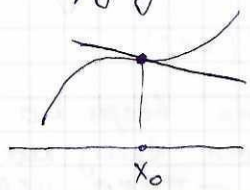
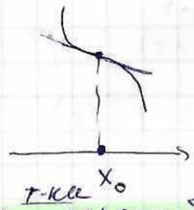
Лекция 14. Схема исследования функции.

§1. Условие перегиба

Опр. Точка $x_0 \in (a; b)$ наз. точкой перегиба ф-и $f(x)$, если $f(x)$ непр. в т. x_0 и $\exists \delta > 0$ такое, что направления выпуклости на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ различны.

Замечание. В точках перегиба график ф-и переходит с одной стороны касательной на другую.





① Теор (необх. условие перегиба). Пусть ф-я $f(x)$ дважды диф-ма в т. x_0 и x_0 — точка перегиба, причем $f''(x_0)$ непр. в т. x_0. Тогда $f''(x_0) = 0$.

Д-во: "От противного".

Пусть $f''(x_0) \neq 0$, например, $f''(x_0) > 0$. Т.к. $f''(x)$ непр. в т. x_0, то $\exists\, U(x_0): \forall x \in U(x_0)$ $f''(x) > 0$. Согласно дост. условию выпуклости, $f(x)$ вып. вниз в $U(x_0)$ $\Rightarrow$ т. x_0 — не точка перегиба.

Получили противоречие. ■

Замечание. Условие $f''(x_0) = 0$ не явл. достаточным условием перегиба. Например, для $f(x) = x^4$ $f''(0) = 0$, но ф-я $f(x)$ выпукла вниз в окрестности т. 0 (и вообще на R).

② Теор (первое дост. условие точки перегиба).
Пусть $f(x)$ непр. в т. x_0 и $\exists f''(x_0)$ в $U(x_0)$.
Если $f''(x)$ при переходе через т. x_0 меняет знак, то т. x_0 — точка перегиба ф-и $f(x)$.
Д-во: Пусть $f''(x) > 0$ на $(x_0 - \delta; x_0)$; $f''(x) < 0$ на $(x_0; x_0 + \delta)$. По теор. о дост. усл-ях выпуклости $f(x)$ выпукла вниз на $(x_0 - \delta; x_0)$, $f(x)$ выпукла вверх на $(x_0; x_0 + \delta)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ т. x_0 — точка перегиба.
Аналогично рассматривается случай $f''(x) < 0$ на $(x_0 - \delta; x_0)$ и $f''(x) > 0$ на $(x_0; x_0 + \delta)$ ∎

Пример. Найдем интервалы выпуклости ф-и $f(x) = xe^x$
$f'(x) = e^x(x+1)$; $f''(x) = e^x(x+2)$

$$\begin{array}{c} - \quad\quad + \\ \xrightarrow[-2]{\quad\bullet\quad} f''(x) \\ \cap \quad\quad \cup \end{array}$$

$f(x)$ вып. вверх на $(-\infty; -2)$;
$f(x)$ вып. вниз на $(-2; +\infty)$.
$x = -2$ — точка перегиба

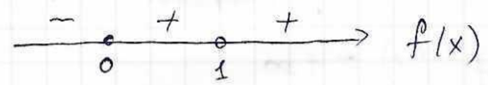
③ Теор. (второе дост. условие точки перегиба).
Пусть $f(x)$ трижды диф-ма в т. x_0, причем $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 — точка перегиба ф-и $f(x)$.
Д-во: Пусть для опр-ти $f'''(x_0) > 0$. Тогда
$$f'''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$$
По теор. о сохранении ф-ей знака своего предела $f''(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$.
Аналогично $f''(x) > 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$.
Вторая производная при переходе через т. x_0 меняет знак $\Rightarrow$ по первому дост. условию x_0 — точка перегиба.
Аналогично рассматривается случай $f'''(x_0) < 0$. ∎

§2. Схема исследования функции

1) Область определения
2) особые свойства: четность / нечетность, периодичность
3) Точки пересечения с осями коор-т; промежутки знакопостоянства
4) Точки разрыва; поведение на границах области определения, асимптоты
5) Исследование по первой производной: интервалы монотонности, точки экстр.
6) Исследование по второй производной: интервалы выпуклости вверх / вниз; точки перегиба

Пример. $f(x) = x\sqrt[3]{(x-1)^2}$

1) область определения $\mathbb{R}$
2) ф-я общего вида, непериодическая
3) $f(0)=0$, $f(1)=0$.



$f(x)<0$ при $x \in (-\infty; 0)$;
$f(x)>0$ при $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$.

4) $f(x)$ непр. на $\mathbb{R} \Rightarrow$ точек разрыва нет; вертикальных асимптот нет

Поведение на границе обл. опр.:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt[3]{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{(x-1)^2} = -\infty.$$

Поиск наклонных асимптот:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x-1)^2} = +\infty \Rightarrow$$

наклонных (и горизонтальных) асимптот нет.

5) $f'(x) = (x-1)^{2/3} + x\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} =$

$= \frac{3(x-1)+2x}{3\sqrt[3]{x-1}} = \frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}}$

Критические точки: $x = \frac{3}{5}$; $x = 1$

$(f'=0)$ $(f'=\infty)$

$+ \quad \frac{3}{5} \quad - \quad 1 \quad + \quad f'(x)$

$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad f(x)$

f(x) возр. на $(-\infty; \frac{3}{5}) \cup (1; +\infty)$

f(x) убыв. на $(\frac{3}{5}; 1)$

т. $x = \frac{3}{5}$ – точка строгого локального макс.

т. $x = 1$ - точка строгого лок. минимума.

6) $f''(x) = \frac{5\sqrt[3]{x-1} - (5x-3)\cdot\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$

$= \frac{15(x-1)-(5x-3)}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \frac{10x-12}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}}$

$f''(\frac{6}{5}) = 0$; $f''(1) = +\infty$

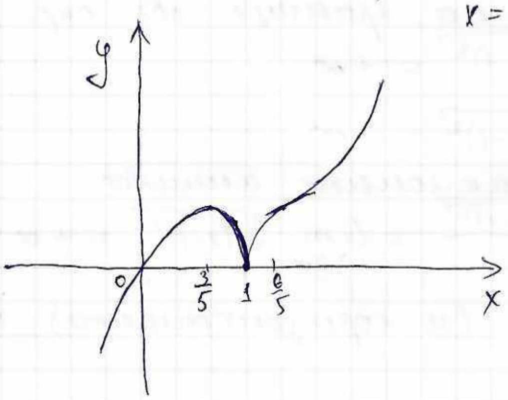
$- \quad 1 \quad - \quad \frac{6}{5} \quad + \quad f''(x)$

$\cap \quad \cap \quad \cup \quad f(x)$

f(x) вып. вверх на $(-\infty; 1) \cup (1; \frac{6}{5})$

f(x) вып. вниз на $(\frac{6}{5}; +\infty)$

$x = \frac{6}{5}$ — точка перегиба



4