Лекция 13. Исследование функций

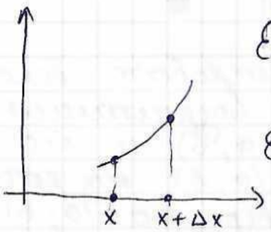
§1. Условия монотонности

(1) Теор. (необх. и дост. условие неубывания/невозрастания диф. функции). Пусть ф-я $f(x)$ диф-ма на $(a;b)$.

1) $y=f(x)$ неубыв. на $(a;b) \Leftrightarrow f'(x)\geq 0 \ \forall x\in(a;b)$.
2) $y=f(x)$ невозр. на $(a;b) \Leftrightarrow f'(x)\leq 0 \ \forall x\in(a;b)$.

Д-во: 1) Необходимость. $(\Rightarrow)$

Пусть $f(x)$ не убыв. на $(a;b)$. Выберем $\forall x\in(a;b)$. Пусть Δx — приращение x такое, что $x+\Delta x\in(a;b)$.



Если $\Delta x>0$, то $f(x+\Delta x)\geq f(x)$ и $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$

Если $\Delta x<0$, то $f(x+\Delta x)\leq f(x)$ и $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$

Таким образом, $\forall \Delta x\neq 0 \quad \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$

По св-вам пределов

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)\geq 0 \Rightarrow f'(x)\geq 0.$$

$(\Leftarrow)$ Достаточность.

Пусть $\forall x\in(a;b)$ $f'(x)\geq 0$. Пусть $x_1<x_2$ — две произв. точки этого интервала. По теореме Лагранжа для отр. $[x_1;x_2]$:

$$f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\geq 0 \Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1)\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ф-я $f(x)$ неубыв. на $(a;b)$ (в силу произвольности выбора точек x_1, x_2).

2) Доказывается аналогично. ■

Замечание. Если $f(x)$ возр. на $(a;b)$, то $f'(x)\geq 0$ и необяз-но $f'(x)>0$.

Пример $y=x^3$ — возр. на $\mathbb{R}$, хотя $y'(0)=0$.

② Теор (достаточные условия возрастания/убывания диф. функции). Пусть $f(x)$ диф-ма на $(a;b)$.
1) Если $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a;b)$, то $f(x)$ возр. на $(a;b)$;
2) Если $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a;b)$, то $f(x)$ убыв. на $(a;b)$.

Д-во: Выберем $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_1 < x_2$. На отр. $[x_1; x_2]$ ф-я $f(x)$ удовл. условиям теор. Лагранжа $\Rightarrow \exists c \in (x_1; x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(\underbrace{x_2 - x_1}_{>0})\quad (*)$$

1) $f'(c) > 0 \Rightarrow$ правая часть $(*) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ возрастает на $(a;b)$.
2) $f'(c) < 0 \Rightarrow$ правая часть $(*) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, т.е. $f(x)$ убывает на $(a;b)$ ■

Замечание. Можно сформулировать более мягкое достаточное условие возрастания диф. ф-ии: если $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a;b)$ и не существует интервала $I \subset (a;b)$, на котором $f'(x) = 0$, то ф-я $f(x)$ возр. на $(a;b)$. Это позволяет доказать, что $f(x) = x^3$ возрастает на R, хотя $f'(0) = 0$.

§ 2. Условия экстремума функции.

Опр. Говорят, что ф-я $f(x)$ имеет локальный максимум / минимум в т. x_0, если $\exists$ окрестность $U(x_0)$ этой точки, такая, что $\forall x \in U(x_0)$ выполнено $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) \geq f(x_0)$.

Опр. Говорят, что $f(x)$ имеет строгий локальный максимум / минимум в т. x_0, если $\exists$ окрестность $U(x_0)$ этой точки, такая, что $\forall x \in U(x_0)$ выполнено $f(x) < f(x_0)$ / $f(x) > f(x_0)$.

Опр. Точкой локального экстремума наз. точку локального максимума или минимума. Точкой строгого локального экстремума наз. точку строг. локального максимума или минимума.

1 Теор. (необходимое условие наличия экстр.) Если в т. x_0 $f(x)$ достигает своего строгого локального экстремума и $f(x)$ диф-ма в т. x_0, то $f'(x_0) = 0$.
Д-во: основано на теор Ферма. ■

Замечание. Это условие не является достаточным. Например, для ф-и $f(x) = x^3$ $f'(0) = 0$, но экстремума в этой точке нет.

Опр. Точки, в которых $f'(x)$ равна нулю, наз. стационарными точками ф-и $f(x)$. Точки, в кот. $f'(x) = 0$, $= \infty$ или $\nexists$, наз. критическими точками ф-и $f(x)$.
Экстремумы ф-и надо искать в этих точках.

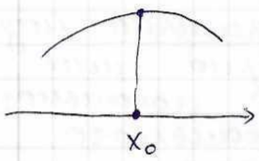
② **Теор.** (<u>первое достаточное условие экстремума</u>). Пусть $f(x)$ диф-ма в $\mathring{U}(x_0)$ и непр. в т. x_0.

1) Если при переходе через т. x_0 $f'(x)$ меняет знак с "+" на "−", то т. x_0 явл. точкой строгого локального макс.

2) Если при переходе через т. x_0 $f'(x)$ меняет знак с "−" на "+", то т. x_0 является точкой строгого локального мин.

3) Если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через т. x_0, то экстремума в этой точке нет.

<u>Д-во</u>: 1) Пусть $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$.



Тогда по теор. о дост. условиях монотонности

а) $f(x)$ возр. на $(x_0 - \delta; x_0] \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) < f(x_0)$;

б) $f(x)$ убыв. на $[x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) < f(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т. x_0 явл. точкой строгого лок. максимума.

2) Д-ся аналогично.

3) В этом случае $f(x)$ либо возр., либо убыв. на $U(x_0)$. Экстремума в т. x_0 нет. ∎

<u>Пример</u>. $f(x) = xe^x$

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f'(-1) = 0 \Rightarrow$ в т. $x = -1$ вып. необх. усл-е экстр.

$-$ $+$ $f'(x)$; -1; $\searrow$ $\nearrow$ $f(x)$

$f(x)$ убыв. при $x \in (-\infty; -1)$;
$f(x)$ возр. при $x \in (-1; +\infty)$,
т. $x = -1$ — точка строгого локального минимума

③ **Теор.** (второе достаточное условие экстремума). Пусть $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$.
1) Если $f''(x_0)>0$, то т. x_0 — точка строгого локального минимума ф-и $f(x)$
2) Если $f''(x_0)<0$, то т. x_0 — точка строгого локального максимума ф-и $f(x)$.

Д-во:
1) Запишем определение правой второй производной ф-и $f(x)$:

$$f''_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\frac{f'(x)-\overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}}>0 \Rightarrow \text{по}$$

теор. о сохранении ф-ей знака своего предела $f'(x)>0$ при $x\in(x_0;x_0+\delta)$.
Аналогично,

$$f''_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f'(x)-\overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}}>0 \Rightarrow \text{по}$$

теор. о сохранении ф-ей знака своего предела $f'(x)<0$ при $x\in(x_0-\delta;x_0)$.
Значит, при переходе через т. x_0 $f'(x)$ меняет знак с "−" на "+" $\Rightarrow$ т. x_0 явл. точкой строгого локального минимума (по первому дост. условию)
2) Д-ся аналогично. ■

Пример. $y=xe^x$
$y'=e^x(x+1) \Rightarrow$ в т. $x_0=-1$ $y'=0$.
$y''=e^x(x+2) \Rightarrow y''(-1)>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ т. $x_0=-1$ явл. точкой строгого локального минимума.

Замечание. Если $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, то из этого, вообще говоря, не следует, что в т. x_0 экстремума нет.

§ 3. Условия выпуклости

Пусть ф-я $f(x)$ опр-на на $(a;b)$.

<u>Опр. 1.</u> Говорят, что ф-я $f(x)$ является <u>выпуклой</u> <u>вверх</u> / <u>вниз</u> на $(a;b)$, если для любой касательной к графику этой функции каждая точка касательной, отличная от точки касания, лежит выше / ниже точки графика ф-и с той же абсциссой.

вып. вниз   вып. вверх

<u>Опр. 2.</u> Ф-ия $f(x)$ наз. <u>выпуклой</u> <u>вверх</u> / <u>вниз</u> на $(a;b)$, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_1 < x_2$, хорда, соединяющая эти точки лежит ниже / выше соответствующих точек графика ф-и $f(x)$.

вып. вниз   вып. вверх

<u>Теор.</u> (<u>Достаточные условия выпуклости</u>). Пусть $f(x)$ дважды диф-ма на $(a;b)$.

1) $f''(x) > 0 \ \forall x \in (a;b) \Rightarrow f(x)$ вып. вниз на $(a;b)$

2) $f''(x) < 0 \ \forall x \in (a;b) \Rightarrow f(x)$ вып. вверх на $(a;b)$.

<u>Д-во:</u> Запишем ф-лу Тейлора в т. $x_0 \in (a;b)$ 1-го пор. с остаточным членом в ф. Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(c)(x-x_0)^2, \quad c \in (x_0; x).$$

1) Если $f''(x) > 0$ на $(a;b)$, то $f''(c) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ (точка ф-ии выше точки касательной) $\Rightarrow f(x)$ вып. вниз на $(a;b)$.

2) Если $f''(x) < 0$ на $(a;b) \Rightarrow f''(c) < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow f(x)$ вып. вверх на $(a;b)$. ■