Лекция 7. Непрерывность функций.

§1. Непрерывность функции в точке.

Пусть $f(x)$ опр-на в окр-ти $U(x_0)$.

Опр. 1. $f(x)$ наз. непр. в т. x_0, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если последнее рав-во расписать на языке ε-δ, получим

Опр. 2. $f(x)$ наз. непр. в т. x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Пусть $\Delta x = x - x_0$ таково, что $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$.

Опр. Приращением ф-и $y = f(x)$ в т. x_0, соотв. приращению арг-та Δx, наз. $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Тогда из опр. 2 получим, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |\Delta x| < \delta$, то $|\Delta y| < \varepsilon$.

Опр. 3. $f(x)$ непр. в т. x_0, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Кроме того, можно дать опр-е непр-ти, основываясь на опр-и по Гейне.

Примеры

1) $f(x) = c$ непр. в $\forall x_0$.

Д-во: возьмем произв. $\varepsilon > 0$, пусть $\delta = \varepsilon$, тогда $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) $f(x) = x$ непр в $\forall x_0$.

Д-во: возьмем произв. $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$, тогда $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

3) $f(x) = \sin x$ непр. в $\forall x_0$.

Пусть $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$

$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\Delta y| = 2 \underbrace{\left|\sin \frac{\Delta x}{2}\right|}_{\le \frac{\Delta x}{2}} \cdot \underbrace{\left|\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right|}_{\le 1} \le 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$$

Таким образом, $|\Delta y| \le |\Delta x|$ при $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$, т.е. $y = \sin x$ непр. в $\forall x_0$.

§2. Локальные свойства непр. функций

① Теор. (о непр-ти суммы, произв-я и частного непр. ф-ий) Пусть ф-ии $f(x)$ и $g(x)$ непр. в т. x_0. Тогда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ (при условии $g(x_0) \neq 0$) непр. в т. x_0.

Д-во: Вытекает из св-в пределов и опред-я непр-ти функций. Например,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}. \blacksquare$$

② Теор (о непр-ти сложной функции) Пусть ф-я $f(x)$ опр. в окр-ти т. x_0 и принимает значения в окр-ти $V(y_0)$ т. $y_0 = f(x_0)$ и пусть на $V(y_0)$ опр-на ф-я $g(y)$. Тогда, если $f(x)$ непр. в т. x_0, а $g(y)$ непр. в т. y_0, то сложная ф-я $g(f(x))$ непр. в т. x_0.

Д-во: по теор. о пределе сложной ф-ии в силу непр-ти $f(x)$ в т. x_0 имеем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$, а при $y \to y_0$ имеем $g(y) \to g(y_0)$. Поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g(f(x_0))$, т.е. $g(f(x))$ непр. в т. x_0. $\blacksquare$

Замечание Требование $f(x) \neq y_0$ можно отбросить, т.к. $g(y)$ опр-на в т. y_0 и $g(y_0) = \lim\limits_{y \to y_0} g(y)$.

③ Теор. (о сохранении знака непр. ф-ии) Пусть ф-я $f(x)$ непр. в т. x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окр-ти т. x_0 ф-я $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$.

Д-во: пусть для опр-ти $f(x_0) > 0$. Тогда по теореме о сохр-и ф-ей знака своего предела нер-во $f(x) > 0$ будет выполняться и в некоторой окр-ти т. x_0. $\blacksquare$

§3. Непрерывность основных элем. функций

Все основные элем. функции непр. в каждой точке своей области определения.
Докажем непр-ть некоторых элем. ф-й

① $f(x) = x$ непр. в $\forall x_0$
Д-во: Возьмем произв. $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$, тогда при $|x - x_0| < \delta$ имеем
$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ∎

② $f(x) = \sin x$ непр. в $\forall x_0$
Д-во: Возьмем произв. $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$, при д-ве 1-го замеч. предела было д-но, что $\forall x$ $|\sin x| \le |x|$. Значит, $\forall x : |x - x_0| < \delta$ имеем
$\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})$.

$$|\Delta y| = \Big|\underbrace{2\sin\frac{\Delta x}{2}}_{\le \frac{|\Delta x|}{2}}\underbrace{\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})}_{\le 1}\Big| \le 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} \cdot 1 = |\Delta x| < \delta = \varepsilon.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Rightarrow f(x)$ непр. ∎

③ $f(x) = \sum\limits_{s=0}^{n} a_s x^s = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Д-во: по теор. о непр-ти суммы и произв-я:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{s=0}^{n} a_s x^s = \sum_{s=0}^{n} \lim_{x \to x_0} a_s x^s = \sum_{s=0}^{n} \lim_{x \to x_0} a_s x^s =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} a_s \cdot \lim_{x \to x_0} x^s = \sum_{s=0}^{n} a_s \cdot x_0^s = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x).$$ ∎

Пример. Ф-и $y = \operatorname{sign} x$, $y = [x]$ не явл. непр. в т. $x = 0$. Они не элементарны.

Аналогично можно д-ть непр-ть других элементарных ф-й.

§4. Классификация точек разрыва

Опр. Точку $x_0 \in \mathbb{R}$ наз. точкой разрыва ф-и $f: X \to \mathbb{R}$, если ~~оно~~ ф-я $f(x)$ опр-на в $U_\delta(x_0)$ и $f(x)$ либо не опр в т. x_0, либо не явл. непр. в т. x_0.

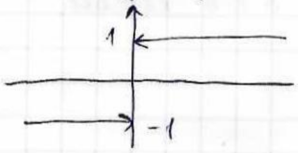
Пусть x_0 — точка разрыва ф-и $f(x)$.

① Опр. Если в т. x_0 сущ-ют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, причем $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, то т. x_0 наз. точкой устранимого разрыва ф-и $f(x)$.

Пример. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x=0$ — т. устр разрыва

② Опр. Если в т. x_0 сущ-ют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, но $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, то т. x_0 наз. точкой разрыва I рода

Пример. $y = \operatorname{sgn} x$, т. $x=0$ — т.р. I рода



③ Опр. Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ $\nexists$ или $=\infty$, то т. x_0 наз. точкой разрыва II рода.

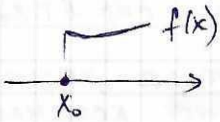
Пример. $y = e^{\frac{1}{x}}$, $x=0$ — точка разрыва

$\lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = [e^{+\infty}] = +\infty$

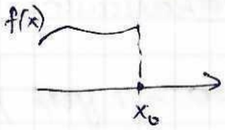
$\lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = [e^{-\infty}] = 0.$

§5. Односторонняя непрерывность

<u>Опр.</u> Ф-ия $f(x)$ наз. <u>непр.</u> <u>в т. x_0</u> <u>справа</u>, если $f(x)$ опр-на в $[x_0; x_0+\delta)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.



<u>Опр.</u> Ф-ия $f(x)$ наз. <u>непр.</u> <u>в т. x_0</u> <u>слева</u>, если $f(x)$ опр-на в $(x_0-\delta; x_0]$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$.



<u>Опр.</u> Ф-ия $f(x)$ наз. <u>непр</u> <u>в интервале</u> $(a;b)$, если она непр. в каждой точке этого интервала.

<u>Опр</u> Ф-ия $f(x)$ наз. <u>непр</u> на отрезке $[a;b]$, если она непр в интервале $(a;b)$, а также в т. a справа и в т. b слева.

§6. Свойства ф-й, непр. на отрезке.

① **Теор** (Вейерштрасса об огр-ти непр. на отрезке ф-и). Если ф-я $f(x)$ непр. на отрезке $[a;b]$, то она огр. на этом отрезке и достигает на нем своих наибольших и наименьших значений. □

Замечание. Для пром-ков, не явл. отрезками, условия теор могут не выполняться. Например, $f(x) = 1/x$ непр., но не огр. на $(0;1)$. $f(x) = x$ непр. и огр. на $(0;1)$, но не имеет на этом интервале своих наиб. и наим. значений.

② **Теор** (1-я теорема Больцано-Коши). Пусть ф-я $f(x)$ непр на $[a;b]$ и достигает на концах отрезка значений разных знаков. Тогда $\exists c \in (a;b) \cdot f(c) = 0$.

Д-во: Пусть $U = \{x \in [a;b] : f(x) < 0\}$.
U огр. сверху, т.к. $\forall x \in U \quad x < b \Rightarrow \exists \sup U = c$.
Покажем, что $f(c) = 0$. От противного.
Если $f(c) < 0$, то по св-ву непр. функций $f(x) < 0 \quad \forall x \in [c; c+\delta)$, но тогда c не явл. верхней гранью U.
Если $f(c) > 0$, то по св-ву непр. функций $f(x) > 0 \quad \forall x \in (c-\delta; c]$, но тогда c не явл. точной верхней гранью U. $\Rightarrow f(c) = 0$. ∎

③ **Теор** (2-я теорема Больцано-Коши). Пусть $f(x)$ непр. на $[a;b]$; $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть C – любое число м/у A и B. Тогда $\exists x_c \in (a;b) : f(x_c) = C$.

Д-во: Пусть, например, $A < B$. Тогда ф-я $F(x) = f(x) - C$ удовл. условиям первой теор. Больцано-Коши, т.к. $A < C < B$ и

$F(a) = f(a) - C = A - C < 0$
$F(b) = f(b) - C = B - C > 0$
$\Rightarrow \exists x_c \in (a;b) : F(x_c) = 0 \Leftrightarrow f(x_c) = C$. ∎

④ **Теор** (о непр-ти обратной функции). Пусть ф-я $f(x)$ опр., непр. и возр. на $[a; b]$. Тогда на отрезке $[f(a); f(b)]$ определена обратная ф-я $f^{-1}(y)$, кот. непр. и возр. на этом отрезке. □

Замечание. Возр. ф-ю в форм-ке теор. можно заменить на убывающую. Отрезки $[a; b]$, $[f(a), f(b)]$ можно заменить интервалами $(a; b)$ и $(f(a+0), f(b-0))$, где $f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$, $f(b-0) = \lim\limits_{x \to b-} f(x)$, причем посл. интервалы м.б. и бесконечными.

7

§ 7. Асимптоты графика функции.

Опр Пусть ф-я $f(x)$ опр-на в некоторой проколотой окр-ти т. x_0. Прямая $x = x_0$ наз. вертикальной ас-той графика ф-ии $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ равны ∞.

Пример. $x = 0$ — вертик. ас-та $y = \log_a x$, $y = ctg x$.

Опр Пусть $f(x)$ опр-на при $x > x_0$. Прямая $y = a$ наз. правой гор. ас-той графика ф-ии $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

Аналогично опр-ся левая гор ас-та

Пример. $y = 0$ — правая и левая гор. ас-та графика ф-ии $y = 1/x$;

$y = 0$ — левая гор ас-та $y = a^x$, $a > 1$.

$y = \pm\frac{\pi}{2}$ — правая/левая гор. ас-та $y = arctg x$

Опр Пусть функция $f(x)$ определена при $x > x_0$. Если $f(x) = Ax + B + \alpha(x)$ при $x \to +\infty$, где $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$, то прямая $y = Ax + B$ наз. правой наклонной ас-той графика ф-ии $f(x)$.

Аналогично определяется левая наклонная ас-та.

Замечание. Гор. ас-та явл. частным случаем наклонной при $A = 0$.

Пример $y = \pm x$ — асимптоты гип-лы $y^2 - x^2 = 1$.

Теор (о необх и дост. условии наличия наклонной асимптоты). Пусть ф-я $f(x)$ определена при $x > x_0$. Прямая $y = Ax + B$ явл. правой наклонной ас-той графика ф-ии $f(x)$ $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = A; \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - Ax) = B.$$

Д-во: ($\Rightarrow$) Необходимость.

Пусть $y = Ax + B$ – правая накл. асимптота графика ф-и $f(x)$. Тогда по определению $f(x) = Ax + B + \alpha(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$. Отсюда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{Ax + B + \alpha(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \Big(A + \underbrace{\frac{B}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\alpha(x)}{x}}_{\to 0}\Big) = A$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x \to +\infty} (B + \underbrace{\alpha(x)}_{\to 0}) = B.$$

($\Leftarrow$) Достаточность.

Пусть $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - Ax) = B$. Тогда по теор о связи ф-и, её предела и б.м. имеем $f(x) - Ax = B + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to +\infty$ $\Rightarrow f(x) = Ax + B + \alpha(x)$, т.е. $y = Ax + B$ – правая накл. ас-та $f(x)$. ∎

9