ИУ-РЛ-БМТ (кр. ИУ-9), 2-й семестр, ЛА и ФНП (2012 г.), модуль 1
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы

1. Дать определение линейно зависимой системы векторов. (*2 балла*)

2. Дать определение линейно независимой системы векторов. (*2 балла*)

3. Дать определения базиса линейного пространства. (*1 балл*)

4. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому. (*2 балла*)

5. Дать определения размерности линейного пространства. (*1 балл*)

6. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому. (*2 балла*)

7. Дать определение подпространства линейного пространства. (*1 балл*)

8. Дать определение линейной оболочки системы векторов линейного пространства. (*2 балла*)

9. Дать определение евклидова пространства. (*3 балла*)

10. Сформулировать неравенство Коши — Буняковского. (*3 балла*)

11. Дать определение ортогональной системы векторов евклидова пространства. (*1 балл*)

12. Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов. (*3 балла*)

13. Дать определение характеристического уравнения матрицы. (*1 балл*)

14. Дать определение линейного оператора. (*1 балл*)

15. Дать определение матрицы линейного оператора. (*2 балла*)

16. Записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. (*2 балла*)

17. Дать определение характеристического уравнения линейного оператора. (*2 балла*)

18. Сформулировать свойство инвариантности характеристического уравнения линейного оператора. (*2 балла*)

19. Дать определение следа матрицы. (*1 балл*)

20. Сформулировать свойство инвариантности следа матрицы линейного оператора. (*2 балла*)

21. Сформулировать определения собственного значения и собственного вектора линейного оператора. (*3 балла*)

22. Дать определение собственного подпространства линейного оператора, отвечающего данному собственному значению. (*2 балла*)

23. Сформулировать теорему о собственных векторах линейного оператора, соответствующих различным собственным значениям. (*3 балла*)

24. Сформулировать теорему о матрице линейного оператора в базисе из собственных векторов. (*3 балла*)

25. Сформулировать определение сопряженного линейного оператора. (*2 балла*)

26. Сформулировать определение самосопряженного линейного оператора. (*2 балла*)

27. Сформулировать теорему о виде матрицы самосопряженного оператора в ортонормированном базисе. (*3 балла*)

28. Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряженного оператора. (*3 балла*)

29. Сформулировать теорему о существовании для самосопряженного оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид. (*2 балла*)

30. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряженного оператора, соответствующих различным собственным значениям. (*3 балла*)

31. Описать алгоритм приведения матрицы самосопряженного оператора к диагональному виду. (*3 балла*)

32. Сформулировать утверждение о матрице перехода от одного ортонормированного базиса к другому. (*2 балла*)

33. Дать определение ортогональной матрицы. (*1 балл*)

34. Сформулировать свойства ортогональной матрицы. (*3 балла*)

Типовой вариант билета по теории

1. Дать определение ортогональной системы векторов евклидова пространства. (*1 балл*)

2. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому. (*2 балла*)

3. Сформулировать неравенство Коши — Буняковского. (*3 балла*)

Типовой вариант билета с задачами

1. Доказать, что в $\mathbb{R}^5$ множество всех векторов вида $\boldsymbol{x} = (0,\ c_1,\ c_1 - c_2,\ c_2,\ 0)$, $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$, есть подпространство. Найти размерность этого подпространства. (*4 балла*)

2. В линейном пространстве L задан базис $(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$. Доказать, что система векторов $\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 + \mathbf{3e_2}$ образует базис. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1',\ \boldsymbol{e}_2')$. (*4 балла*)

3. Доказать, что отображение $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданное формулой $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - 2\dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$, при любом ненулевом векторе $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ является ортогональным линейным оператором. (*4 балла*)