(б.м.ф.)

Лекция 6. Бесконечно малые функции.

§1. Понятие б.м.ф.

Опр. Ф-ия $\alpha(x)$ наз. бесконечно малой (б.м.) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, т.е. если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$.

Теор. (о связи функции, её предела и б.м.)
$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — некоторая б.м. при $x \to x_0$.

Д-во: ($\Rightarrow$) Необходимость.
$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Значит, для фиксированного $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0: \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ вып. $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Пусть $\alpha(x) = f(x) - A$. Тогда $|\alpha(x)| < \varepsilon \Rightarrow \alpha(x)$ - б.м. при $x \to x_0$. Значит, $f(x) = A + \alpha(x)$.
($\Leftarrow$) Достаточность.
Дано $f(x) = A + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ - б.м. при $x \to x_0$.
По теор. об арифм. операциях над ф-ями, имеющими предел:
$$\lim_{x \to x_0} (A + \alpha(x)) = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A. \ \blacksquare$$

§2. Свойства б. м. функций.

① **Теор.** (о сумме конечного числа б. м.)
Пусть $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ — б. м. при $x \to x_0$. Тогда ф-я $\alpha_1(x) \pm \dots \pm \alpha_n(x)$ — б. м. при $x \to x_0$.
Д-во: по теор. об арифм. операциях над ф-ями, имеющими предел
$$\lim_{x\to x_0} (\alpha_1(x) \pm \dots \pm \alpha_n(x)) = \lim_{x\to x_0} (\alpha_1(x)) \pm \dots \pm \lim_{x\to x_0}(\alpha_n(x)) =$$
$$= 0 \pm \dots \pm 0 = 0. \blacksquare$$

② **Теор.** (о произведении б. м. на огранич.)
Пусть $\alpha(x)$ — б. м. при $x \to x_0$, $f(x)$ — огр. в некоторой окрестности $\mathring{U}_{\delta_1}(x_0)$. Тогда $\alpha(x) \cdot f(x)$ — б. м. при $x \to x_0$.
Д-во: $f(x)$ ограничена в $\mathring{U}_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow$ в этой окрестности $|f(x)| \le M$.
Пусть выбрали $\varepsilon > 0$.
$\alpha(x)$ — б. м. $\Rightarrow$ для числа $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ $\exists \delta_2 > 0: \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0)$ вып. $|\alpha(x)| < \varepsilon/M$.
Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда в $\mathring{U}_\delta(x_0)$ вып. оба условия. Тогда $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$:
$|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \Rightarrow$ ф-я $\alpha(x) \cdot f(x)$ — б. м. при $x \to x_0$. $\blacksquare$

③ **Опр.** Ф-я $\varphi(x)$ наз. бесконечно большой (б. б.) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$.

Теор (о связи м/у б. м. и б. б.) Ф-я $\alpha(x)$ б. м. при $x \to x_0 \iff 1/\alpha(x)$ — б. б. при $x \to x_0$.
Д-во: ($\Rightarrow$) необходимость.
Если $\alpha(x)$ — б. м., то для некоторого фикс. $E > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ вып. $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Пусть задано $E > 0$, возьмем ε такое, что $\varepsilon < 1/E$. Тогда из усл-я $|\alpha(x)| < \varepsilon$ следует $|1/\alpha(x)| > 1/\varepsilon > E$, т. е. $1/\alpha(x)$ — б. б. при $x \to x_0$.
($\Leftarrow$) Достаточность
Д-ся аналогично. $\blacksquare$

§3. Сравнение б.м. при заданном стремлении.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$, не обращаются в 0 в $\mathring{U}_\delta(x_0)$.

Опр. Говорят, что $\varphi(x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с $\psi(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$.

Обозн.: $\varphi(x) = o(\psi(x))$

Опр. Говорят, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют одинаковый порядок малости, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = C, \ C < \infty, \ C \neq 0.$$

Опр. б.м. $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ наз. эквивалентными при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$ Обозн.: $\varphi(x) \sim \psi(x)$ (при $x \to x_0$).

Из замечательных пределов и следствий к ним при $x \to 0$:

$\sin x \sim x$	$a^x - 1 \sim x \ln a$
$\mathrm{tg}\, x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$\log_a (1+x) \sim x/\ln a$
$\mathrm{arctg}\, x \sim x$	$\ln (1+x) \sim x$
$1 - \cos x \sim x^2/2$	

Опр. Если $\nexists$ ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, то $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ наз. несравнимыми б.м. при $x \to x_0$.

Пример. $\alpha(x) = x \,\mathrm{arctg} \frac{1}{x}$ и $\beta(x) = x$ – несравнимые б.м. при $x \to 0$.

§4. Свойства эквивалентных бесконечно малых.

① **Теор.** (о транзитивности отношения экв-ти б.м.). Отношение экв-ти б.м. обладает свойством транзитивности: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$, а $\psi(x) \sim \eta(x)$ при $x \to x_0$, то $\varphi(x) \sim \eta(x)$ при $x \to x_0$.

Д-во: Дано: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$; $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\psi(x)}{\eta(x)} = 1$.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\eta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{\psi(x)}{\eta(x)} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(x) \sim \eta(x)$. ■

② **Теор.** (о необх. и дост. условии экв-ти б.м.) Бесконечно малые $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ экв-ны при $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ их разность имеет более высокий порядок малости по срав-ю с каждой из них.

Д-во: ($\Rightarrow$) необходимость.

Пусть $\varphi(x) \sim \psi(x)$ при $x \to x_0$ $\Rightarrow \lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$.

По теор. о связи ф-и, её предела и б.м. получаем $\varphi(x)/\psi(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

$\Rightarrow \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1 + \alpha(x) \Rightarrow \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\psi(x)} = \alpha(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\psi(x)} \right) = 0 \Rightarrow \varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x))$.

Аналогично $\varphi(x) - \psi(x) = o(\varphi(x))$.

($\Leftarrow$). Достаточность.

Имеем $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\psi(x)} = 0$; $\lim \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\varphi(x)} = 0$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\psi(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1 \right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$.

$\Rightarrow \varphi(x) \sim \psi(x)$ при $x \to x_0$. ■

③ **Теор.** (об использовании экв. б.м. при вычислении предела). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б.м. при $x \to x_0$. Пусть $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \to x_0$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = A$, то и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Д-во: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(x)}{g(x)} = 1 \cdot A = A$. ■

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$

(4) Теор. Пусть $\alpha(y) \sim \beta(y)$ при $y\to y_0$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $f(x) \neq y_0$ в $\mathring{U}_\delta(x_0)$. Тогда $\alpha(f(x)) \sim \beta(f(x))$ при $x\to x_0$.

Д-во: по теореме о пределе сложной ф-ии

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(f(x))}{\beta(f(x))} = \left\{ \begin{matrix} y=f(x) \\ x\to x_0 \Rightarrow \\ y\to y_0 \end{matrix} \right\} = \lim_{y\to y_0} \frac{\alpha(y)}{\beta(y)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(f(x)) \sim \beta(f(x)). \ ■$$

Пример. $e^y - 1 \sim y$, $y = \sin x$, $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{\sin x} - 1 \sim \sin x$ при $x\to 0$.

(5) Теор. (о сумме б.м. разных порядков) Пусть $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \dots + \alpha_n(x)$, где $\alpha_k(x)$ – б.м. при $x\to x_0$, $k=\overline{1,n}$, и $\alpha_k = o(\alpha_1(x))$, $k=\overline{2,n}$, при $x\to x_0$. Тогда $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$.

Д-во:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} + \dots + \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 1 + 0 + \dots + 0 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(x) \sim \alpha_1(x) \text{ при } x\to x_0. \ ■$$

Замечание. Бесконечно малую $\alpha_1(x)$ наз. главной частью $\alpha(x)$ при $x\to x_0$. При сравнении б.м. в качестве эталона берут б.м. $A(x-x_0)^k$, если x_0 конечно, и A/x^k, если $x\to\infty$.

Пример. Для $\alpha(x) = (1+x)^n - 1$ найти эквив. б.м. вида Ax^k при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{Ax^k} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{Ax^k} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{n\ln(1+x)} - 1}{Ax^k} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{n\ln(1+x)}{Ax^k} = \lim_{x\to 0} \frac{nx}{Ax^k} = 1 \text{ при } A=n,\ k=1.$$

$$\Rightarrow \boxed{(1+x)^n - 1 \underset{x\to 0}{\sim} nx}$$

В частности $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$

Опр. Число r наз. порядком малости ф-ии $\alpha(x)$ по сравнению с $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r} = C$, $C<\infty$, $C\neq 0$.

В этом случае $\alpha(x) \sim C(\beta(x))^r$ и $C(\beta(x))^r$ – главная часть ф-ии $\alpha(x)$.

§5. Бесконечно большие функции.

Пусть $f(x)$, $g(x)$ – б.б. при $x \to x_0$.

Опр Если $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, то $f(x)$ и $g(x)$ наз. бесконечно большими одного порядка при $x \to x_0$.

Опр. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, то $f(x)$ наз. б.б. более высокого порядка, чем $g(x)$.

обозн.: $g(x) = o(f(x))$, $x \to x_0$ (?)

Опр Если $\nexists$ ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, то б.б. $f(x)$ и $g(x)$ наз. несравнимыми б.б. при $x \to x_0$.

Свойства б.б.ф. экв-ны свойствам б.м.ф.

Опр. Число k наз. порядком роста ф-и $f(x)$ отн-но $g(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^k} = C$.

В этом случае $f(x) \sim C(g(x))^k$ и ф-ло $C(g(x))^k$ можно назвать главной частью ф-и $f(x)$. Для сравнения выбирают ф-и $g(x) = 1/x-x_0$, если x_0 конечно и $g(x) = x$, если $x \to \infty$.

Пример Найти для $f(x) = x^5 + 2x^{5/2} + 1$ эквивалентную б.б. вида Ax^k при $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + 2x^{5/2} + 1}{x^k} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + 2x^{-5/2} + 1/x^5}{x^{k-5}} = 1$$

при $k = 5 \Rightarrow f(x) \sim x^5$ при $x \to +\infty$.