

ИУ-РЛ-БМТ (кр. ИУ-9), 2-й семестр, ЛА и ФНП (2013 г.), модуль 1
Вопросы для подготовки к РК 1

Теоретические вопросы

1. Дать определение линейно зависимой системы векторов. (2 балла)
2. Дать определение линейно независимой системы векторов. (2 балла)
3. Дать определения базиса линейного пространства. (1 балл)
4. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому. (2 балла)
5. Дать определения размерности линейного пространства. (1 балл)
6. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому. (2 балла)
7. Дать определение подпространства линейного пространства. (1 балл)
8. Дать определение линейной оболочки системы векторов линейного пространства. (2 балла)
9. Дать определение евклидова пространства. (3 балла)
10. Сформулировать неравенство Коши — Буняковского. (3 балла)
11. Дать определение ортогональной системы векторов евклидова пространства. (1 балл)
12. Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов. (3 балла)
13. Дать определение характеристического уравнения матрицы. (1 балл)
14. Дать определение линейного оператора. (1 балл)
15. Дать определение матрицы линейного оператора. (2 балла)
16. Записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. (2 балла)
17. Дать определение характеристического уравнения линейного оператора. (2 балла)
18. Сформулировать свойство инвариантности характеристического уравнения линейного оператора. (2 балла)
19. Дать определение следа матрицы. (1 балл)
20. Сформулировать свойство инвариантности следа матрицы линейного оператора. (2 балла)
21. Сформулировать определения собственного значения и собственного вектора линейного оператора. (3 балла)
22. Дать определение собственного подпространства линейного оператора, отвечающего данному собственному значению. (2 балла)
23. Сформулировать теорему о собственных векторах линейного оператора, соответствующих различным собственным значениям. (3 балла)
24. Сформулировать теорему о матрице линейного оператора в базисе из собственных векторов. (3 балла)
25. Сформулировать определение сопряженного линейного оператора. (2 балла)
26. Сформулировать определение самосопряженного линейного оператора. (2 балла)
27. Сформулировать теорему о виде матрицы самосопряженного оператора в ортонормированном базисе. (3 балла)
28. Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряженного оператора. (3 балла)
29. Сформулировать теорему о существовании для самосопряженного оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид. (2 балла)
30. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряженного оператора, соответствующих различным собственным значениям. (3 балла)
31. Описать алгоритм приведения матрицы самосопряженного оператора к диагональному виду. (3 балла)
32. Сформулировать утверждение о матрице перехода от одного ортонормированного базиса к другому. (2 балла)
33. Дать определение ортогональной матрицы. (1 балл)
34. Сформулировать свойства ортогональной матрицы. (3 балла)

Типовой вариант билета по теории

1. Дать определение ортогональной системы векторов евклидова пространства. (1 балл)
2. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому. (2 балла)
3. Сформулировать неравенство Коши — Буняковского. (3 балла)

Типовой вариант билета с задачами

1. Доказать, что в \mathbb{R}^5 множество всех векторов вида $\mathbf{x} = (0, c_1, c_1 - c_2, c_2, 0)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, есть подпространство. Найти размерность этого подпространства. (4 балла)
2. В линейном пространстве L задан базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Доказать, что система векторов $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ образует базис. Найти координаты вектора $\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$ в базисе $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$. (4 балла)
3. Доказать, что отображение $\mathbf{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданное формулой $\mathbf{Ax} = \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\mathbf{a}$, при любом ненулевом векторе $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ является ортогональным линейным оператором. (4 балла)