

Эйлерова характеристика и теорема Гаусса–Бонне.

3 июня 2012 г.

1 Предварительные замечания.

Эта лекция относится к курсу “Дифференциальная геометрия и топология”, который, с одной стороны, требует от слушателя некоторой базовой математической подготовки, а с другой стороны, опирается на геометрическую интуицию и позволяет увидеть связь разных разделов математики между собой. Таким образом, эту дисциплину можно считать важной для формирования полноценного представления о математике в целом. Главным объектом для нас сегодня будет эйлерова характеристика двумерного многообразия, а основным результатом — теорема Гаусса–Бонне.

2 Триангуляции.

Часто бывает так, что для решения задачи нам не нужно знать об объектах всё, а достаточно только одной характеристики, чтобы, например, провести классификацию. Идея эта используется весьма широко и, например, хеширование (англ. hashing) данных в программировании — один из вариантов ее реализации. В частности, контрольные суммы используются для проверки целостности загруженного файла.

Рассмотрим гладкое связное замкнутое (компактное без края) двумерное **многообразие** M^2 . Точное определение было дано в курсе раньше, а сейчас вспомним, что многообразие — это естественное обобщение понятия поверхности. Двумерность означает, что достаточно задать две координаты (скорее всего, не глобально) для того, чтобы однозначно определить точку на этом объекте. Простейшими примерами могут быть двумерная сфера S^2 , тор T^2 , бутылка Клейна K^2 .

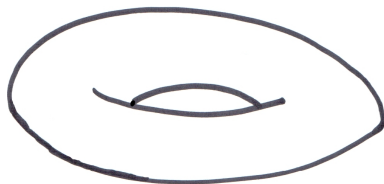


Рис. 1: Тор T^2 (поверхность бублика).

Построим отображение $\chi: M^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, которое каждому многообразию будет сопоставлять некоторое целое число. Как мы увидим дальше, эта числовая функция может быть весьма полезна в нескольких задачах.

Первым шагом построения нужной функции будет **триангуляция** поверхности. Термин этот в геометрии и геодезии означает практически одно и то же: нам нужно построить сеть из треугольников. Нарисуем на нашей поверхности произвольную сетку из треугольников, соблюдая следующие правила: 1) два треугольника могут пересекаться только по общему ребру или иметь общую вершину, 2) внутренность каждого треугольника триангуляции гомеоморфна двумерному диску, 3) среди ребер триангуляции (сторон треугольников) не может быть петель.



Рис. 2: Триангуляция на поверхности.

Напомню, что многообразия называют **гомеоморфными**, если между ними можно установить непрерывное взаимно-однозначное соответствие, обратное к которому тоже непрерывно. Такие объекты неразличимы с точки зрения топологии.

Оказывается, что можно построить триангуляцию для любого гладкого компактного связного замкнутого двумерного многообразия M^2 .

3 Эйлерова характеристика и связная сумма многообразий.

Если у нас задано замощение поверхности треугольниками, то мы можем ввести **эйлерову характеристику** триангуляции τ : $\chi_\tau(M^2) = \text{число вершин} - \text{число ребер} + \text{число граней}$ (треугольников).

Утверждение 3.1 *Эйлерова характеристика многообразия не зависит от выбора триангуляции. Она является топологическим инвариантом (не меняется при гомеоморфизмах).*

Оказывается, что эйлерову характеристику можно вычислять, не строя какую-либо триангуляцию явно. Для этого нам понадобится операция связной суммы двух двумерных многообразий M и N . Из каждого из этих объектов вырежем по диску.

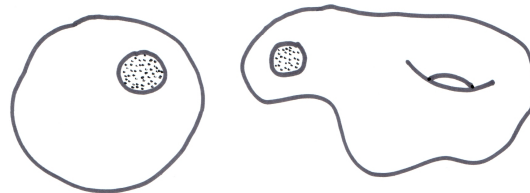


Рис. 3: Из каждого многообразия удалили диск.

Мы получим, что для каждой поверхности появилась граница — окружность. Склеим получившиеся окружности, сохраняя ориентацию. Результатом этой склейки будет двумерное многообразие, которое обозначим $M \sharp N$ и назовем **связной суммой**. Под склеиванием мы здесь понимаем отождествление соответствующих точек двух окружностей.

Утверждение 3.2 $\chi(M \sharp N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$.

Действительно, если вырезать в каждом многообразии по треугольнику триангуляции (а он гомеоморфен диску), мы получим, что у новой поверхности будет на 3 меньше вершин, на 3 меньше ребер и исчезнет два треугольника.

Тогда $\chi(M \sharp N) = V_1 + V_2 - 3 - E_1 - E_2 + 3 + F_1 + F_2 - 2 = (V_1 - E_1 + F_1) + (V_2 - E_2 + F_2) - 2$. Что и требовалось доказать.

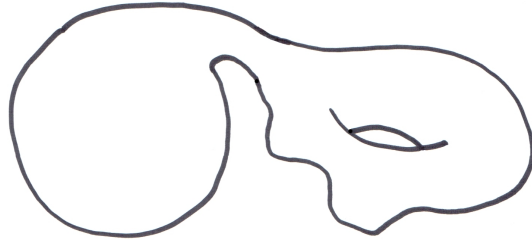


Рис. 4: Связная сумма.

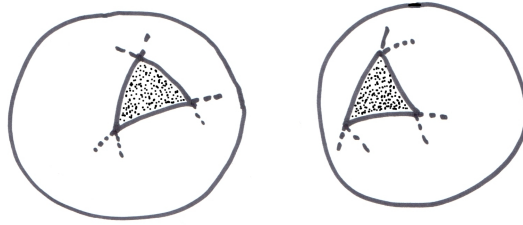


Рис. 5: Вырезаем из M и N по одному треугольнику триангуляции.

Пример 3.1 Сфера S^2 . Обратим внимание на то, что $S^2 = S^2 \# S^2$. Действительно, если вырезать по окружности на каждой из сфер и склеить оставшиеся поверхности, то результат можно будет непрерывно продеформировать в сферу. Применим к этому соотношению утверждение о связной сумме двух многообразий: $\chi(S^2) = \chi(S^2) + \chi(S^2) - 2$, откуда получим $\chi(S^2) = 2$, без построения триангуляции.

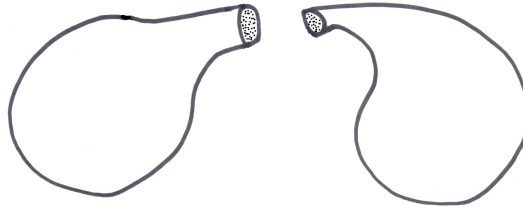


Рис. 6: Сфера как связная сумма двух сфер.

Пример 3.2 Тор T^2 . Здесь мы не будем использовать приведенное рассуждение, но будем рассуждать похожим способом. Для того, чтобы получить из сферы тор, выкинем из S^2 два диска и склеим граничные окружности, сохраняя ориентацию. Если на сфере уже была построена триангуляция, то параметры новой триангуляции будут выражаться через параметры старой следующим образом: $V_1 = V - 3$, $E_1 = E - 3$, $F_1 = F - 2$. Отсюда получим: $\chi(T^2) = V_1 - E_1 + F_1 = (V - 3) - (E - 3) + (F - 2) = \chi(S^2) - 2 = 2 - 2 = 0$.

Прежде чем привести еще один пример, введем новую операцию, называемую “**приклеиванием ручки**”. Вырезаем из поверхности два диска, а к образовавшимся окружностям приклеиваем, с сохранением ориентации, цилиндр, который собственно и называется “ручкой”. Приклеиванием одной ручки к сфере получим из нее “двухпудовую гиру”.

Пример 3.3 Сфера с g ручками: M_g^2 . Это многообразие можно получить как связную сумму g экземпляров T^2 , то есть: $M_g^2 = T^2 \# \dots \# T^2$. Тогда $\chi(M_g^2) = g\chi(T^2) - 2(g - 1) = 0 + 2 - 2g = 2 - 2g$.

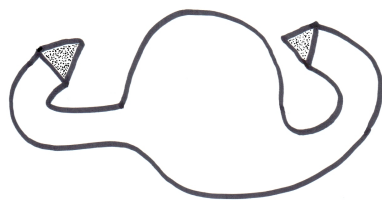


Рис. 7: Тор, получаемый склейкой по двум окружностям, вырезанным из сферы.

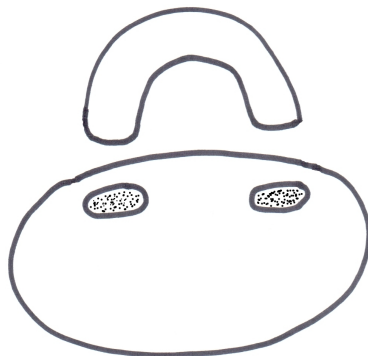


Рис. 8: Тор, получаемый приклеиванием одной ручки к сфере.

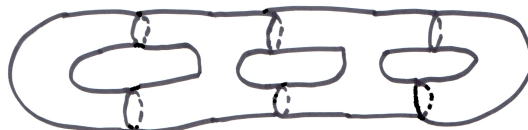


Рис. 9: Сфера с тремя ручками, как результат склейки торов.

Обратим внимание на то, что границей листа Мебиуса (этот объект был введен на одной из предыдущих лекций) является окружность.

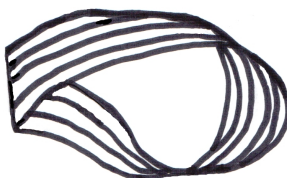


Рис. 10: Лист Мебиуса.

Поэтому, если мы вырежем из сферы диск, границей которого является окружность, то образовавшуюся “дыру” мы можем заклеить листом Мебиуса. Построенную таким образом поверхность называют сферой с пленкой Мебиуса. Она является неориентируемой, так как ориентация изменится, если мы будем двигаться по той ее части, которая соответствует листу Мебиуса.

4 О классификации многообразий.

Нужно отметить, что эйлерову характеристику можно использовать при построении **классификации двумерных многообразий**, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

Поставим перед собой задачу описать все гладкие компактные связные замкнутые многообразия с точностью до гомеоморфизма. То есть, мы будем считать многообразия одинаковыми, если между ними можно установить гомеоморфизм, и разными, если гомеоморфизм построить нельзя. Оказывается, что сложность этой задачи очень сильно возрастает с ростом размерности.

При $n = 1$ есть ровно одно такое многообразие — окружность S^1 .

При $n = 2$ доказана теорема о классификации, приведенная ниже.

При $n = 3$ это актуальная на сегодняшний момент задача. Последними результатами тут нужно назвать нашумевшее доказательство Григорием Перельманом гипотезы Терстона (теоремы о геометризации), которое приводит к наиболее полной на данный момент трехмерной классификации. Гипотеза Терстона (Thurston's geometrization conjecture) обобщает более известную **гипотезу Пуанкаре**, которая звучит так: всякое односвязное компактное трёхмерное многообразие без края гомеоморфно трёхмерной сфере S^3 .

Напомню, что **односвязной** называют область со следующим свойством: любая окружность, помещенная внутрь такой области, может быть непрерывно стянута в точку. Примером неодносвязной области может служить кольцо. Окружность, которая опоясывает внутреннюю границу кольца, никак нельзя сжать, не разорвав её.

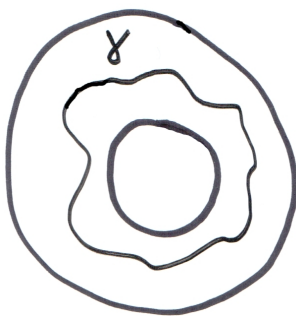


Рис. 11: Неодносвязная область.

Но вернемся к размерности два. Справедлива следующая

Теорема 4.1 Любое гладкое замкнутое двумерное связное многообразие гомеоморфно или сфере с g ручками, $g \geq 0$, или сфере с μ вклеенными пленками Мебиуса, $\mu \geq 0$. Сферы с ручками (при разных g) и сферы с пленками (при разных μ) попарно негомеоморфны.

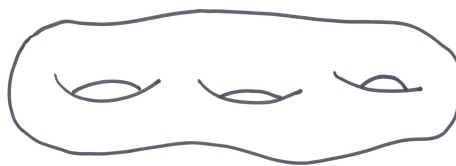


Рис. 12: Сфера с тремя ручками.

Доказательство этой теоремы я здесь приводить не буду, но отмечу, что в нем может быть использована эйлерова характеристика. А именно, мы можем сразу получить, что две сферы с разным количеством ручек не могут быть гомеоморфны между собой, так как их эйлеровы характеристики различны.

Заметим, что для того, чтобы однозначно определить гладкое замкнутое двумерное связное многообразие, достаточно знать, ориентируемо ли оно (этот параметр принимает всего два значения), и его эйлерову характеристику.

Пример 4.1 Ориентируемое многообразие с $\chi(M^2) = 0$ всегда гомеоморфно тору.

Мы знаем, что $\chi(M_g^2) = 2 - 2g$, где g — число ручек, приклеенных к сфере. Так как эта зависимость линейна и взаимно-однозначна, часто для описания многообразия используют число g , называя его родом поверхности. В случае тора род g равен единице.

5 Теорема Гаусса–Бонне.

Теперь докажем теорему, в которой объект дифференциальной геометрии и анализа выражается через его эйлерову характеристику, то есть объект топологический. А именно, рассмотрим **гауссову кривизну** K многообразия (меру искривления поверхности в окрестности какой-либо её точки, определение и обсуждение было на одной из прошлых лекций) и проинтегрируем ее по всей поверхности.

Теорема 5.1 *Теорема Гаусса–Бонне.* Пусть M^2 — гладкое связное замкнутое двумерное многообразие. Тогда интеграл от гауссовой кривизны по всему многообразию можно вычислить по следующей формуле:

$$\int_{M^2} K d\sigma = 2\pi\chi(M^2).$$

Доказательство. Выведем нужную формулу из теоремы Гаусса–Бонне для случая односвязной области (она доказывалась на одной из предыдущих лекций, доказательство можно также найти в учебнике П.К. Рашевского):

$$\int_M K d\sigma + \int_\gamma k_g dl = 2\pi - \sum_{j=1}^n (\pi - \alpha_j).$$

Здесь γ — гладкий непрерывный контур с конечным числом скачков касательной, целиком лежащий в односвязной области, k_g — геодезическая кривизна этого контура, α_j — углы, описывающие разрывы.

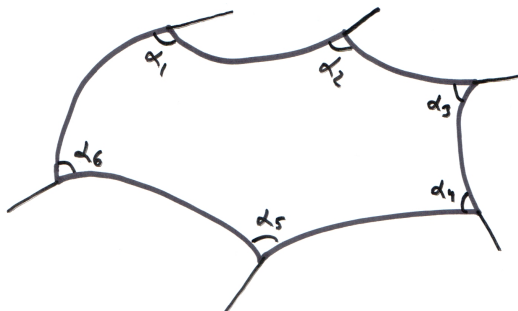


Рис. 13: Контур с конечным числом скачков касательной.

Выпишем такую формулу отдельно для каждого треугольника триангуляции и сложим. В левой части мы получим, что первые слагаемые сформируют интеграл по всей поверхности: $\int_M K d\sigma$. Вторые слагаемые в сумме дадут ноль, так как каждое ребро принадлежит сразу двум треугольникам и, соответственно, проходится в разные стороны. При суммировании такие интегралы сократятся.

Напомним, что $\chi(M^2) = V - E + F$, где V — число вершин, E — число ребер, F — число граней (треугольников). Теперь посмотрим, как можно преобразовать правую часть: $2\pi F - F \sum_{j=1}^3 (\pi - \alpha_j) = 2\pi F - 3\pi F + F \sum_{j=1}^3 \alpha_j = 2\pi F - 2\pi E + F \sum_{j=1}^3 \alpha_j$, так как $3F = 2E$, поскольку все ребра внутренние.

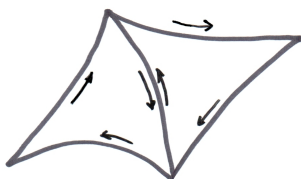


Рис. 14: Интегралы по ребрам.

Теперь обратим внимание на то, что $F \sum_{j=1}^3 \alpha_j = 2\pi V$, так как сумма по всем треугольникам равна 2π на число вершин V .

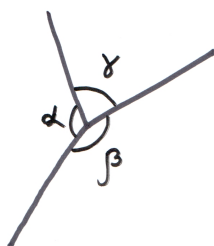


Рис. 15: Сумма углов в каждой вершине равна 2π .

Окончательно получаем, $2\pi(F - E + V) = 2\pi\chi(M^2)$.

Пример 5.1 Рассмотрим стандартную сферу радиуса R . Тогда в каждой точке ее гауссова кривизна одинакова и равна $1/R^2$. Поверхностный интеграл от постоянной функции равен произведению значения функции на площадь сферы, то есть $4\pi R^2/R^2 = 4\pi$. Что действительно совпадает с $2\pi\chi(S^2) = 4\pi$. Обратим внимание на то, что по теореме и интеграл по деформированной поверхности (например, напоминающей грушу), гомеоморфной сфере, тоже будет равен 4π , хотя гауссова кривизна в этом случае совсем не будет постоянной.

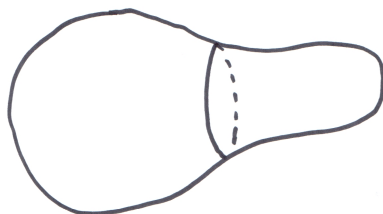


Рис. 16: Поверхность гомеоморфная сфере.

Список литературы

- [1] Иванов А.О., Тужилин А.А. Лекции по классической дифференциальной геометрии. Москва: Университетская книга; Логос, 2009. – 224 с.
- [2] Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии – издание 4, – Москва, Эдиториал УРСС, 2003. – 429 с.
- [3] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. Издание второе, дополненное и переработанное. – Москва, изд-во "Факториал Пресс 2000. – 448 с.

- [4] Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. Переработанное издание. – Москва, Физматлит, 2001. – 351 с.
- [5] Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии. Второе издание (исправленное и дополненное). – Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006. – 260 с.
- [6] Розендорн Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии. Издание третье, исправленное и дополненное. – Москва: Издательство Физико–математической литературы, 2008. – 144 с.
- [7] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Переработанное издание. Том 1. – Москва, изд-во Эдиториал УРСС, 1998. – 333 с.
- [8] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Переработанное издание. Том 2. – Москва, изд-во Эдиториал УРСС, 1998. – 278 с.
- [9] Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 28., – Москва ВИНТИ, 1988. – 299 с.
- [10] Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. Издание второе. – Москва: Эдиториал УРСС, 2003. – 408 с.
- [11] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1979.– 432 с.
- [12] Прасолов В.В. Наглядная топология. – М. МЦМО, 2006 – 112 с.
- [13] L. Bessieres, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot, J. Porti, 'Geometrisation of 3-manifolds', EMS Tracts in Mathematics, volume 13. European Mathematical Society, Zurich, 2010. – 257 с.