Лекция 10. Дифференциал и производные высших порядков.

Основные теоремы диф. исчисления

§1. Использование диф-ла в прибл. вычисл-ях

Из определения диф-ла следует, что при достаточно малых Δx:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x)\cdot\Delta x \Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$$

Эта ф-ла исп-ся в прибл. вычислениях

Пример $e^{0,1} \approx ?$

$$e^{0,1} \approx e^0 + (e^x)'\big|_{x=0}\cdot(0,1-0) = 1+0,1 = 1,1.$$

Недостаток такого подхода в том, что нельзя оценить погрешность вычислений.

§2. Производные высших порядков

Опр. Пусть ф-я $f(x)$ диф-ма $\forall x \in U(x_0)$. Если $f'(x)$ диф-ма в т. x_0, то $(f'(x))'|_{x=x_0}$ наз. второй производной ф-и $f(x)$ в т. x_0.

Обозн.: $f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = (f'(x))'|_{x=x_0}$

Аналогично определяется производная любого порядка: $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'|_{x=x_0}$

Пример. ① $f(x) = a^x$

$$f'(x) = a^x \ln a,\ f''(x) = a^x \ln^2 a,\ \dots;\ f^{(n)}(x) = a^x(\ln a)^n$$

② $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x = \sin(x+\tfrac{\pi}{2})$$
$$f''(x) = -\sin x = \sin(x+\pi)$$
$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x+\tfrac{3\pi}{2})$$
$$f^{IV}(x) = \sin x = \sin(x+2\pi) \quad \text{и т. д.}$$
$$\Rightarrow (\sin x)^{(n)} = \sin(x+\tfrac{\pi n}{2})$$

§3. Дифференциалы высших порядков

Есть равенство $df(x) = f'(x)\,dx$

Зафиксируем в нем диф-л независимой переменной dx ⇒ получим ф-ю от x, для кот. можно вычислить диф-л в т. x. Если при этом считать диф-л незав. переменной равным его прежнему зн-ю dx:

$$d^2 f(x) = d(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)'\,dx = f''(x)\,dx^2 \text{ —}$$

дифференциал 2-го порядка ф-и $f(x)$

Диф-л n-го пор определяется по индукции:

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)),$$

при этом в кач-ве dx берется то же знач-е, что и в диф-ле n-го порядка.

Теор. Дифференциал n-го порядка можно вычислять по ф-ле $d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n$

Д-во: ММИ.

1) При $n=1$ и $n=2$ это равенство справедливо.

2) Пусть при некотором n вып. $d^n f(x) = f^{(n)}\,dx^n$.

Тогда $d^{n+1} f(x) = d(f^{(n)}\,dx^n) = (f^{(n)}\,dx^n)'\,dx =$
$= f^{(n+1)}(x)\,dx^n \cdot dx = f^{(n+1)}(x)\,dx^{n+1}$. ■

Из док-ной ф-лы для диф-ла n-го порядка следует, что $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$

Правую часть рав-ва часто используют как обозначение n-ой производной.

Замечание. Для диф-лов порядка выше первого св-во инвариантности уже не имеет места. В самом деле, пусть $d^2 f(x) = f''(x)\,dx^2$. Предположим, что $x = x(t)$. Тогда

$$(f(x(t)))' = f'(x(t)) \cdot x'(t)$$

$$(f(x(t)))'' = (f'(x(t)) \cdot x'(t))' = f''(x(t)) \cdot (x'(t))^2 + f'(x(t)) \cdot x''(t)$$

$$\Rightarrow d^2 f(x(t)) = (f''(x(t)) \cdot (x'(t))^2 + f'(x(t)) \cdot x''(t))\,dt^2$$

Если не ук-ть зав-ть от t, мы не вернемся к прежней форме записи диф-ла.

§4. Производная 2-го пор от ф-и, заданной пар-ки

Ранее было показано, что для ф-и
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in T$
производная $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Отсюда
$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(y'_t / x'_t)'_t}{x'_t}$.

Пример. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = e^t \end{cases}$

$y'_x = \frac{e^t}{1/t} = te^t$

$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{e^t + te^t}{1/t} = te^t(1+t)$.

§5. Производная 2-го пор. от ф-и, заданной неявно

Пусть ф-я $y = f(x)$ задана неявно ур-ем $F(x,y) = 0$. Пусть получено выражение для первой производной: $y' = \varphi(x,y)$. Чтобы найти y'', диф-ем это рав-во, снова рассматривая $y = y(x)$ и учитывая, что $y' = \varphi(x;y)$.

Пример. $y = x + \operatorname{arctg} y$

$y' = 1 + \frac{y'}{1+y^2} \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{y^2}$

$y'' = \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)' = -\frac{2}{y^3} \cdot y' = -\frac{2}{y^3}\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)$.

§6. Основные теоремы диф. исчисления

(1) Опр. Говорят, что ф-я $f(x)$, определенная на некотором пром-ке J, принимает в т. $x_0 \in J$ наибольшее значение, если $\forall x \in J$ $f(x_0) \geq f(x)$.

Аналогично опр-ся точка, в кот. ф-я принимает наим. знач-е

Теор. (Ферма). Пусть ф-я $f(x)$ опр на пром-ке J и в некоторой внутр точке x_0 этого пром-ка принимает наибольшее (или наименьшее) значение на этом пром-ке. Тогда, если $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

Д-во: Для опр-ти будем считать, что ф-я $f(x)$ принимает в т. x_0 наибольшее зн-е. Тогда

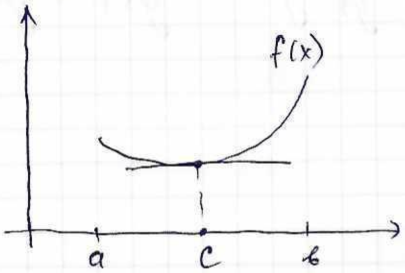
$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

Если $\exists f'(x_0)$, то $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$. ■

Замечание. Если т. x_0 не явл. внутр. точкой пром-ка J, то утв-е теоремы может не вып, напр., для строго монотонной на отр. ф-и.

Геом. интерпретация. В т. $c \in (a; b)$, где $f(x)$ достигает своего наибольшего (или наим) значения на $(a; b)$, $f'(c) = 0$, если $\exists f'(c) < \infty$. Значит, касательная к графику $f(x)$ в т c горизонтальна



② **Теор. (Ролля)** Пусть
1) $f(x)$ непр. на $[a; b]$,
2) $f(x)$ диф-ма в $(a; b)$,
3) $f(a) = f(b)$

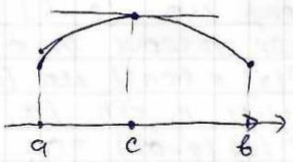
Тогда на инт-ле $(a; b)$ $\exists c: f'(c) = 0$.

Д-во: Поскольку $f(x)$ непр. в ~~т.с~~ на $[a; b]$, то по теор. Вейерштрасса ф-я $f(x)$ достигает на $[a; b]$ своего наименьшего m и наибольшего M значений: $m \le f(x) \le M$. Пусть $f(c_1) = m$, $f(c_2) = M$. Возможны 2 случая:

1) $m = M$. Тогда $f(x) = const$ на $[a; b]$ $\Rightarrow$ её производная $= 0$ во всех точках интервала.

2) $m < M$. Тогда в силу рав-ва $f(a) = f(b)$ хотя бы одна из точек c_1 и c_2 явл. внутренней $\Rightarrow$ по теор. Ферма в этой точке произв. равна нулю. ■

Геом. интерпретация. При выполнении условий теоремы на $(a; b)$ найдется хотя бы одна т. c такая, что $f'(c) = 0$, т.е. касательная в ней горизонтальна.



③ **Теор. (Лагранжа).** Пусть ф-я $f(x)$ непр. на $[a; b]$ и диф-ма на $(a; b)$. Тогда на этом интервале $\exists c$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Д-во: Рассмотрим вспомогат. ф-ю

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

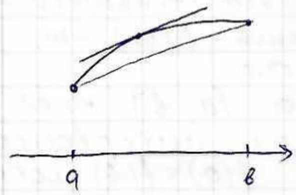
Эта ф-я непр. на $[a; b]$ и диф-ма в $(a; b)$. Далее,

$$\left.\begin{aligned} F(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a) \\ F(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a) \end{aligned}\right\} F(a) = F(b)$$

Значит, для ф-и $F(x)$ выполняются все усл-я теоремы Ролля $\Rightarrow \exists c \ F'(c)=0$.

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f(b)-f(a) = f'(c)(b-a). \blacksquare$$

Замечание 1. (Геом. интерпретация теор. Ролля)
$(f(b)-f(a))/(b-a)$ - угловой коэф-т хорды, соединяющей т. $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$ графика $y=f(x)$, $f'(c)$ - угл. коэф-т кас-ой к графику ф-и в т. c. Значит, при вып-и условий теор. найдется т. c такая, что касательная в ней будет парал-на хорде, соед. $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$.



Замечание 2. Обозначим $\theta = \frac{c-a}{b-a}$, $0<\theta<1$. Тогда $c = a+\theta(b-a)$ и ф-ла из теор. Лагранжа принимает вид

$$f(b) - f(a) = f'(a+\theta(b-a))(b-a), \quad 0<\theta<1.$$

Следствие. Пусть ф-я $f(x)$ непр. на $[a;b]$ и диф-ма в $(a;b)$, причем во всех точках этого интервала $f'(x)=0$. Тогда $f(x)=\mathrm{const}$ на $[a;b]$.
Д-во: пусть $a<x\le b$. Применим к отр. $[a;b]$ теор. Лагранжа: $f(x)-f(a) = f'(c)(x-a) = 0$, т.к. $f'(c)=0 \ \forall c \Rightarrow f(x)=f(a)$. В силу произвольности x заключаем, что $\forall x\in[a;b]$ $f(x)=f(a)$. $\blacksquare$

(4) Теор. (Коши) Пусть
1) $f(x)$, $g(x)$ непр. на $[a;b]$,
2) $f(x)$, $g(x)$ диф-мы в $(a;b)$;
3) $g'(x) \ne 0 \ \forall x\in(a;b)$.

Тогда $\exists c\in(a;b)$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Д-во: $g(b)\ne g(a)$ (иначе по теор. Ролля $g'(c)=0$)
Рассмотрим вспомог. ф-ю:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

Для нее вып. все усл-я теор. Ролля $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists c \ F'(c)=0 \Rightarrow F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) \Rightarrow$

6 $\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \blacksquare$