Лекция 12. Формула Тейлора

§1. Формула Тейлора с ост. членом в ф. Лагр.

Получим ещё одну форму остаточного члена, важную для приложений.

Теор (формула Тейлора с ост. членом в форме Лагранжа). Пусть ф-я $f(x)$ $(n+1)$ раз диф-ма в окр-ти т. x_0 $U(x_0)$. Пусть

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x), \text{ где } P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Тогда $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $\xi \in (x_0; x)$ или $\xi \in (x; x_0)$.

Д-во: Зафиксируем точки x и x_0. Рассмотрим функцию:

$$F(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{1}{2!}f''(t)(x-t)^2 + \frac{1}{3!}f'''(t)(x-t)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n + \frac{\varphi(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} - f(x)$$

Здесь ищем $r_n(x)$ в виде $\dfrac{\varphi(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Ф-я $F(t)$ на отрезке с концами в т. x и в т. x_0 удовлетворяет всем условиям теор. Ролля:

1) $F(t)$ непр. на этом отрезке;
2) $F(t)$ диф-ма на интервале $(x_0; x) / (x; x_0)$;
3) $F(x_0) = 0$; $F(x) = 0$

$\Rightarrow \exists \xi \in (x_0; x) / (x; x_0)$: $F'(\xi) = 0$. Найдём $F'(t)$:

$$F'(t) = \cancel{f'(t)} + \left[\cancel{f''(t)(x-t)} - \cancel{f'(t)}\right] + \frac{1}{2!}\left[\cancel{f'''(t)(x-t)^2} - \cancel{f''(t)\cdot 2(x-t)}\right] + \frac{1}{3!}\left[\cancel{f^{(4)}(t)(x-t)^3} - \cancel{f'''(t)\cdot 3(x-t)^2}\right] + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left[f^{(n+1)}(t)(x-t)^n - \cancel{f^{(n)}(t)\cdot n(x-t)^{n-1}}\right] -$$

$$- \varphi(x)\cdot\frac{1}{(n+1)!}(n+1)(x-t)^n =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[f^{(n+1)}(t)(x-t)^n - \varphi(x)\cdot(x-t)^n\right]$$

Из условия $F'(\xi) = 0$ получим:

$$\frac{1}{n!}\left[f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n - \varphi(x)(x-\xi)^n\right] = 0,$$

отсюда $\varphi(x) = f^{(n+1)}(\xi)$ и

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n, \quad \xi \in (x_0; x) \,/\, (x; x_0). \blacksquare$$

Опр Формула Тейлора при $x_0 = 0$ наз. формулой Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + r_n(x),$$

где $r_n(x) = o(x^n)$, $x \to 0$ (в ф. Пеано), либо

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta \in (0;1)$$ (в ф. Лагранжа).

§2. Вывод формулы Маклорена для основных элементарных функций

① $f(x) = e^x$

$f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1$

$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x)$

$r_n(x) = o(x^n)$ – в ф. Пеано, $x \to 0$

$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$ – в ф. Лагранжа

② $f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}); \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x = \sin(x + \pi); \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + \frac{3\pi}{2}); \qquad f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi); \qquad f^{IV}(0) = 0$

$f^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2}); \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2m \\ (-1)^m, & \text{если } n = 2m+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + r_{2m+2}(x) =$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+2}(x).$

$r_{2n+2}(x) = o(x^{2n+2}), \ x \to 0$ – в ф. Пеано

$r_{2n+2}(x) = \frac{\sin(\theta x + \frac{(2n+3)\pi}{2})}{(2n+3)!} x^{2n+3}$ – в ф. Лагранжа

③ $f(x) = \cos x \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x = \cos(x + \pi) \qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x = \cos(x + \frac{3\pi}{2}) \qquad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos x = \cos(x + 2\pi) \qquad f^{IV}(0) = 1$

...

$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{\pi n}{2});$

$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2m+1 \\ (-1)^m, & \text{если } n = 2m \end{cases}$

$$\Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + r_{2m+1}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+1}(x)$$

$r_{2n+1}(x) = o(x^{2n+1})$ – в ф. Пеано, $x \to 0$

$r_{2n+1}(x) = \frac{\cos\left(\theta x + \frac{(2n+2)\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$ – в ф. Лагранжа, $\theta \in (0; 1)$.

④ $f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad f''' = 2 = 2!$

$f^{IV}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4}$ $\qquad f^{IV}(0) = -2 \cdot 3 = -3!$

$\ldots$

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

При этом $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\, n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + r_n(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + r_n(x)$$

$r_n(x) = o(x^n)$, $x \to 0$ – в ф. Пеано

$r_n(x) = \frac{(-1)^n n!\, x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)!} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)}$ –

– в ф. Лагранжа, $\theta \in (0;1)$

⑤ $f(x) = (1+x)^\alpha$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $\qquad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ $\qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$\ldots$ $\qquad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ $\qquad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + r_n(x) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\, x^k}{k!} + r_n(x)$$

4

$r_n(x) = o(x^n),\ x \to 0$ – в ф. Пеано

$r_n(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!} x^{n+1},\ \theta \in (0;1)$ – – в ф. Лагранжа

Частные случаи:

5A) $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$

5B) $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot (-1)^k x^k + o(x^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$

6) $f(x) = \operatorname{sh} x$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \operatorname{ch} x$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \operatorname{sh} x$ $\qquad f''(0) = 0$

...

$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & \text{если } n = 2k \\ \operatorname{ch} x, & \text{если } n = 2k+1 \end{cases}$; $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 2k+1 \end{cases}$

$\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_n(x) =$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_n(x)$

$r_n(x) = o(x^{2n+2})$ – в ф. Пеано

$r_n(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(\theta x)}{(2n+2)!} x^{2n+3},\ \theta \in (0;1)$ – в ф. Лагранжа

7) $f(x) = \operatorname{ch} x$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \operatorname{sh} x$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = \operatorname{ch} x$ $\qquad f''(0) = 1$

...

$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & n = 2k \\ \operatorname{sh} x, & n = 2k+1 \end{cases}$ $\qquad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$

$\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + r_n(x) =$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + r_n(x)$

$r_n(x) = o(x^{2n+1})$ – в ф. Пеано

$r_n(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(\theta x)}{(2n+2)!} x^{2n+2},\ \theta \in (0;1)$ – в ф. Лагранжа

§3. Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям

Пусть $f(x)$ – $(n+1)$ раз диф-мая ф-я в окрестн. $U(x_0)$ т. x_0. Тогда

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Погрешность можно оценить с помощью остат. члена в ф. Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Обозначим $M = \sup\limits_{[x_0;x]} |f^{(n+1)}(x)|$

Тогда $|r_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$

Пример. Вычислить e с точностью 0,01

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

погрешность: $r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

$x=1 \Rightarrow e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$; $r_n(1) = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$

Найдем n из условия $|r_n(1)| \leq 0{,}01$

$$|r_n(1)| = \frac{|e^{\theta}|}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq 0{,}01 \Leftrightarrow (n+1)! \geq 300$$

$\Rightarrow n+1 \geq 6 \Rightarrow n \geq 5.$

Таким образом,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$$

§4. Применение формулы Тейлора к вычислению пределов

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Нужно вычислить $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Запишем ф-лу Тейлора для ф-ий $f(x), g(x)$ при $x\to x_0$, оставляя в многочлене лишь первый отличный от нуля член:

$$f(x) = a_n (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$g(x) = b_m (x-x_0)^m + o((x-x_0)^m), \quad x\to x_0$$

Согласно св-ву эквивалентных б.м.

$$f(x) \sim a_n (x-x_0)^n$$

$$g(x) \sim b_m (x-x_0)^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{a_n (x-x_0)^n}{b_m (x-x_0)^m} = \begin{cases} 0, & \text{если } n>m \\ a_n/b_m, & \text{если } n=m \\ \infty, & \text{если } n<m \end{cases}$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin x - x} =$

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^4) = -\frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3/6}{-x^3/6} = -1.$$

§ 5. Единственность разложения ф-и по степеням

Теор. Пусть $f(x)$ опр-на в $\mathring{U}(x_0)$ и

(1) $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$

(2) $f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \ldots + b_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$

Тогда $a_i = b_i$, $\forall i = \overline{0,n}$

Д-во: Вычтем из (1) (2). Получим:

$$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x-x_0) + (a_2 - b_2)(x-x_0)^2 + \ldots + (a_n - b_n)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Обозначим $c_i = a_i - b_i$ и представим $o((x-x_0)^n)$ в виде

$o((x-x_0)^n) = \alpha(x)\cdot(x-x_0)^n$, $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to x_0$

Тогда

(3) $c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \alpha(x)\cdot(x-x_0)^n = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} c_0 = 0$

Тогда (3) принимает вид:

$c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \alpha(x)\cdot(x-x_0)^n = 0 \,/ : x-x_0$

$c_1 + c_2(x-x_0) + \ldots + c_n(x-x_0)^{n-1} + \alpha(x)\cdot(x-x_0)^{n-1} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(c_1 + c_2(x-x_0) + \ldots + c_n(x-x_0)^{n-1} + \alpha(x)\cdot(x-x_0)^{n-1}\right) = 0$

$\Rightarrow c_1 = 0.$

Далее выр-е делим на $(x-x_0)$ снова и продолжаем повторять описанные действия.

В рез-те $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0 \Leftrightarrow a_i = b_i$, $i = \overline{1,n}$. ∎

Следствие. Пусть $f(x)$ – n раз диф-мая ф-я в окр-ти $U(x_0)$ и

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),\ x \to x_0.$$

Тогда $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, т.е. это представление – формула Тейлора для $f(x)$ в $U(x_0)$.