела по Гейне $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$. Тогда, используя свойства операций с пределами, получим

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) \pm g(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)\cdot g(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A\cdot B$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)} = \dfrac{A}{B}$. ∎

Следствие. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$; $\forall c \in \mathbb{R}: \lim\limits_{x\to x_0} c f(x) = cA$.

Д-во: по предыдущей теореме для постоянной функции $g(x) = c$ получим $\lim\limits_{x\to x_0} c f(x) = cA$. ∎

7 <u>Теор</u> (<u>о пределе сложной функции</u>). Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ т. x_0 и принимает значения в проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}(y_0)$ т. y_0), причем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Тогда, если функция $g(y)$ определена на $\overset{\circ}{V}(y_0)$ и $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = a$, то и $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = a$.

<u>Д-во</u>: пусть задано $\varepsilon > 0$. Т.к. $\lim\limits_{x\to x_0} g(y) = a$, то для этого ε $\exists \delta > 0: \forall y: 0 < |y - y_0| < \delta$ вып. $|g(y) - a| < \varepsilon$. Для этого $\delta > 0$ $\exists \eta(\delta) > 0$: $\forall x: 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \delta$.

Поскольку $f(x) \in \overset{\circ}{V}(y_0)$ $(f(x) \neq y_0)$ выполнено $|f(x) - y_0| > 0$, то выполнено двойное неравенство $0 < |f(x) - y_0| < \delta$.

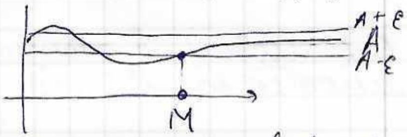
Итак, по заданному ε мы нашли $\eta(\varepsilon) > 0$: $\forall x: 0 < |x - x_0| < \eta$ вып. $0 < |f(x) - y_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |g(f(x)) - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = a$. ■

<u>Замечание</u>. Ограничение $f(x) \neq y_0$ можно отбросить, если $g(y)$ определена в т. y_0 и $g(y_0) = a$.

§3 Предел при бесконечном стремлении аргумента.

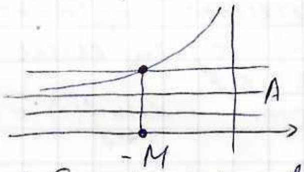
Опр. Число A наз. пределом ф-и $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Обозн.: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$



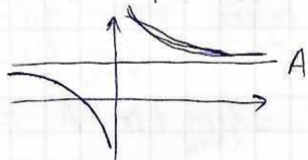
Опр. Число A наз. пределом ф-и $f(x)$ при $x \to -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x < -M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозн.: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$



Опр. Число A наз. пределом ф-и $f(x)$ при $x \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x : |x| > M \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозн.: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$



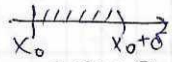
Замечание Если вспомнить определения окрестностей $+\infty, -\infty, \infty$, то общее определение предела на языке окрестностей записывается так:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$

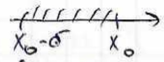
Здесь x_0 может быть как конечным, так и бесконечным.

§4. Односторонние пределы.

Опр. Правой δ-полуокрестностью т. $x_0 \in \mathbb{R}$ наз. множество $\mathcal{U}_\delta^+(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 < x < x_0+\delta\}$



Опр. Левой δ-полуокрестностью т. $x_0 \in \mathbb{R}$ наз. множество $\mathcal{U}_\delta^-(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0-\delta < x < x_0\}$



Опр. Число A наз. правым пределом (правосторонним пределом, пределом справа) ф-и $f(x)$ в т. x_0, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \forall x \in \mathcal{U}_\delta^+(x_0): |f(x)-A| < \varepsilon$.

Обозн.: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$.

Опр. Число A наз. левым пределом (левосторонним пределом, пределом слева) ф-и $f(x)$ в т. x_0, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \forall x \in \mathcal{U}_\delta^-(x_0): |f(x)-A| < \varepsilon$.

Обозн.: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$.

Теор $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \exists \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$. □

Замечание. 1) Введенные определения являются определениями по Коши. Определение по Гейне при $x\to\infty$ $(+\infty, -\infty)$ совпадает с обычным определением предела по Гейне, если считать, что посл-ть $\{x_n\}$ стремится к ∞ $(+\infty, -\infty)$. То же верно и для односторонних пределов.

2) Односторонние пределы можно так же записывать на языке окр-тей:
$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0: \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$,
если в качестве $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ считать соотв. полуокрестность.