Лекция 9. Таблица производных.

Дифф-е функций, заданных неявно и параметрически

§1. Таблица производных осн. элем. ф-й

① $(e^x)' = e^x$

<u>Д-во</u>: $(e^x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x$ ■

② $(a^x)' = a^x \ln a$

<u>Д-во</u>: $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$. ■

③ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

<u>Д-во</u>: $(\ln x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x}$. ■

④ $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

<u>Д-во</u>: $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. ■

⑤ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

<u>Д-во</u>: $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. ■

⑥ $(\sin x)' = \cos x$

<u>Д-во</u>: $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x$. ■

⑦ $(\cos x)' = -\sin x$

<u>Д-во</u>: $(\cos x)' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$. ■

⑧ $(tg x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Д-во: $(tg\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$ ∎

9 $(ctg\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Д-во: $(ctg\,x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$ ∎

10 $(sh\,x)' = ch\,x$

Д-во: $(sh\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\,x.$ ∎

11 $(ch\,x)' = sh\,x$

Д-во: $(ch\,x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\,x.$ ∎

12 $(th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x}$

Д-во: $(th\,x)' = \left(\frac{sh\,x}{ch\,x}\right)' = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x}.$ ∎

13 $(cth\,x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Д-во: $(cth\,x)' = \left(\frac{ch\,x}{sh\,x}\right)' = \frac{sh^2 x - ch^2 x}{sh^2 x} = -\frac{1}{sh^2 x}.$ ∎

14 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Д-во: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}\Big|_{y=\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ ∎

15 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Д-во: $(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin y}\Big|_{y=\arccos x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ ∎

16 $(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Д-во: $(arctg\,x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}\Big|_{y=arctg\,x}} = \frac{1}{1+tg^2(arctg\,x)} = \frac{1}{1+x^2}.$ ∎

17 $(arcctg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Д-во: $(arcctg\,x)' = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}\Big|_{y=arcctg\,x}} = -\frac{1}{1+ctg^2(arcctg\,x)} = -\frac{1}{1+x^2}.$ ∎

§2. Производная функции, заданной пар-ки

Пусть $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in T \subset \mathbb{R}$. $(*)$

Пусть $x(t)$ непр, строго монотонна на T, дифф-ма на T и $x'(t) \neq 0$ $\forall t \in T$. Тогда $\exists$ обратная функция $t = t(x)$, её производная $t'(x) = \frac{1}{x'(t)}$. Подставим $t = t(x)$ во второе ур-е $(*)$.

$y = y(t(x))$ – функция $y(x)$, заданная на T пар-ки уравнениями $(*)$. Её производная:

$y'_x = y'(t) \cdot t'(x) = \frac{y'_t}{x'_t}$. $\Rightarrow$ $\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$

Пример

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi)$.

$\Rightarrow y' = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t$

§3. Производная функции, заданной неявно

Опр Говорят, что ф-я $y = f(x)$ задана неявно ур-ем $F(x, y) = 0$ на $X \subset \mathbb{R}$, если $F(x, f(x)) = 0$ $\forall x \in X$.

Пример. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задает неявно ф-ю $y = \sqrt{1 - x^2}$ на $[-1; 1]$.

Чтобы найти y', надо продифф-ть выр-е $F(x, y) = 0$, полагая, что $y = y(x)$, и из получ. выр-я выразить y'.

Пример

$$2x^3 - 7x^2 y + 3y^3 = 0$$
$$6x^2 - 14xy - 7x^2 y' + 9y^2 \cdot y' = 0$$
$$y' = \frac{14xy - 6x^2}{9y^2 - 7x^2}$$

§4. Логарифмическая производная

Пусть $f(x) > 0$ и диф-ма $\forall x \in X$. Вычислим $(\ln f(x))'$:

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'$$

Опр. Производную $(\ln f(x))'$ наз. логарифмической производной ф-и $f(x)$.

Логарифм. производная бывает полезна в двух основных случаях:

1) Для диф-я ф-й, заданных в виде произведения (частного) большого кол-ва ф-й

$$y = \frac{f_1(x) f_2(x)}{g_1(x) g_2(x)}$$

Логарифмируем:

$$\ln y = \ln f_1(x) + \ln f_2(x) - \ln g_1(x) - \ln g_2(x)$$

Находим производную:

$$(\ln y)' = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} - \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} - \frac{g_2'(x)}{g_2(x)}$$

Искомая производная будет равна

$$y' = \frac{f_1(x) f_2(x)}{g_1(x) g_2(x)} \left(\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} - \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} - \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} \right)$$

2) Для диф-я показательно-степенных ф-й вида $y = \varphi(x)^{\psi(x)}$.

Логарифмируем:

$$\ln \varphi(x)^{\psi(x)} = \psi(x) \ln \varphi(x)$$

Находим производную:

$$(\ln y)' = \psi'(x) \ln \varphi(x) + \psi(x) \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Искомая производная будет равна

$$y' = \varphi(x)^{\psi(x)} \cdot \left(\psi'(x) \ln \varphi(x) + \psi(x) \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right)$$

Пример. $y = x^x$, $y' - ?$

$$(\ln y)' = (x \ln x)' = \ln x + 1 \Rightarrow y' = x^x (\ln x + 1).$$

§5. Дифференциал

Опр. Дифференциалом наз. линейная часть приращения функции

Если ф-я $f(x)$ диф-ма в т. x, то её приращение м.б. записано в виде:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\text{дифференциал}} + o(\Delta x), \ \Delta x \to 0$$

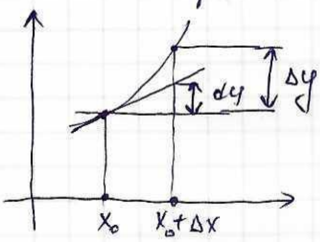
Приращение независимой переменной наз. диф-лом независимой переменной и обозн. dx

В таком случае $df(x) = f'(x)\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Правую часть этого выражения часто используют для обозначения производной.

Рассмотрим геом. смысл дифференциала



Уравнение кас-ой к графику ф-и $y=f(x)$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

При $x = x_0$ ордината кас-ой равна $f(x_0)$.

При $x = x_0+\Delta x$ ордината кас-ой равна $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ приращение ординаты кас-ой равно $f'(x)\Delta x = dy$.

Из ф-лы $df(x) = f'(x)dx$ следуют правила вычисления диф-лов:

1) $d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x)$

2) $d(f(x)\cdot g(x)) = f(x)\,dg(x) + df(x)\cdot g(x)$

3) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{df(x)g(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$.

Теор. (инвариантность формы записи первого диф-ла). Рав-во

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

остается справедливым и тогда, когда x явл. независимой переменной, и тогда, когда x явл. функцией от t.

Д-во: Рассмотрим сложную ф-ю $f(x(t))$. Найдем диф-л этой ф-и, исп-я правило диф-я сложной ф-и:

$$df(x) = f'(x(t)) \cdot \underbrace{x'(t)\,dt}_{= dx(t)} = f'(x(t))\,dx(t)$$

Если не упоминать зав-ть от t

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

т.е. правило выч-е первого диф-ла выглядит так, как если бы x было незав. переменной. ■