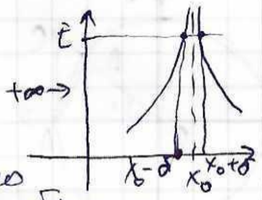
Лекция 5. Замечательные пределы

§1. Общее определение предела по Коши.

Опр. Говорят, что предел $f(x)$ при $x \to x_0$ равен $+\infty / -\infty / \infty$, если $\forall E > 0 \ \exists \delta(E) > 0$: $\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta$ вып. $f(x) > E \ / \ f(x) < -E \ / \ |f(x)| > E$.

Обозн.: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty / -\infty / \infty$.



Таким образом, общее определение предела по Коши может быть сформулировано на языке окрестностей след. образом:

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(\bar{x}) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

В зависимости от вида стремления и значения предела окрестности $\mathring{U}_\delta(\bar{x})$ и $U_\varepsilon(A)$ записываются различным образом.

$x \to \bar{x}$	$\mathring{U}_\delta(\bar{x})$
$x \to x_0$	$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$
$x \to x_0+$	$0 < x - x_0 < \delta$
$x \to x_0-$	$-\delta < x - x_0 < 0$
$x \to +\infty$	$x > \delta$
$x \to -\infty$	$x < -\delta$
$x \to \infty$	$\lvert x \rvert > \delta$

вместо δ выбирают др. обозн-е

A	$U_\varepsilon(A)$
a	$\lvert f(x) - a \rvert < \varepsilon$
$+\infty$	$f(x) > \varepsilon$
$-\infty$	$f(x) < -\varepsilon$
∞	$\lvert f(x) \rvert > \varepsilon$

вместо ε выбирают др. обозн-е

Пример $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = +\infty \iff \forall E > 0 \ \exists \delta(E) > 0$:

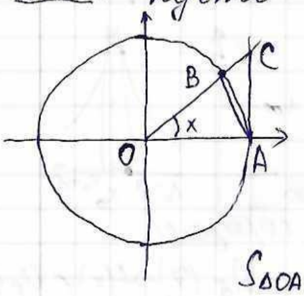
$\forall x: 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > E$.

§2. Первый замечательный предел

Теор (первый замеч. предел). Имеет место тождество

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Д-во: пусть $0<x<\pi/2$. Рассмотрим круг радиуса R с центром в начале координат, $\angle x = \angle BOA$ (рад. мера угла BOA), OA, OB — радиусы, $CA \perp OA$.



Из рисунка видно, что

$$S_{\Delta OAB} \le S_{\text{сект. } OAB} \le S_{\Delta AOC}, \text{ причем}$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}R^2 \sin x; \quad S_{\text{сект. } OAB} = \frac{1}{2}R^2 x;$$

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}R^2 \sin x \le \frac{1}{2}R^2 x \le \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$$

$$\sin x \le x \le \operatorname{tg} x$$

поделим на $\sin x > 0$ (т.к. $0<x<\frac{\pi}{2}$):

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$$

Входящие в это нер-во ф-ии чётные, а потому оно выполнено и при $-\frac{\pi}{2}<x<0$.

Заметим, что $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ $|\sin x| \le x$. Из этого следует, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, а значит, и $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. В самом деле, пусть возьмём $\varepsilon>0$, $\delta=\varepsilon$. Тогда, если $|x-x_0|<\delta$, то

$$|\sin x - \sin \underbrace{x_0}_{=0}| = 2\Big|\underbrace{\sin\frac{x-x_0}{2}}_{\le \frac{|x-x_0|}{2}} \cdot \underbrace{\cos\frac{x+x_0}{2}}_{\le 1}\Big| \le |x-x_0| < \delta = \varepsilon;$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\cdot 0 = 1.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1 \Rightarrow$ по теореме о пределе промежуточной функции

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1} \quad \blacksquare$$

§ 3. Следствия из первого зам. предела

① $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1.$

Д-во: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\frac{1}{1}=1.$ ∎

② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$

Д-во: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left\{\begin{matrix}\text{Замена}\\ \arcsin x=y\\ y\to 0\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$ ∎

③ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1.$

Д-во: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\left(\begin{matrix}\text{Замена}\\ \operatorname{arctg}x=y\\ y\to 0\end{matrix}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}y}=1.$ ∎

④ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

Д-во: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot 2}=$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\to 1}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\to 1}=\frac{1}{2}$ ∎

§ 4. Второй замечательный предел

Теор. (второй зам. предел). Имеет место р-во

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e} \quad \text{или} \quad \boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

Д-во: Ранее для пос-ти $\{x_n\}$ было доказано

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = [x]$ – целая часть числа x. $\forall x > 0$ $[x] \le x < [x]+1$.
Отсюда следует, что

$$\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]}. \text{ Тогда}$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

обозначим $g_1(n) = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$; $g_2(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow$

$$g_1([x]) < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < g_2([x])$$

$$\lim_{n\to\infty} g_1(n) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = e/1 = e.$$

$\lim_{n\to\infty} g_2(n) = e$ (см. вывод числа e в лек. 3)

Значит, по теореме о пределе промеж. функции

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

При $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left\{\begin{matrix} x=-t \\ t\to+\infty\end{matrix}\right\} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t = \underbrace{\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}}_{\to e} \cdot \underbrace{\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)}_{\to 1} =$$

$$= e\cdot 1 = e.$$

Второе рав-во д-ся из первого:

4 $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left|\begin{matrix} x=\frac{1}{y} \\ y\to\infty\end{matrix}\right| = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e. \blacksquare$$

§ 5. Следствия из второго зам. предела.

① $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$.

Д-во: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

$= \log_a \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$ ∎

② $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Д-во: следствие ① при $a = e$. ∎

③ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Д-во: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \left\{\begin{matrix} a^x - 1 = y \\ y \to 0 \\ x = \log_a(1+y) \end{matrix}\right\} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} =$

$= \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\log_a(1+y)}{y}} = \frac{1}{1/\ln a} = \ln a$. ∎

④ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Д-во: следствие ③ при $a = e$. ∎