Лекция 11. Правило Лопиталя. Сравнение б. б. ф. на бесконечности

§1. Правило Бернулли – Лопиталя

Теор. 1. (Бернулли – Лопиталь). Пусть

1) $f(x)$, $g(x)$ диф-мы на $(a;b)$
2) $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a+} g(x)=0$
3) $g'(x)\neq 0$ на $(a;b)$
4) $\exists \lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (конечный или ∞)

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Д-во: Доопределим, если нужно, $f(a)=g(a)=0$. Тогда $\forall x\in(a;b)$ ф-и $f(x)$, $g(x)$ удовл. условиям теоремы Коши на $[a;x]$ $\Rightarrow \exists c\in(a;x)$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f'(a+\theta(x-a))}{g'(a+\theta(x-a))},\ \theta\in(0;1)$$

Поэтому

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(a+\theta(x-a))}{g'(a+\theta(x-a))}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{замена}\\ y=a+\theta(x-a)\\ x\to a+\Rightarrow y\to a+\end{array}\right\}=\lim_{y\to a+}\frac{f'(y)}{g'(y)}=A. \blacksquare$$

Замечание. Теор. 1 остается в силе и при $x\to a-$ (д-во аналогично) и, след-но, при $x\to a$.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}-e^x}{1}=1.$

Теор. 2. (Бернулли – Лопиталь). Пусть

1) $f(x)$, $g(x)$ диф-мы на $(c;+\infty)$, $c>0$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.
3) $g'(x)\neq 0$ $\forall x>c$
4) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (конечный или ∞)

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Д-во: Рассмотрим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{замена} \\ t=\frac{1}{x};\ x=\frac{1}{t} \\ x\to+\infty \Rightarrow t\to 0+ \end{array} \right\} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} \ \underline{\underline{\text{Теор. 1}}}$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{t\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \left\{ \begin{array}{l} \text{замена} \\ x=\frac{1}{t} \\ t\to 0+ \Rightarrow x\to+\infty \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \ \blacksquare$$

Замечание. Теор. 2 остается в силе и при $x\to-\infty$ (д-во аналогично) а, след-но, и при $x\to\infty$.

Аналогичные теоремы имеют место и для сравнения двух бесконечно больших.

Теор 3 (Бернулли - Лопиталь). Пусть
1) $f(x)$, $g(x)$ диф-мы на $(a;b)$
2) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$
3) $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$
4) $\exists \lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (конечный или ∞)

Тогда $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. $\square$

Замечание. Теор. 3 остается в силе и при $x\to a-$

Теор 4. (Бернулли - Лопиталь). Пусть
1) $f(x)$, $g(x)$ диф-мы на $(a;+\infty)$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$
3) $g'(x) \neq 0$ на $(a;+\infty)$
4) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (конечный или ∞)

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. $\square$

Замечание. Теор. 4 остается в силе и при $x\to-\infty$.

§2. Сравнение роста на бесконечности показательной, степенной и логарифмической функции.

① Сравним показательную и степенную функции

При $a>1,\ s>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^s}{a^x}=0.$

Д-во: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^s}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{a^{x/s}}\right)^s=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^{x/s}}\right)^s\overset{Л-Б}{=}$

$=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{a^{x/s}\cdot\ln a\cdot\frac{1}{s}}\right)^s=0^s=0.$ ■

Вывод: на $+\infty$ показательная ф-я растет быстрее степенной. $x^s=o(a^x),\ x\to+\infty$

② Сравним степенную и логарифмическую функции

При $a>1,\ s>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^s}=0.$

Д-во: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^s}\overset{Л-Б}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\cdot\ln a\cdot s x^{s-1}}=0.$ ■

Вывод: на $+\infty$ степенная ф-я растет быстрее логарифмической. $\log_a x=o(x^s),\ x\to+\infty)$

Замечание: Этот вывод не изменится, если логарифмическую ф-ю возводить в некоторую полож. степень.

§3. Использование правила Лопиталя для раскрытия других неопр-тей

① Неопр-ть $0 \cdot \infty$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Нужно найти $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$. Этот предел сводится к неопр-ти $\frac{0}{0}$, если представить его в виде $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, если представить в виде $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)}$.

<u>Пример.</u> $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{Л-Б}{=}$
$= \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim\limits_{x\to 0+} x = 0.$

② Неопр-ть $\infty - \infty$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Нужно найти $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x))$. Преобразуем

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim_{x\to a} \frac{1}{1/f(x)} - \frac{1}{1/g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/f(x)\cdot 1/g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

<u>Пример</u> $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\sin x}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} \overset{Л-Б}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$

③ Неопр-ть 0^0, 1^∞, ∞^0

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{[0\cdot\infty]}$

неопр-ть $[0\cdot\infty]$ раскрывается как в ①

<u>Пример</u> $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\ln x} =$
$= e^0 = 1$ (см. пример в ①).

§ 4. Многочлен Тейлора

Пусть функция $f(x)$ опр-на и раз. в окр-ти $U(x_0)$ т. x_0. Найдем такую ф-ю $P_n(x)$ (многочлен степ. n):

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n,$$

что $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n'(x_0) = f'(x_0), \ldots,$
$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

1) Подставим $x = x_0$ в $P_n(x)$:
$P_n(x_0) = a_0 \Rightarrow a_0 = f(x_0)$.

2) $P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + n \cdot a_n(x-x_0)^{n-1}$
Подставим $x = x_0$ в $P_n'(x)$:
$P_n'(x_0) = a_1 \Rightarrow a_1 = f'(x_0)$

3) $P_n''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3\, a_3(x-x_0) + \ldots + n \cdot (n-1) a_n \cdot (x-x_0)^{n-2}$
Подставим $x = x_0$ в $P_n''(x)$:
$P_n''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$

и т. д.

n) $P_n^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a_n = n!\, a_n$
Подставим $x = x_0$ в $P_n^{(n)}(x)$:
$P_n^{(n)}(x_0) = n!\, a_n \Rightarrow a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$

Таким образом,

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$ или

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

где $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, $0! = 1$.

Опр. $P_n(x)$ наз. многочленом Тейлора порядка n для ф-и $f(x)$ в $U(x_0)$.

~~Теор.~~ §5. Формула Тейлора с ост. членом в форме Пеано.

Теор (ф-ла Тейлора с ост. членом в ф. Пеано). Пусть ф-я $f(x)$ опр-на в окр-ти т. x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков до n-го включительно. Тогда справедливо рав-во

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0.$$

Д-во: нужно доказать, что

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Это неопр-ть $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для её раскрытия применим правило Лопиталя $n-1$ раз:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} \overset{Л-П}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$

$$\overset{Л-П}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \ldots =$$

$$\overset{Л-П}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!\,(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0}\left(\underbrace{\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}}_{\text{равно по опр-ю произв.}} - f^{(n)}(x_0)\right) = 0 \quad ■$$

Замечание. В терминах многочлена Тейлора ф-ла имеет вид

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0.$$

Опр. Слагаемое $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ наз. остаточным членом ф-лы Тейлора.

При $r_n(x) = o\left((x-x_0)^2\right)$ ост. член имеет форму Пеано.