Лекция 8. Понятие производной

§1. Производная функции в точке.

Пусть ф-я $f(x)$ опр-на в $U(x_0)$ т. x_0.
Пусть $\Delta x = x - x_0$ – приращение арг-та в т. x_0, $x \in U(x_0)$, $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ – соотв. приращение функции

<u>Опр.</u> Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то его наз. <u>производной</u> ф-и $y = f(x)$ в т. x_0.
Обозн.: $f'(x_0)$, y'

<u>Пример</u> $y = x^3$

$$\Delta y = (x_0+\Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x_0^2$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

<u>Опр.</u> Ф-ия $f(x)$ наз. <u>дифференцируемой</u> в т. x_0, если ее приращение в т. x_0 м. б. представлено в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \ A = const$$

<u>Теор</u> (о необх. и дост. условиях диф-ти ф-и в точке) Ф-я $f(x)$ диф-ма в т. x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists$ производная $f'(x)$ в этой точке.

Д-во: ($\Rightarrow$) <u>Необходимость.</u>
$f(x)$ диф-ма в т. x_0. Значит, её приращение представляется в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x). \text{ Тогда}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = A = f'(x_0) \Rightarrow \exists f'(x_0).$$

($\Leftarrow$) <u>Достаточность</u>
Пусть $\exists f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.
По теор о связи ф-и, её предела и б.м.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1) \Rightarrow \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \ \blacksquare$$

Замечание. Из д-ва этой теор. следует, что приращение диф-мой ф-и м. б. представлено в виде

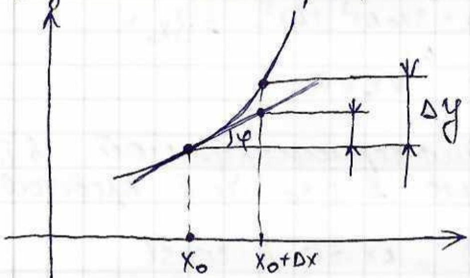
$$\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x).$$

(*) Теор. о связи непр-ти и диф-ти.

§2. Геометрический смысл производной

Пусть имеется плоская кривая, и на ней взяты 2 точки M и M', $M \neq M'$. Проведем секущую MM'. Далее т. M' устремим к т. M. Если секущая при этом стремится занять некоторое предельное положение, то такое пол-е наз. касательной к кривой в т. M.

Пусть дана ф-я $f(x)$, опр-ная в окр-ти т. x_0, пусть $M(x_0; f(x_0))$ - точка на графике ф-и. Возьмем на графике точку $M'(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$.



Тангенс угла наклона хорды MM':

$$tg\,\varphi = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ хорда занимает предельное положение — касательную к графику ф-и $f(x)$ в т. x_0.

Значит, тангенс угла наклона кас-ой:

$$tg\,\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Таким образом, $tg\,\varphi = f'(x_0)$ - геом. смысл производной.

Уравнение касательной к графику ф-и $f(x)$ в т. x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Опр. Нормалью к графику ф-и $f(x)$ в т. x_0 наз. прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ перпендикулярно касательной.

Уравнение нормали к гр-ку ф-и $f(x)$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

или $$(x - x_0) + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0.$$

§3. Бесконечная производная

Если ф-я $f(x)$ опр-на в окр-ти т. x_0 и если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\infty,$$

то говорят, что в т. x_0 ф-я $f(x)$ имеет бесконечную производную. Геометрически наличие бесконечной производной означает, что касательная к графику ф-и $f(x)$ вертикальна.

Теор (о непр-ти диф ф-и) Пусть ф-я $f(x)$ диф-ма в т. x_0. Тогда она непр. в т. x_0.

Д-во: Из условия диф-ти ф-и $f(x)$ в т. x_0 получим

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \quad A = const \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + o(\Delta x)) = 0. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ф-я $f(x)$ непр. в т. x_0. ■

Замечание. Таким образом, непр-ть явл. необходимым условием диф-ти. Обратное в общем случае неверно: из непр-ти не следует диф-ть.

§4. Односторонние производные

Пусть ф-я $f(x)$ опр-на в окр-ти $[x_0; x_0+\delta)$, Δx – приращение аргумента, Δy – соответств. приращение функции

Опр. Если $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то его наз. правой производной ф-и $f(x)$.

обозн.: $f'_+(x_0)$.

Пусть теперь ф-я $f(x)$ опр-на в $(x_0-\delta; x_0]$.

Опр. Если $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то его наз. левой производной ф-и $f(x)$.

Обозн.: $f'_-(x_0)$.

Замечание. $\exists f'(x_0) = A \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = A$

Пример. $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, $f'(0)$ – ?

Если $\Delta x > 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

Если $\Delta x < 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$

$\Rightarrow$ ф-я $f(x) = |x|$ не диф-ма в т. x_0.

При этом $y = |x|$ явл. непр. в т. $x=0$.

§5. Правила дифференцирования

① **Теор** (о производной постоянной) $C' = 0$.

Д-во: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{C - C}{\Delta x} = 0$. ■

② **Теор** (о производной суммы, разности, произведения и частного диф. ф-ий). Пусть ф-и $f(x)$ и $g(x)$ диф-мы в т. x_0. Тогда в этой точке также диф-мы ф-и $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ (последнее при $g(x_0) \neq 0$), причем

1) $(f(x) \pm g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.

2) $(f(x) \cdot g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0} = \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Д-во: 1) $(f(x) \pm g(x))'_{x=x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x}\Big[f(x_0+\Delta x) \pm g(x_0+\Delta x) -$

$- (f(x_0) \pm g(x_0))\Big] = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x}\Big[(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) \pm (g(x_0+\Delta x) - g(x_0))\Big] =$

$= f'(x_0) \pm g'(x_0)$.

2) $(f(x) \cdot g(x))'_{x=x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x}\Big[f(x_0+\Delta x)\, g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\, g(x_0)\Big] =$

$= \Big\{ - f(x_0)\, g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\, g(x_0+\Delta x) \Big\} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x}\Big[f(x_0+\Delta x)\, g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\, g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\, g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\, g(x_0)\Big] =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Big[\underbrace{\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x_0+\Delta x)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \cdot \underbrace{\dfrac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}}_{\to g'(x_0)}\Big] =$

$= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$.

3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x}\left(\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{приведение} \\ \text{к общему} \\ \text{знам-лю}\end{matrix}\right\}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x}\left(\dfrac{f(x_0+\Delta x)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0+\Delta x)}{g(x_0)\, g(x_0+\Delta x)}\right) = \left\{\begin{matrix}-f(x_0)\, g(x_0) + \\ + f(x_0)\, g(x_0)\end{matrix}\right\} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x}\left(\dfrac{f(x_0+\Delta x)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0+\Delta x)}{g(x_0)\, \underbrace{g(x_0+\Delta x)}_{\to g(x_0)}}\right) =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{g^2(x_0)}\left(\underbrace{\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}_{\to f'(x_0)} \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot \underbrace{\dfrac{g(x_0) - g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}}_{\to -g'(x_0)}\right) =$

$= \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$. ■

Следствие. $(C f(x))' = C f'(x)$.

5

③ Теор (о производной сложной функции). Пусть $y=f(x)$ диф-ма в т. x_0, $z=g(y)$ диф-ма в т. $y_0=f(x_0)$. Тогда ф-я $g(f(x))$ диф-ма в т. x_0 и $(g(f(x)))'_{x=x_0} = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$.

Д-во: Пусть Δx - приращение аргумента в т. x_0, Δy - соотв. приращ-е ф-и $y=f(x)$, Δz - соответств. Δy приращение ф-и $z=g(y)$.

Т.к. $z=g(y)$ диф-ма в т. y_0, то

$$\Delta z = g'(y_0)\cdot\Delta y + \alpha(\Delta y)\cdot\Delta y,\quad \alpha(\Delta y)\to 0 \text{ при } \Delta y\to 0.$$

Поделим на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$:

$$\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}}_{=(g(f(x)))'_{x=x_0}} = g'(y_0)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}_{=f'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}}_{\to 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g(f(x)))'_{x=x_0} = g'(y_0)\cdot f'(x_0).\ \blacksquare$$

④ Теор (о производной обратной ф-и). Пусть $f(x)$ осуществляет взаимно-однозначное отобр-е $U(x_0)$ в $V(y_0)$, причем $y_0=f(x_0)$ и обратная ф-я $f^{-1}(y)$ непр. в т. y_0. Тогда, если $\exists f'(x_0)\neq 0$, то $\exists (f^{-1})'(y_0)$, причем

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Д-во: $$(f^{-1}(y))'_{y=y_0} = \lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{замена}\\ y=f(x)\Rightarrow f^{-1}(y)=x\\ y\to y_0\Rightarrow x\to x_0\end{array}\right\} = \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)} =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)}.\ \blacksquare$$