



Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

## **Методические указания**

**Н.А. Гладков, А.С. Романов**

**ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ  
ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ.  
ТЕМА «ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ.  
КОЛЕБАНИЯ. ВОЛНЫ»**

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

Н.А. Гладков, А.С. Романов

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ  
ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ.  
ТЕМА «ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ.  
КОЛЕБАНИЯ. ВОЛНЫ»

*Методические указания*

Москва  
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
2012

УДК 531.62:534.1  
ББК 22.3  
Г52

Рецензент *В.А. Велданов*

**Гладков Н.А.**

Г52 Домашнее задание по курсу общей физики. Тема «Законы сохранения. Колебания. Волны»: метод. указания / Н.А. Гладков, А.С. Романов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 64, [2] с.: ил.

Методические указания содержат четыре раздела, составленные в соответствии с четырьмя задачами домашнего задания по механике. Все задачи имеют многовариантные условия. Помимо этого методические указания содержат примеры решений типовых задач.

Для студентов первого курса, изучающих механику по программе курса общей физики, утвержденной Ученым советом МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 531.62:534.1  
ББК 22.3

*Учебное издание*

**Гладков** Николай Алексеевич  
**Романов** Александр Сергеевич

**ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ.  
ТЕМА «ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. КОЛЕБАНИЯ. ВОЛНЫ»**

*Работа издается в авторской редакции*  
Корректор *Р.В. Царева*  
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 02.02.2012. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 3,72. Тираж 300 экз. Изд. № 13.  
Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Домашнее задание и методические указания к нему посвящены изучению основных разделов механики, усвоение которых необходимо для изучения всех остальных разделов курса общей физики. Выполнение задания должно способствовать выработке у студентов устойчивых навыков решения многоходовых физических задач и более глубокому усвоению и пониманию основных физических законов.

Задачи необходимо решать в общем аналитическом виде, используя общеизвестные стандартные математические преобразования. В результате таких действий студент получает соответствующую формулу для искомой физической величины, а затем подставляет в нее числовые значения исходных величин и получает итоговый числовой результат. Например, круговая частота собственных незатухающих колебаний пружинного маятника рассчитывается по формуле  $\omega = \sqrt{k/m}$ , где  $k = 10 \text{ Н/м}$ ,  $m = 0,1 \text{ кг}$ , тогда  $\omega = \sqrt{10/0,1} = 10 \text{ 1/с}$ .

## ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Решение каждой задачи оформляют на отдельных листах. На лицевой стороне первого листа должно быть написано:

Домашнее задание по курсу общей физики

1-й курс (2-й семестр)

Группа ..... Фамилия, инициалы

.....  
Вариант № ..... Задача №

.....

На первой странице следует написать условия задачи с исходными данными соответствующего варианта, представить заданный рисунок. Далее должно быть приведено решение задачи. Все вводимые студентом новые параметры и обозначения физических и геометрических величин обязательно следует сопровождать соответствующими пояснениями. При решении задачи необходимо ссылаться на используемые физические законы. Например: «Согласно закону сохранения импульса имеем . . . », или «В соответствии с законом сохранения энергии следует написать . . . ». Уравнения, математические выражения и формулы нужно выделять отдельной строкой и обязательно нумеровать. Это позволяет при преобразованиях делать ссылку и на эти номера. Например: «Подставим зависимость (4) в уравнение (7) . . . ». Такое изложение хода решения задачи позволяет преподавателю проверить правильность предлагаемого решения и указать на конкретную ошибку, если она имеется. Целесообразно сопровождать решение задачи пояснительными рисунками, которые показывают исследуемую систему в ее движении, развитии.

Домашнее задание состоит из четырех задач. Первая задача посвящена динамике материальной точки, решается с использованием закона сохранения импульса и закона сохранения энергии и имеет три типа различных независимых условий.

Вторая задача относится к динамике вращательного движения твердого тела, решается с использованием закона сохранения момента импульса, закона сохранения энергии и имеет четыре типа различных независимых условий.

Третья задача посвящена колебаниям, решается с применением уравнений динамики или закона сохранения механической энергии и имеет пять типов различных независимых условий.

Четвертая задача относится к волновым процессам, решается методом суперпозиции (наложения) волн и имеет четыре типа различных независимых условий.

Исходные данные для каждого конкретного варианта домашнего задания сведены в соответствующие таблицы. При этом в таблицах крестиками отмечены предполагаемый характер взаимодействия частей рассматриваемой механической системы, а также те физические величины, значения которых требуется определить при решении задач.

## 1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

### Задача 1-1

Две гладкие частицы сферической формы массами  $m_1$  и  $m_2$ , движущиеся со скоростями  $\vec{V}_{10}$  и  $\vec{V}_{20}$ , сталкиваются под углом  $\beta$ , как показано на рис. 1.

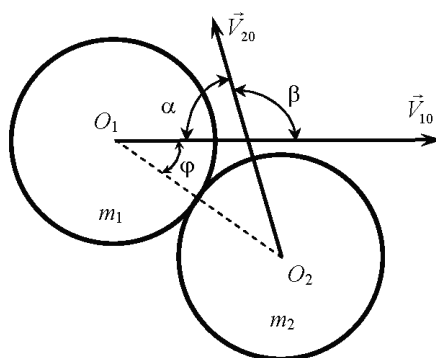


Рис. 1

Расстояние до места встречи и скорости частиц соответствуют условиям соударения (отсутствию промаха). На рис. 1 введены следующие обозначения:

$\beta$  — угол встречи, т. е. угол, образованный векторами  $\vec{V}_{10}$  и  $\vec{V}_{20}$ ;

$\alpha = \pi - \beta$  — дополнительный угол;

$\varphi$  — угол между линией удара  $O_1O_2$  и вектором  $\vec{V}_{10}$ .

В задаче также используются следующие обозначения:

$\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$  — скорости соответственно 1-й и 2-й частицы после удара;

$\vec{U}$  — совместная скорость частиц после абсолютно неупругого удара;

$\theta$  — угол отклонения частицы после удара, т. е. угол, образованный векторами  $\vec{V}_{10}$  и  $\vec{V}_1$  или  $\vec{V}_{10}$  и  $\vec{U}$ ;

$\gamma$  — угол разлета частиц после удара, т. е. угол, образованный векторами  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$ ;

$\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$  — импульсы соответственно 1-й и 2-й частицы после удара;

$E_1, E_2$  — кинетические энергии соответственно 1-й и 2-й частицы после удара;

$\Delta E$  — изменение кинетической энергии механической системы, состоящей из двух частиц, за время удара.

**Возможны следующие виды взаимодействия частиц:**

- а) абсолютно упругий удар (АУУ);
- б) неупругий удар (НУУ);
- в) абсолютно неупругий удар (АНУУ).

**Общие исходные данные:**  $m^* = 10^{-3}$  кг,  $V^* = 10$  м/с,  $\alpha^* = \pi/2$ .

Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задачи представлены в табл. 1.

Таблица 1

Номер варианта	Исходные данные к задаче 1-1						
	$m_1$	$m_2$	$V_{10}$	$V_{20}$	$\alpha$	$\beta$	$\theta$
1	$2m^*$	$m^*$	$V^*$	0	—	$1/3a^*$	—
2	$m^*$	$1/2m^*$	$2V^*$	0	—	$2/3a^*$	—
3	$3m^*$	$2m^*$	$1/2V^*$	0	—	$1/2a^*$	—
4	$3/2m^*$	$1/2m^*$	$3V^*$	0	—	$2/3a^*$	—
5	$2m^*$	$m^*$	$V^*$	$2V^*$	$2/3a^*$	—	—
6	$3m^*$	$2m^*$	$2V^*$	$V^*$	$1/2a^*$	—	—
7	$m^*$	$2m^*$	$V^*$	0	—	$1/3a^*$	$1/4a^*$
8	$2m^*$	$3m^*$	$2V^*$	0	—	$1/2a^*$	$1/3a^*$
9	$m^*$	$m^*$	$V^*$	$V^*$	$1/2a^*$	$1/2a^*$	—
10	$2m^*$	$2m^*$	$2V^*$	$2V^*$	$2/3a^*$	$2/3a^*$	—

Окончание табл. 1

Номер варианта	Вид взаимодействия			Определить									
	АУУ	НУУ	АНУУ	$V_1$	$V_2$	$\gamma$	$E_1$	$E_2$	$\theta$	$p_1$	$p_2$	$\Delta E$	$U$
1	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-
2	+	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-
3	+	-	-	-	-	+	-	-	-	+	+	-	-
4	+	-	-	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-
5	-	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+	+
6	-	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+	+
7	-	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	+	-
8	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	-
9	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-
10	+	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-

**Основные зависимости к задаче 1-1.** Во всех процессах, связанных с ударным взаимодействием частиц, следует считать время удара пренебрежимо малой величиной, т. е. за время удара координаты местоположения и ориентация частиц практически не изменяются.

При соударении двух частиц выполняются законы сохранения импульса и энергии. В общем случае эти законы для данной задачи имеют вид

$$m_1 \vec{V}_{10} + m_2 \vec{V}_{20} = \begin{cases} m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 & \text{при АУУ и НУУ;} \\ (m_1 + m_2) \vec{U} & \text{при АНУУ;} \end{cases}$$

$$\frac{m_1 V_{10}^2}{2} + \frac{m_2 V_{20}^2}{2} = \begin{cases} \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} & \text{при АУУ;} \\ \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + |\Delta E| & \text{при НУУ;} \\ \frac{(m_1 + m_2) U^2}{2} + |\Delta E| & \text{при АНУУ;} \end{cases}$$

### Пример решения задачи 1-1

Два одинаковых абсолютно гладких шара движутся навстречу друг другу со скоростями  $V_{10} = 4V$  и  $V_{20} = V$ . При этом векторы скоростей направлены по касательным к поверхностям противоположных шаров (рис. 2). Определить, под каким углом  $\delta$  к первоначальному направлению движения будет двигаться правый шар после соударения, если удар шаров является абсолютно упругим.

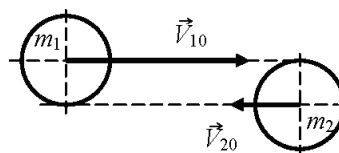


Рис. 2

**Дано:**

$$V_{10} = 4V; \quad V_{20} = V; \quad m_1 = m_2 = m$$

$\delta - ?$

**Решение.** На рис. 3 приведена векторная диаграмма соударения шаров, а на рис. 4 показано расположение шаров в момент удара.

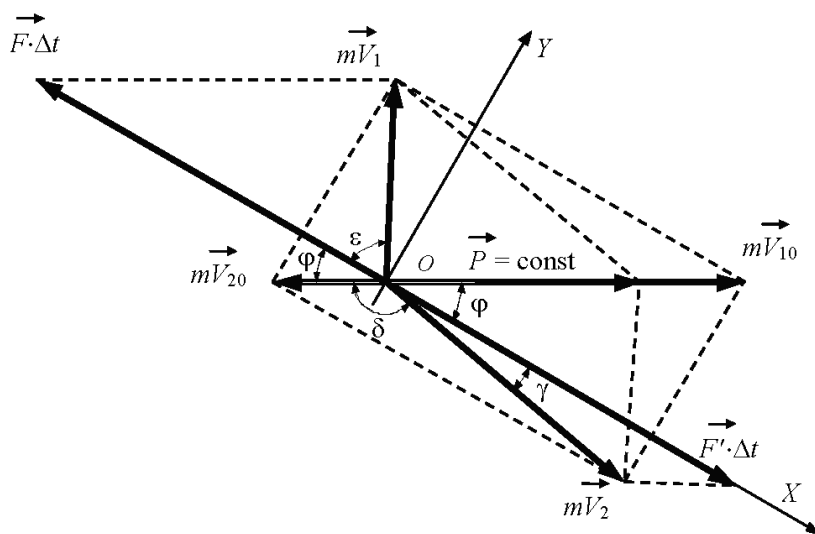
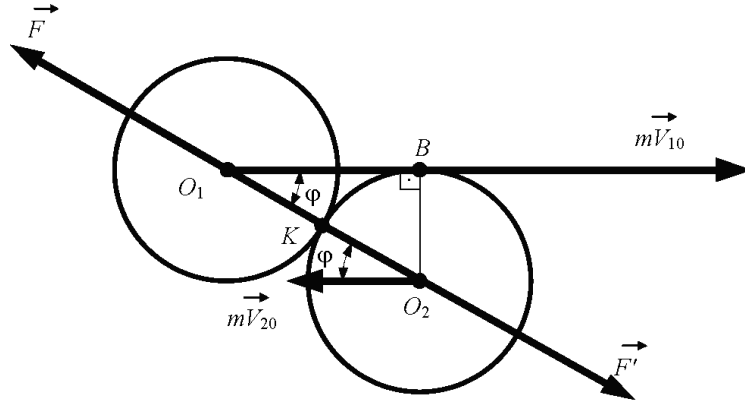


Рис. 3



**Рис. 4**

При упругом ударе шаров выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mV_{10}^2}{2} + \frac{mV_{20}^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2}, \quad (1.1)$$

где  $V_{10} = 4V$  — начальная скорость 1-го шара;  $V_{20} = V$  — начальная скорость 2-го шара;  $V_1$  — конечная скорость 1-го шара (скорость 1-го шара после удара);  $V_2$  — конечная скорость 2-го шара (скорость 2-го шара после удара).

Сокращая уравнение (1.1) на  $m/2$ , приходим к более простому выражению

$$V_{10}^2 + V_{20}^2 = V_1^2 + V_2^2. \quad (1.2)$$

Законы изменения импульсов для 1-го и 2-го шаров имеют вид

$$m\vec{V}_1 - m\vec{V}_{10} = \vec{F}\Delta t; \quad (1.3)$$

$$m\vec{V}_2 - m\vec{V}_{20} = \vec{F}'\Delta t, \quad (1.4)$$

где  $\Delta t$  — интервал времени взаимодействия шаров при ударе;  $\vec{F}$  — сила, с которой 2-й шар действовал на 1-й шар во время удара;  $\vec{F}'$  — сила, с которой 1-й шар при ударе действовал на 2-й шар.

Векторы  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$  лежат на линии удара (линия, проходящая через центры масс шаров и точку контакта  $K$ ).

Согласно третьему закону Ньютона,

$$\vec{F} = -\vec{F}'; \quad |\vec{F}| = |\vec{F}'| = F. \quad (1.5)$$

Суммируя выражения (1.3) и (1.4), приходим к следующему уравнению:

$$m\vec{V}_1 - m\vec{V}_{10} + m\vec{V}_2 - m\vec{V}_{20} = (\vec{F} + \vec{F}')\Delta t,$$

которое с учетом формулы (1.5) преобразуется в закон сохранения импульса:

$$\vec{P} = m\vec{V}_{10} + m\vec{V}_{20} = m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2 = \text{const}. \quad (1.6)$$

Сокращая (1.6) на  $m$ , получаем

$$\vec{V}_{10} + \vec{V}_{20} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2. \quad (1.7)$$

Проецируем уравнение (1.7) на ось  $OX$ , совпадающую с линией удара (см. рис. 3),

$$V_{10X} + V_{20X} = V_{1X} + V_{2X}. \quad (1.8)$$

Проецируем выражение (1.3) и (1.4) на ось  $OY$ , расположенную перпендикулярно линии удара:

$$mV_{1y} - mV_{10y} = 0;$$

$$mV_{2y} - mV_{20y} = 0,$$

Сокращая полученные выражения на массу  $m$ , приходим к равенствам:

$$V_{1y} = V_{10y}; \quad (1.9)$$

$$V_{2y} = V_{20y}. \quad (1.10)$$

Преобразуем формулу (1.8):

$$V_{10X} - V_{1X} = V_{2X} - V_{20X} \quad (1.11)$$

и возводим уравнение (1.11) в квадрат:

$$(V_{10X} - V_{1X})^2 = (V_{2X} - V_{20X})^2,$$

или

$$V_{10X}^2 - 2V_{10X}V_{1X} + V_{1X}^2 = V_{2X}^2 - 2V_{2X}V_{20X} + V_{20X}^2. \quad (1.12)$$

Далее записываем уравнение (1.2) через проекции:

$$V_{10X}^2 + V_{10y}^2 + V_{20X}^2 + V_{20y}^2 = V_{1X}^2 + V_{1y}^2 + V_{2X}^2 + V_{2y}^2.$$

Согласно формулам (1.9) и (1.10), это выражение можно упростить:

$$V_{10X}^2 + V_{20X}^2 = V_{1X}^2 + V_{2X}^2,$$

или

$$V_{10X}^2 - V_{1X}^2 = V_{2X}^2 - V_{20X}^2. \quad (1.13)$$

Вычитаем выражение (1.13) из (1.12):

$$-2V_{10X}V_{1X} + 2V_{1X}^2 = 2V_{20X}^2 - 2V_{2X}V_{20X},$$

или

$$V_{1X}(V_{1X} - V_{10X}) = V_{20X}(V_{20X} - V_{2X}). \quad (1.14)$$

Но, согласно формуле (1.11), выражения, стоящие в скобках в левой и правой частях уравнения (1.14), равны. Следовательно,

$$V_{1X} = V_{20X}. \quad (1.15)$$

Подставляя равенство (1.15) в формулу (1.11), приходим к другому равенству

$$V_{10X} = V_{2X}. \quad (1.16)$$

Умножая уравнение (1.15) и (1.16) на  $m$ , получаем равенство проекций импульсов:

$$mV_{1X} = mV_{20X}; \quad (1.17)$$

$$mV_{10X} = mV_{2X}. \quad (1.18)$$

Выражения (1.17) и (1.18) определяют взаимный обмен импульсами шаров при ударе вдоль оси  $OX$  (вдоль линии удара).

Угол  $\varphi$  между линией удара  $O_1K O_2$  и вектором  $\vec{V}_{10}$  находим из чисто геометрических построений (см. рис. 4). Поскольку  $O_1 O_2 = 2R$  (здесь  $R$  — радиус шара), а  $O_2 B = R$ ,

$$\sin \varphi = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\varphi = 30^\circ.$$

Согласно формулам (1.9), (1.10) и рис. 3 получаем:

$$V_1 \sin \varepsilon = V_{10} \sin \varphi; \quad (1.19)$$

$$V_2 \sin \gamma = V_{20} \sin \varphi, \quad (1.20)$$

а согласно выражениям (1.15), (1.16) и рис. 3, находим:

$$V_1 \cos \varepsilon = V_{20} \cos \varphi; \quad (1.21)$$

$$V_2 \cos \gamma = V_{10} \cos \varphi. \quad (1.22)$$

С учетом того, что

$$\sin \varphi = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos \varphi = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$V_{10} = 4V; \quad V_{20} = V,$$

формулы (1.19)–(1.22) принимают вид:

$$V_1 \sin \varepsilon = 2V; \quad (1.23)$$

$$V_2 \sin \gamma = \frac{1}{2}V; \quad (1.24)$$

$$V_1 \cos \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}V; \quad (1.25)$$

$$V_2 \cos \gamma = 2\sqrt{3}V. \quad (1.26)$$

Итак, имеем четыре уравнения (1.23)–(1.26) и четыре неизвестные величины: скорости  $V_1$ ,  $V_2$  и углы  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ .

Разделим выражение (1.24) на (1.26):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{4\sqrt{3}} = 0,144,$$

отсюда

$$\gamma = \operatorname{arctg} 0,144 \Rightarrow \boxed{\gamma = 8^\circ}.$$

Согласно рис. 3,  $\delta = 180^\circ - \varphi - \gamma$ , или  $\delta = 180^\circ - 30^\circ - 8^\circ = 142^\circ$ .

Итак,  $\boxed{\delta = 142^\circ}$ .

Разделим уравнение (1.25) на (1.23):

$$\operatorname{ctg} \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,433,$$

отсюда

$$\varepsilon = \operatorname{arcctg} 0,433 \Rightarrow \varepsilon = 66^\circ 36'.$$

Из выражения (1.23) находим

$$V_1 = \frac{2V}{\sin(66^\circ 36')} = \frac{2V}{0,91} = 2,2V.$$

Выполняем проверку согласно выражению (1.25):

$$V_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{V}{\cos(66^\circ 36')} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{V}{0,4} = 2,2V.$$

Из формулы (1.24) следует, что

$$V_2 = \frac{V}{2\sin \gamma} = \frac{V}{2\sin(8^\circ)} = \frac{V}{2 \cdot 0,143} = 3,5V.$$

Выполняем проверку согласно формуле (1.26):

$$V_2 = \frac{2\sqrt{3}}{\cos \gamma} V = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 8^\circ} V = \frac{2\sqrt{3}}{0,99} V = 3,5V.$$

### Задача 1-2

Гладкая частица сферической формы массой  $m$ , которую можно рассматривать как материальную точку, ударяется со скоростью  $\vec{V}_0$  о гладкую массивную преграду, которая движется с постоянной скоростью  $\vec{U}$ . Угол, образованный векторами  $\vec{V}_0$  и  $\vec{U}$ , равен  $\beta$ . Массу преграды считаем бесконечной. На рис. 5, 6 преграда имеет форму плоской стенки, на рис. 7 — форму острого конуса с углом раствора  $\gamma$ , а на рис. 8 — форму конуса со сферической головной частью радиусом  $R$ . Удар частицы о сферическую поверхность происходит в точке  $A$ , расположенной под углом  $\gamma$  относительно оси преграды. При этом  $AO = R$ .

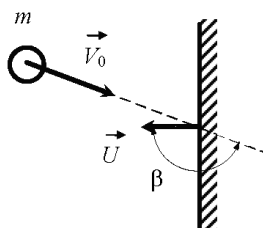


Рис. 5

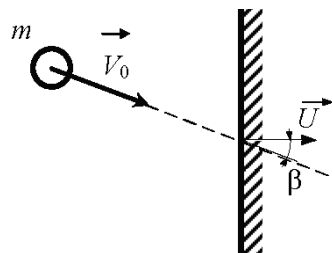


Рис. 6

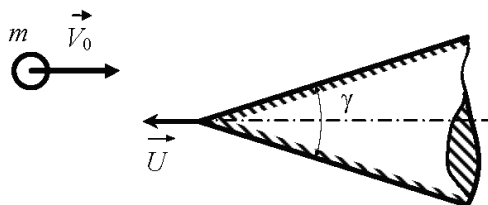


Рис. 7

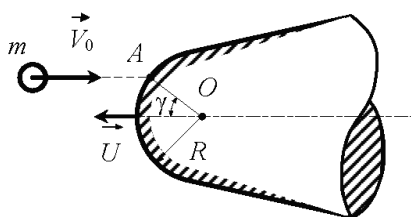


Рис. 8

Возможны следующие виды взаимодействия частицы и преграды:

- а) абсолютно упругий удар (АУУ);
- б) неупругий удар (НУУ);
- в) абсолютно неупругий удар (АНУУ).

При решении задачи приняты следующие обозначения:

$\vec{V}_k$  — вектор конечной скорости частицы после удара;

$\alpha_k$  — угол, образованный векторами  $\vec{V}_k$  и  $\vec{U}$ ;

$\Delta V = V_k - V_0$  — изменение модуля вектора скорости частицы за время удара;

$|\Delta \vec{P}|$  — модуль изменения вектора импульса частицы за время удара;

$\Delta E$  — изменение кинетической энергии частицы за время удара;

$F$  — модуль средней силы, с которой частица действует на преграду во время удара;

$F \Delta t$  — модуль импульса силы, который за время удара  $\Delta t$  частица передает преграде;

$E_d = \frac{\eta m V_0^2}{2}$  — энергия деформирования частицы при ударе,

выраженная через ее начальную кинетическую энергию  $\eta$  – безразмерный коэффициент.

**Общие исходные данные:**  $m^* = 10^{-3}$  кг,  $V^* = 6$  м/с,  $U^* = 2$  м/с,  $\beta^* = 180^\circ$ ,  $\eta^* = 0,5$ ,  $\Delta t^* = 10^{-5}$  с. Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задачи представлены в табл. 2.

Таблица 2

Номер варианта	Исходные данные к задаче 1-2							
	Номер рисунка	$m$	$V_0$	$U$	$\beta$	$\gamma$	$\eta$	$\Delta t$
11	5	$m^*$	$V^*$	$U^*$	$2/3\beta^*$	—	—	$\Delta t^*$
12	6	$2m^*$	$2V^*$	$U^*$	$1/4\beta^*$	—	—	$2\Delta t^*$
13	5	$5m^*$	$3V^*$	$2U^*$	$5/6\beta^*$	—	—	$3\Delta t^*$
14	6	$3m^*$	$1/2V^*$	$1/2U^*$	$1/6\beta^*$	—	—	—
15	7	$4m^*$	$2V^*$	$2U^*$	—	$1/3\beta^*$	—	—
16	8	$m^*$	$1/2V^*$	$U^*$	—	$1/6\beta^*$	—	—
17	5	$2m^*$	$2V^*$	$U^*$	0	—	$3/4\eta^*$	$8\Delta t^*$
18	6	$3m^*$	$V^*$	$2U^*$	$\beta^*$	—	$1/2\eta^*$	—
19	7	$m^*$	$2V^*$	$U^*$	—	$1/2\beta^*$	—	—
20	8	$2m^*$	$V^*$	$U^*$	—	$1/3\beta^*$	—	—

Окончание табл. 2

Номер варианта	Вид взаимодействия			Определить							
	АУУ	НУУ	АНУУ	$V_k$	$\alpha_k$	$\Delta V$	$\Delta E$	$ \Delta p $	$F \Delta t$	$F$	$\eta$
11	+	—	—	+	+	+	+	+	—	+	—
12	+	—	—	+	+	+	+	+	—	+	—
13	+	—	—	+	+	+	+	+	—	+	—
14	+	—	—	+	+	+	+	+	+	—	—
15	+	—	—	+	+	+	+	+	+	—	—
16	+	—	—	+	+	+	+	+	+	—	—

Номер варианта	Вид взаимодействия			Определить							
	АУУ	НУУ	АНУУ	$V_k$	$\alpha_k$	$\Delta V$	$\Delta E$	$ \Delta \vec{p} $	$F \Delta t$	$F$	$\eta$
17	—	+	—	+	—	+	+	+	—	+	—
18	—	+	—	+	—	+	+	+	+	—	—
19	—	—	+	+	—	+	+	+	—	—	+
20	—	—	+	+	—	+	+	+	—	—	+

**Основные зависимости к задаче 1-2.** При решении этой задачи целесообразно использовать кинематическое соотношение

$$\vec{V} = \vec{U} + \vec{V}', \quad (1.27)$$

где  $\vec{V}$  — абсолютная скорость частицы;  $\vec{U}$  — вектор скорости подвижной стенки (скорость подвижной инерциальной системы отсчета (ИСО));  $\vec{V}'$  — скорость частицы относительно преграды.

Тогда закон сохранения энергии примет вид

$$\frac{mV_0'^2}{2} = \begin{cases} \frac{mV_k'^2}{2} \text{ при АУУ;} \\ \frac{mV_k'^2}{2} + E_d \text{ при НУУ;} \\ E_d \text{ при АНУУ,} \end{cases}$$

где  $\vec{V}'_0$  и  $\vec{V}'_k$  — векторы относительной скорости частицы соответственно до и после удара. Закон изменения импульса частицы при ударе о преграду имеет вид:

$$m\vec{V}'_k - m\vec{V}'_0 = \vec{F} \Delta t, \quad (1.28)$$

где  $\vec{V}'_0$  и  $\vec{V}'_k$  — векторы абсолютной скорости частицы до и после удара;  $\vec{F}$  — вектор средней силы, с которой преграда действует на частицу.

После подстановки в уравнение (1.28) зависимости (1.27) получаем закон изменения импульса, выраженный через относительные скорости:

$$m\vec{V}'_k - m\vec{V}'_0 = \vec{F} \Delta t.$$

### Пример решения задачи 1-2

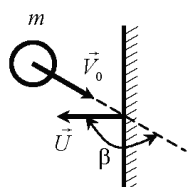


Рис. 9

Гладкая частица сферической формы массой  $m = 10^{-3}$  кг, летящая со скоростью  $V_0 = 6$  м/с, ударяется о гладкую плоскую массивную стенку, которая движется со скоростью  $U = 2$  м/с. Угол, образованный векторами  $\vec{V}_0$  и  $\vec{U}$ , равен  $\beta = 120^\circ$  (рис. 9), время удара  $\Delta t = 10^{-4}$  с. Массу стенки считать бесконечной. Вид взаимодействия — абсолютно упругий удар.

**Определить:**

- скорость частицы после удара  $V_k$ ;
- угол  $\alpha_k$ , образованный векторами  $\vec{V}_k$  и  $\vec{U}$ ;
- модуль изменения импульса частицы  $|\Delta \vec{P}|$ ;
- модуль средней силы  $F$ , с которой частица действует на стенку за время удара.

**Дано:**

$$m = 10^{-3} \text{ кг}, V_0 = 6 \text{ м/с}, U = 2 \text{ м/с},$$

$$\beta = 120^\circ, \Delta t = 10^{-4} \text{ с}, \text{ АУУ.}$$

---


$$V_k - ?, \alpha_k - ?, |\Delta \vec{P}| - ?, F - ?$$

**Решение.** С движущейся стенкой свяжем подвижную систему координат  $X'O'Y'$ . На рис. 10 представлена векторная диаграмма скоростей при ударе частицы о подвижную стенку. Здесь:

$\vec{V}_0$  — вектор начальной абсолютной скорости частицы;

$\vec{V}'_0$  — вектор начальной скорости частицы относительно подвижной стенки;

$\vec{V}_k$  — вектор конечной абсолютной скорости частицы;

$\vec{V}'_k$  — вектор конечной скорости частицы относительно подвижной стенки.

Эти скорости связаны соотношениями

$$\vec{V}_0 = \vec{U} + \vec{V}'_0; \quad (1.29)$$

$$\vec{V}_k = \vec{U} + \vec{V}'_k. \quad (1.30)$$

Соответствующие углы указаны на рис. 10, в частности, угол  $\alpha_0 = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .  $\alpha_0 = 60^\circ$ .

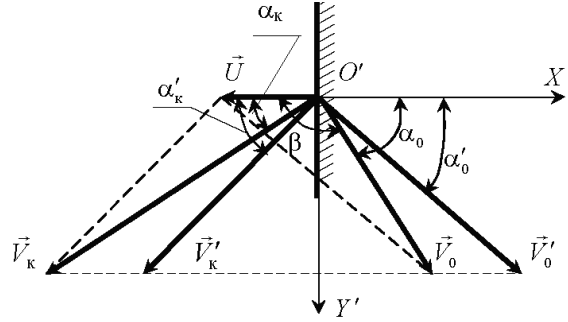


Рис. 10

Проецируем соотношения (1.29) и (1.30) на оси  $O'X'$  и  $O'Y'$ :

$$V_0 \cos \alpha_0 = -U + V'_0 \cos \alpha'_0; \quad (1.31)$$

$$V_0 \sin \alpha_0 = V'_0 \sin \alpha'_0; \quad (1.32)$$

$$V_k \cos \alpha_k = U + V'_k \cos \alpha'_k; \quad (1.33)$$

$$V_k \sin \alpha_k = V'_k \sin \alpha'_k. \quad (1.34)$$

Уравнение изменения импульса при ударе частицы о стенку имеет вид

$$m\vec{V}_k - m\vec{V}_0 = \vec{F}\Delta t, \quad (1.35)$$

где  $\vec{F}$  — вектор средней силы, с которой стенка действует на частицу во время удара (рис. 11),  $\vec{F}'$  — вектор средней силы, с которой частица действует на стенку во время удара. Согласно третьему закону Ньютона,  $\vec{F} = -\vec{F}'$ , соответственно  $|\vec{F}| = |\vec{F}'| = F$ .

Подставив выражения (1.29) и (1.30) в (1.35), получим

$$m\vec{V}'_k - m\vec{V}'_0 = \vec{F}\Delta t. \quad (1.36)$$

Уравнения (1.35) и (1.36) выражают закон изменения импульса частицы: уравнение (1.35) — относительно неподвижной системы отсчета, а уравнение (1.36) относительно подвижной системы отсчета. Проецируем (1.35) и (1.36) на оси  $O'X'$  и  $O'Y'$ :

$$mV_k \cos \alpha_k + mV_0 \cos \alpha_0 = F\Delta t; \quad (1.37)$$

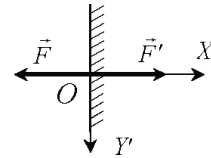


Рис. 11

$$mV_{\kappa} \sin \alpha_{\kappa} = mV_0 \sin \alpha_0; \quad (1.38)$$

$$mV'_{\kappa} \cos \alpha'_{\kappa} + mV'_0 \cos \alpha'_0 = F \Delta t; \quad (1.39)$$

$$mV'_{\kappa} \sin \alpha'_{\kappa} = mV'_0 \sin \alpha'_0. \quad (1.40)$$

Так как удар частицы о стенку абсолютно упругий, будет выполняться закон сохранения механической энергии

$$\frac{m(V'_0)^2}{2} = \frac{m(V'_{\kappa})^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$\boxed{V'_0 = V'_{\kappa}}. \quad (1.41)$$

Подставляя равенство (1.41) в (1.40), получаем  $\sin \alpha'_0 = \sin \alpha'_{\kappa}$ , или

$$\boxed{\alpha'_0 = \alpha'_{\kappa}}. \quad (1.42)$$

Определим угол  $\alpha'_0$ . С этой целью преобразуем формулы (1.31) и (1.32). Первоначально из (1.31) находим

$$V'_0 \cos \alpha'_0 = U + V_0 \cos \alpha_0, \quad (1.43)$$

а затем делим выражение (1.32) на (1.43), в итоге получаем

$$\operatorname{tg} \alpha'_0 = \frac{V_0 \sin \alpha_0}{U + V_0 \cos \alpha_0}; \quad (1.44)$$

$$\operatorname{tg} \alpha'_0 = \frac{6 \sin 60^\circ}{2 + 6 \cos 60^\circ} = 1,04,$$

отсюда

$$\boxed{\alpha'_0 = 46^\circ 6'}; \quad (1.45)$$

следовательно, согласно равенству (1.42),

$$\boxed{\alpha'_{\kappa} = 46^\circ 6'}.$$

Далее из формулы (1.32) определяем

$$V'_0 = V_0 \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha'_0};$$

$$V'_0 = 6 \frac{\sin 60^\circ}{\sin 46^\circ 6'} \text{ м/с} = 7,21 \text{ м/с}$$

и, согласно формуле (1.41),

$$V'_k = 7,21 \text{ м/с.} \quad (1.46)$$

Переходим к расчету конечных характеристик. Разделив выражение (1.34) на (1.33), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_k &= \frac{V'_k \sin \alpha'_k}{U + V'_k \cos \alpha'_k}; \\ \operatorname{tg} \alpha_k &= \frac{7,21 \sin(46^\circ 6')}{2 + 7,21 \cos(46^\circ 6')} = 0,7423; \\ \alpha_k &= 36^\circ 35'. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Тогда из выражения (1.34) находим

$$V_k = V'_k \frac{\sin \alpha'_k}{\sin \alpha_k}; \quad V_k = 7,21 \frac{\sin(46^\circ 6')}{\sin(36^\circ 35')} \text{ м/с} = 8,72 \text{ м/с.} \quad (1.48)$$

Выполним проверку. Из (1.38) имеем

$$V_k = V_0 \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_k}; \quad V_k = 6 \frac{\sin 60^\circ}{\sin(36^\circ 35')} \text{ м/с} = 8,72 \text{ м/с.}$$

Модуль изменения импульса частицы, согласно выражениям (1.36) и (1.39), будет равен

$$|\Delta \vec{P}| = mV'_k \cos \alpha'_k + mV'_0 \cos \alpha'_0 = F \Delta t.$$

В соответствии с формулами (1.41) и (1.42) получаем

$$|\Delta \vec{P}| = 2mV'_0 \cos \alpha'_0.$$

Подставляя численные значения (1.45) и (1.46), находим

$$|\Delta \vec{P}| = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 7,21 \text{ м/с} \cdot \cos 46^\circ 6' = 0,01 \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

Выполним проверку. Согласно (1.35) и (1.37), имеем

$$|\Delta \vec{P}| = mV_k \cos \alpha_k + mV_0 \cos \alpha_0 = F \Delta t.$$

Подставляя численные значения, в частности (1.47) и (1.48), получаем

$$|\Delta \vec{P}| = 10^{-3} \text{ кг} \cdot (8,72 \cdot \cos 36^\circ 35' + 6 \cdot \cos 60^\circ) \text{ м/с} = 0,01 \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

Модуль средней силы равен

$$F = \frac{|\Delta \vec{P}|}{\Delta t};$$

$$F = \frac{0,01 \text{ кг} \cdot \text{ м/с}}{10^{-4} \text{ с}} = 10^2 \text{ Н}.$$

### Задача 1-3

Нерелятивистская частица с внутренней энергией  $E_0$  и массой  $m_0$ , летящая со скоростью  $\vec{V}_0$ , распадается на две нерелятивистские частицы, скорости которых  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$ , массы  $m_1$  и  $m_2$ , импульсы  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$ , кинетические энергии  $E_1$  и  $E_2$ . При этом часть внутренней энергии  $E_0$  исходной частицы в количестве  $\eta E_0$ , где коэффициент  $\eta < 1$ , расходуется на увеличение кинетической энергии образовавшихся частиц.

На рис. 12 введены следующие обозначения:  $\gamma$  — угол разлета частиц, т. е. угол, образованный векторами  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$ ;  $\theta$  — угол отклонения первой частицы (из вновь образовавшихся) от направления движения исходной частицы, т. е. угол, образованный векторами  $\vec{P}_0$  и  $\vec{P}_1$ , где  $\vec{P}_0 = m_0 \vec{V}_0$ .

**Общие исходные данные:**  $m^* = 10^{-2}$  кг,  $V^* = 10$  м/с,  $\gamma^* = \pi/2$ ,  $E^* = 10$  Дж,  $h^* = 0,5$ . Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задания представлены в табл. 3.

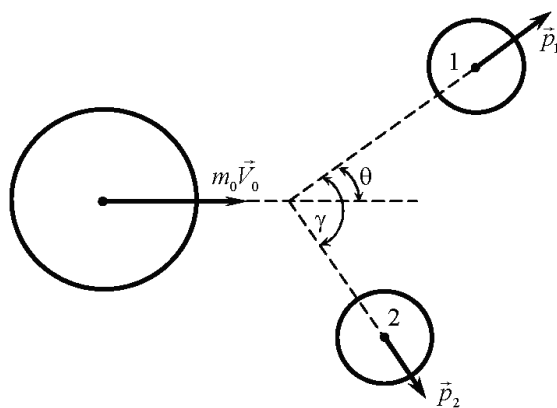


Рис. 12

**Основные зависимости к задаче 1-3.** При распаде частицы выполняются законы сохранения импульса и энергии. Соответствующие уравнения в общем случае для данной задачи имеют вид

$$m_0 \vec{V}_0 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2;$$

$$\eta E_0 + \frac{m_0 V_0^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}.$$

Таблица 3

Номер варианта	Исходные данные к задаче 1-3									
	$m_0$	$V_0$	$\gamma$	$\theta$	$m_1$	$m_2$	$P_1$	$P_2$	$E_0$	$\eta$
21	$m^*$	$V^*$	$\gamma^*$	—	$1/4m^*$	$3/4m^*$	$P_1 = P_2$	—	—	—
22	$m^*$	$V^*$	—	—	$2/3m^*$	$1/3m^*$	$P_1 = P_2$	$E^*$	$0,35\eta^*$	—
23	$2m^*$	$V^*$	—	$2/3\gamma^*$	$4/3m^*$	$2/3m^*$	$P_1 = P_2$	—	—	—
24	$m^*$	$V^*$	$4/3\gamma^*$	$1/3\gamma^*$	$2/3m^*$	$1/3m^*$	—	—	—	—
25	$2m^*$	$V^*$	$\gamma^*$	—	$4/3m^*$	$2/3m^*$	$2/3m^*V^*$	—	—	—
26	$m^*$	$2V^*$	$\gamma^*$	—	$2/3m^*$	$1/3m^*$	—	$m^*V^*$	—	—
27	$m^*$	$V^*$	—	$1/3\gamma^*$	$1/3m^*$	$2/3m^*$	$P_1 = P_2$	$E^*$	—	—
28	$2m^*$	$2V^*$	—	—	$2/3m^*$	$4/3m^*$	$P_1 = P_2$	$E^*$	$1,6\eta^*$	—

Окончание табл. 3

Номер варианта	Определить									
	$\gamma$	$\theta$	$V_1$	$V_2$	$P_1$	$P_2$	$E_1$	$E_2$	$\eta$	$\eta E_0$
21	—	+	+	+	+	+	—	—	—	+
22	+	+	+	+	—	—	+	+	—	—
23	+	—	+	+	+	+	—	—	—	+
24	—	—	+	+	+	+	+	+	—	+
25	—	+	—	+	—	+	+	+	—	+
26	—	+	+	—	+	—	+	+	—	+
27	+	—	+	+	—	—	+	+	+	—
28	+	+	+	+	+	+	—	—	—	—

## 2. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Все задачи этого раздела решаются в два этапа. В задачах 2-1, 2-2, 2-4 расчет следует начинать с определения минимальной скорости  $V_{0m}$ . После этого проводится второй этап расчета при скорости  $V_0$ , значения которой представлены в табл. 4, 5, 7. Аналогичным образом, в задаче 2-3 расчет следует начинать с определения минимальной угловой скорости  $\omega_{0m}$ . После этого проводится второй этап расчета с угловой скоростью  $\omega_0$ , значение которой представлено в табл. 6. На втором этапе расчета в зависимости от варианта задания определяют либо угловую скорость  $\omega_k$ , либо максимальный угол  $\varphi_{\max}$ , а также изменение энергии  $\Delta E$ . В задаче 2-3 в некоторых вариантах на втором этапе расчета требуется определить скорость кубика  $V_0$  после удара.

### Задача 2-1

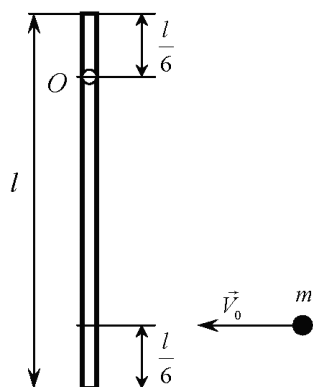


Рис. 13

Однородный жесткий стержень длиной  $l = 1$  м и массой  $M = 1$  кг свободно висит на горизонтальной идеально гладкой оси вращения  $O$ , как показано на рис. 13.

Ось вращения перпендикулярна плоскости рисунка. Маленький шарик массой  $m = 0,1$  кг, летящий горизонтально со скоростью  $V_0$ , движется в плоскости рисунка и ударяет в стержень. При этом взаимодействие шарика со стержнем может происходить в виде:

- абсолютно упругого удара (АУУ);
- неупругого удара (НУУ);
- абсолютно неупругого удара (АНУУ).

Сразу после удара стержень вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ , а шарик приобретает скорость  $V_k$  и продолжает двигаться в плоскости рисунка.

При решении задачи используются также следующие обозначения:

$V_{0m}$  — минимальная начальная скорость шарика, а  $\omega_{0m}$  — соответственно минимальная угловая скорость стержня, при которой стержень после удара совершает полный оборот;

$\omega_k$  — угловая скорость стержня при прохождении им крайней верхней точки;

$\Phi_{\max}$  — максимальный угол отклонения стержня от положения равновесия;

$\Delta E$  — потери механической энергии при ударе.

Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задания представлены в табл. 4. Расчет следует начинать с определения характерного значения  $V_{0m}$ .

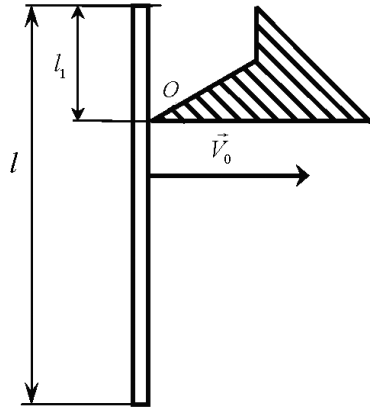
Таблица 4

Номер варианта	Задано		Вид взаимодействия			Определить			
	$V_0$	$V_k$	АУУ	НУУ	АНУУ	$\omega_k$	$\Phi_m$	$V_{0m}$	$\Delta E$
1	$0,5V_{0m}$	—	—	—	+	—	+	+	+
2	$2V_{0m}$	—	—	—	+	+	—	+	+
3	$0,5V_{0m}$	0	—	+	—	—	+	+	+
4	$2V_{0m}$	0	—	+	—	+	—	+	+
5	$0,5V_{0m}$	—	+	—	—	—	+	+	—
6	$2V_{0m}$	—	+	—	—	+	—	+	—

### Задача 2-2

Однородный жесткий вертикальный стержень длиной  $l = 1$  м и массой  $M = 1$  кг, движущийся поступательно в плоскости рисунка с постоянной горизонтальной скоростью  $V_0$ , налетает на край массивной преграды (рис. 14). После удара стержень вращается вокруг оси  $O$ , перпендикулярной плоскости рисунка. Ось вращения стержня совпадает с ребром преграды и проходит через точку контакта стержня с преградой, так что точка контакта лежит выше центра тяжести стержня. Потерями механической энергии при вращении стержня после удара пренебречь.

При решении задачи используются также следующие обозначения:



**Рис. 14**

$l_1$  — расстояние от верхнего конца стержня до точки контакта;  
 $\omega_0$  — угловая скорость стержня сразу после удара о ребро преграды;

$V_{0m}$  — минимальная горизонтальная скорость стержня, а  $\omega_{0m}$  — соответственно минимальная угловая скорость стержня, при которой он после удара способен коснуться горизонтальной поверхности преграды;

$\varphi_{\max}$  — максимальный угол поворота стержня после удара;

$\omega_k$  — угловая скорость стержня в момент его удара о горизонтальную поверхность преграды.

Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задания представлены в табл. 5.

Расчет следует начинать с определения характерной скорости  $V_{0m}$ .

*Таблица 5*

Номер варианта	Задано		Определить			
	$l_1$	$V_0$	$\omega_0$	$\omega_k$	$\varphi_{\max}$	$V_{0m}$
7	$0,1l$	$1,4V_{0m}$	+	+	—	+
8	$0,1l$	$0,5V_{0m}$	+	—	+	+
9	$0,2l$	$1,5V_{0m}$	+	+	—	+
10	$0,2l$	$0,6V_{0m}$	+	—	+	+

Окончание табл. 5

Номер варианта	Задано		Определить			
	$l_1$	$V_0$	$\omega_0$	$\omega_k$	$\varphi_{\max}$	$V_{0m}$
11	$0,4l$	$1,2V_{0m}$	+	+	—	+
12	$0,4l$	$0,8V_{0m}$	+	—	+	+
13	$0,3l$	$1,1V_{0m}$	+	+	—	+
14	$0,3l$	$0,4V_{0m}$	+	—	+	+
15	$0,25l$	$1,3V_{0m}$	+	+	—	+

### Задача 2-3

Однородный жесткий стержень длиной  $l = 0,5$  м и массой  $M = 0,5$  кг может свободно без трения вращаться вокруг горизонтальной оси  $O$ . При прохождении стержнем вертикального положения с угловой скоростью  $\omega_0$ , он своим нижним концом ударит по маленькому кубику массой  $m = 0,1$  кг, который после удара движется в плоскости рисунка (рис. 15).

При этом взаимодействие стержня с кубиком может происходить в виде:

- абсолютно упругого удара (АУУ);
- неупругого удара (НУУ);
- абсолютно неупругого удара (АНУУ).

При решении задачи используются также следующие обозначения:

$\omega'_0$  — угловая скорость стержня сразу после взаимодействия с кубиком;

$\omega_{0m}$  — минимальная угловая скорость  $\omega_0$ , при которой стержень после удара совершит полный оборот вокруг оси  $O$  при данном типе взаимодействия;

$\omega'_{0m}$  — угловая скорость стержня сразу после взаимодействия с кубиком, при условии, что начальная угловая скорость стержня была равна  $\omega_{0m}$ ;

$\omega_k$  — угловая скорость стержня в крайней верхней точке после удара;

$\varphi_m$  — максимальный угол отклонения стержня от положения равновесия после удара;

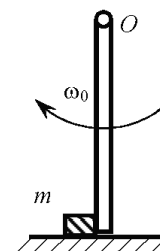


Рис. 15

$V_0$  — скорость кубика после удара;  
 $\Delta E$  — потери механической энергии при ударе стержня по кубику.

Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задания представлены в табл. 6.

Расчет следует начинать с определения минимальной угловой скорости стержня  $\omega_{0m}$ .

Таблица 6

Номер варианта	Задано		Вид взаимодействия			Определить				
	$\omega_0$	$V_0$	АУУ	НУУ	АНУУ	$\omega_{0m}$	$\omega_k$	$\varphi_m$	$V_0$	$\Delta E$
16	$0,5\omega_{0m}$	—	+	—	—	+	—	+	+	—
17	$1,2\omega_{0m}$	—	+	—	—	+	+	—	+	—
18	$0,4\omega_{0m}$	$\omega_0 l$	—	+	—	+	—	+	—	+
19	$1,5\omega_{0m}$	$\omega_0 l$	—	+	—	+	+	—	—	+
20	$0,6\omega_{0m}$	—	—	—	+	+	—	+	+	+
21	$2\omega_{0m}$	—	—	—	+	+	+	—	+	+

### Задача 2-4

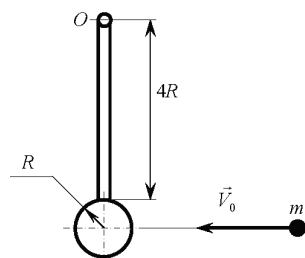


Рис. 16

Физический маятник, состоящий из однородного шара радиусом  $R = 3$  см и массой  $M = 0,4$  кг, жестко соединенного с однородным жестким стержнем длиной  $4R$  и массой  $M$ , подвешен к горизонтальной оси  $O$ , проходящей через верхний конец стержня перпендикулярно плоскости рисунка (рис. 16).

Маятник может свободно без трения вращаться вокруг оси  $O$ . Шарик массой  $m = 0,05$  кг движется горизонтально в плоскости рисунка со скоростью  $V_0$  вдоль горизонтальной прямой, проходящей через центр шара, и ударяет в шар. При этом взаимодействие шарика с маятником может происходить в виде:

- а) абсолютно упругого удара (АУУ);

- б) неупругого удара (НУУ);
- в) абсолютно неупругого удара (АНУУ).

При решении задачи используются также следующие обозначения:

$\omega_0$  — угловая скорость физического маятника сразу после удара шарика;

$V_{0m}$  — минимальная скорость шарика, при которой маятник после удара, приобретая угловую скорость  $\omega_{0m}$ , совершает полный оборот;

$\omega_k$  — угловая скорость физического маятника в верхней точке;

$\varphi_{\max}$  — максимальный угол отклонения физического маятника от положения равновесия;

$V_k$  — скорость шарика после удара;

$\Delta E$  — потери механической энергии при ударе шарика по маятнику.

Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задания представлены в табл. 7.

Расчет следует начинать с определения минимальной скорости шарика  $V_{0m}$ .

Таблица 7

Номер варианта	Задано		Виды взаимодействия			Определить			
	$V_0$	$V_k$	АУУ	НУУ	АНУУ	$\omega_k$	$\varphi_m$	$V_{0m}$	$\Delta E$
22	$0,5V_{0m}$	—	+	—	—	—	+	+	—
23	$2V_{0m}$	—	+	—	—	+	—	+	—
24	$0,4V_{0m}$	0	—	+	—	—	+	+	+
25	$1,2V_{0m}$	0	—	+	—	+	—	+	+
26	$0,8V_{0m}$	—	—	—	+	—	+	+	+
27	$1,4V_{0m}$	—	—	—	+	+	—	+	+
28	$0,6V_{0m}$	—	+	—	—	—	+	+	—

**Основные зависимости к задачам раздела 2.** Уравнение динамики вращательного движения механической системы относительно неподвижной оси  $OZ$ :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Здесь  $L_z$  — сумма моментов импульсов всех частей механической системы относительно оси  $OZ$ ;  $M_z$  — сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно оси  $OZ$ . Если  $M_z = 0$ , то из этого уравнения следует закон сохранения момента импульса относительно оси  $OZ$ :

$$L_z = \text{const}.$$

Момент силы относительно оси  $z$  определяется по формуле

$$M_z = F_\tau R,$$

где  $F_\tau$  — проекция вектора внешней силы  $\vec{F}$  на направление касательной к окружности с центром на оси  $z$ , лежащей в плоскости перпендикулярной оси  $OZ$ , и проходящей через точку приложения вектора  $\vec{F}$ ;  $R$  — радиус этой окружности (плечо проекции силы  $F_\tau$ ).

Момент импульса твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси  $OZ$  с угловой скоростью  $\omega$ ,

$$L_z = I_z \omega,$$

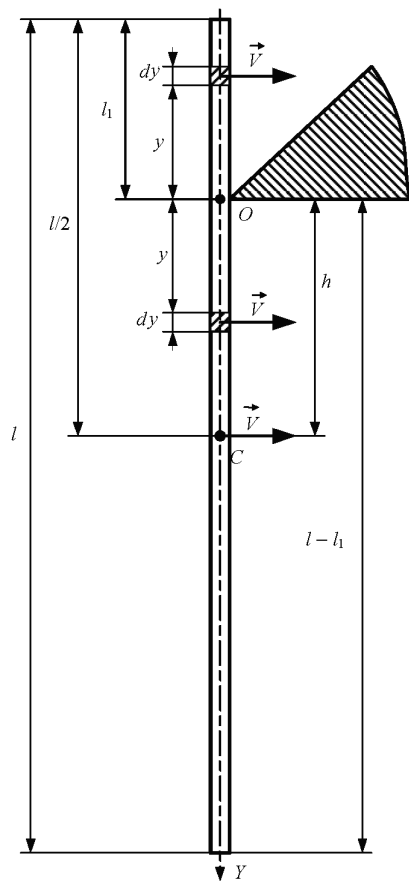
где  $I_z$  — момент инерции твердого тела относительно оси  $OZ$ .

Момент импульса твердого тела массой  $m$ , движущегося поступательно со скоростью  $V$ , перпендикулярно неподвижной оси  $OZ$ , относительно этой оси равен

$$L_z = mVh, \tag{2.1}$$

где  $h$  — плечо импульса твердого тела, равное длине отрезка, проведенного от оси вращения перпендикулярно прямой, совпадающей с направлением вектора скорости центра масс тела  $\vec{V}_c$ .

Докажем справедливость данной формулы на примере поступательного движения однородного прямолинейного стержня массой  $m$  и длиной  $l$  (см. задачу 2-2), который движется со скоростью  $V$ . Момент импульса этого стержня относительно оси  $OZ$  (ось  $OZ$



**Рис. 17**

проходит через точку  $O$  перпендикулярно плоскости, изображенной на рис. 17, и направлена на нас) будет складываться в результате интегрирования моментов импульсов  $dL_z$  от элементарных частей стержня массой  $dm$

$$dL_z = dmVy, \quad (2.2)$$

где  $y$  — координата элементарной части стержня длиной  $dy$ . Тогда

$$dm = \rho S dy,$$

где  $\rho$  — плотность материала стержня;  $S$  — площадь его поперечного сечения.

Начало координат оси  $OY$  расположено в точка  $O$ , где находится выступ (ребро) преграды. Момент импульса стержня относительно оси  $OZ$  будет, согласно (2.2), вычисляться по формуле

$$L_z = \int_0^{l-l_1} \rho V S y dy - \int_0^{l_1} \rho V S y dy. \quad (2.3)$$

На рис. 17 введены следующие обозначения:

$l_1$  — длина стержня над выступом;

$h$  — расстояние от выступа (точка  $O$ ) до центра масс стержня (точка  $C$ );

$l/2$  — расстояние от края стержня до центра масс.

Перед вторым интегралом в формуле (2.3) стоит знак минус, потому что проекции моментов импульсов нижней и верхней частей стержня относительно оси  $OZ$  имеет разные знаки. После интегрирования получаем:

$$L_z = \rho V S \frac{(l-l_1)^2}{2} - \rho V S \frac{l_1^2}{2}.$$

После преобразований имеем:

$$L_z = \rho V S l \left( \frac{l}{2} - l_1 \right).$$

Поскольку  $\rho S l = m$ , а  $\frac{l}{2} - l_1 = h$ , в итоге имеем выражение

$$L_z = m V h, \quad (2.4)$$

которое совпадает с формулой (2.1).

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси  $OZ$ :

$$E_K = \frac{I_z \omega^2}{2}.$$

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел массой  $m$  простой формы:

сплошного кругового цилиндра с радиусом  $R$  относительно его оси

$$I = 0,5mR^2;$$

сплошного шара с радиусом  $R$  относительно оси, проходящей через центр шара

$$I = 0,4mR^2;$$

тонкого стержня длиной  $l$  относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс

$$I = \frac{1}{12}ml^2.$$

Теорема Штейнера:

$$I_{oz} = I_{cz} + ma^2,$$

где  $I_{cz}$  — момент инерции твердого тела, относительно оси, проходящей через центр масс;  $I_{oz}$  — момент инерции относительно оси  $OZ$ , параллельной  $CZ$ ;  $a$  — расстояние между осями  $CZ$  и  $OZ$ .

### **Пример решения задачи 2-1**

Однородный жесткий стержень длиной  $l$  и массой  $M$  свободно висит на горизонтальной гладкой оси вращения  $OZ$ , как показано на рис. 13. Ось вращения перпендикулярна плоскости рисунка. Малый шарик массой  $m$ , летящий горизонтально со скоростью  $V_0$ , движется в плоскости рисунка, ударяет в стержень и застревает в нем. Найти изменение импульса механической системы (МС) стержень — шарик и потерю механической энергии МС за время удара.

*Решение.* При ударе шарика о стержень со стороны опоры оси на ось вращения действует дополнительная сила (реакция опоры), удерживающая эту ось на месте. Поэтому МС оказывается незамкнутой, так как реакция опоры является внешней силой по отношению к рассматриваемой МС.

Воспользуемся законом сохранения момента импульса данной МС относительно оси вращения  $OZ$  для расчета угловой скорости вращения стержня сразу после удара  $\omega_0$ . Это возможно, так как, во-первых, интервал времени взаимодействия (удара) шарика со

стержнем настолько незначителен, что углом поворота стержня вокруг оси вращения за этот интервал времени можно пренебречь, а во-вторых, момент внешней силы (реакции опоры) относительно оси вращения равен нулю в силу равенства нулю плеча этой силы относительно оси  $OZ$ .

Момент импульса МС до удара равен моменту импульса шарика относительно оси  $OZ$ :

$$L_0 = mV_0 \frac{2l}{3}. \quad (2.5)$$

Момент импульса МС после удара складывается из моментов импульсов шарика и стержня относительно оси  $O$ :

$$L_k = m\omega_0 \frac{4l^2}{9} + I_z \omega_0, \quad (2.6)$$

где  $I_z$  — момент инерции стержня относительно оси  $z$ , который вычисляется в соответствии с теоремой Штейнера.

Приравнявая (2.5) и (2.6), после преобразований находим начальную угловую скорость вращения стержня:

$$\omega_0 = \frac{V_0}{l} \frac{24m}{(16m + 7M)}.$$

Импульс МС до удара направлен горизонтально и равен начальному импульсу шарика:

$$P_0 = mV_0. \quad (2.7)$$

Импульс МС после удара направлен горизонтально и равен

$$P_k = m\omega_0 \frac{2l}{3} + MV_C, \quad (2.8)$$

где  $m\omega_0(2l/3)$  — импульс шарика после удара, а скорость центра масс стержня равна  $V_C = \omega_0 l/3$ .

Вычитая выражение (2.7) из (2.8), получаем изменение импульса  $\Delta P = P_k - P_0$  системы стержень — шарик за время удара:

$$\Delta P = m\omega_0 \frac{2l}{3} + M\omega_0 \frac{l}{3} - mV_0 = \frac{mV_0}{7 + 16m/M}.$$

Из последней формулы следует, что импульс МС за время удара увеличился.

Вычислим теперь потерю механической энергии при ударе шарика о стержень. Энергия МС до удара равна начальной кинетической энергии шарика:

$$E_0 = \frac{mV_0^2}{2}. \quad (2.9)$$

Энергия МС сразу после удара складывается из кинетических энергий шарика и стержня:

$$E_K = \frac{m(\omega_0 2l/3)^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2}. \quad (2.10)$$

Вычитая выражения (2.9) из (2.10), после соответствующих преобразований находим потерю механической энергии  $\Delta E = E_K - E_0$  при ударе шарика о стержень:

$$\Delta E = -\frac{mV_0^2}{2} \frac{7M}{(16m + 7M)}. \quad (2.11)$$

В формуле (2.11)  $\Delta E < 0$ , это говорит о том, что при ударе механическая энергия МС уменьшилась, т. е. некоторое количество механической энергии МС при внедрении шарика в стержень перешло в теплоту.

### 3. КОЛЕБАНИЯ

В данных методических указаниях рассматриваются свободные затухающие механические колебания различных механических систем (МС), которые наиболее близки к реальным колебательным системам (КС). Например, МС, состоящая из двух, трех и более шариков массой  $m$  каждый, соединенных упругими пружинами с жесткостью  $k$  каждая, с достаточно хорошим приближением моделирует колебания молекулы, состоящей из двух, трех и более атомов, соединенных упругими связями.

В качестве примера рассмотрим МС, состоящую из двух шариков  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных упругой пружиной длиной  $l_0$  и жесткостью  $k$  (рис. 18). Такая МС неплохо моделирует некоторую молекулу, состоящую из двух разных атомов, соединенных упругой связью.

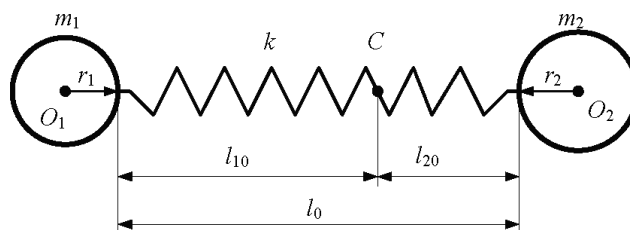


Рис. 18

Чтобы исключить влияние силы тяжести на данную МС, будем рассматривать движение этой системы на горизонтальной плоскости. Трением шариков об эту плоскость будем пренебрегать. Поскольку данная МС является замкнутой, колебания этих шариков вдоль линии  $O_1 O_2$ , проходящей через центры шариков, можно рассматривать как колебания каждого шарика относительно неподвижного центра масс МС (точка  $C$ ). В этом случае круговые (циклические) частоты колебаний 1-го и 2-го шариков будут равны  $\omega_1 = \omega_2$  и соответственно будут определять частоту колебаний МС  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Данный тезис подтверждается соответствующими расчетами. Из формулы, определяющей координату центра масс МС, получаем равенство

$$m_1(r_1 + l_{10}) = m_2(r_2 + l_{20}), \quad (3.1)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы 1-го и 2-го шариков. В дальнейшем будем полагать, что  $l_{10} \gg r_1$  и  $l_{20} \gg r_2$  и тогда вместо уравнения (3.1) получаем

$$m_1 l_{10} = m_2 l_{20}. \quad (3.2)$$

Поскольку  $l_0 = l_{10} + l_{20}$ , то в соответствии с выражением (3.2) находим величины:

$$l_{10} = l_0 \frac{m_2}{m_1 + m_2}; \quad (3.3)$$

$$l_{20} = l_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.4)$$

Известно, что жесткость пружины обратно пропорциональна ее длине. Поэтому можно записать, что

$$k l_0 = k_1 l_{10} = k_2 l_{20} = b = \text{const}, \quad (3.5)$$

где значение постоянной  $b$  зависит от упругих свойств материала пружины и ее геометрии;  $k_1$  и  $k_2$  — жесткости левой и правой частей пружины, определяемых соответственно длинами  $l_{10}$  и  $l_{20}$ . Циклические частоты колебаний 1-го и 2-го шариков, согласно условию (3.5), будут равны соответственно

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{k \frac{l_0}{l_{10} m_1}}; \quad (3.6)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{k \frac{l_0}{l_{10} m_2}}. \quad (3.7)$$

Поскольку формула (3.2) остается справедливой в любой момент времени, из выражений (3.6) и (3.7) следует, что

$$\omega_1 = \omega_2. \quad (3.8)$$

Подставив выражение (3.3) в (3.6), а (3.4) в (3.7), с учетом равенства (3.8) получаем формулу, определяющую круговую частоту колебаний рассматриваемой МС:

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}. \quad (3.9)$$

Величина

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.10)$$

в формуле (3.9) называется приведенной массой КС. Следовательно, круговая частота данной КС

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}. \quad (3.11)$$

В этом случае задачу о колебаниях двух шариков можно свести к задаче колебания классического пружинного осциллятора с приведенной массой  $\mu$ . В частности, при  $m_1 = m_2 = m$ , согласно выражениям (3.10) и (3.11) получаем, что

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (3.12)$$

Из формулы (3.12) видно, что частота колебаний одинаковых шариков, соединенных пружиной, в  $\sqrt{2}$  раз больше частоты колебаний одного шарика на такой же пружине.

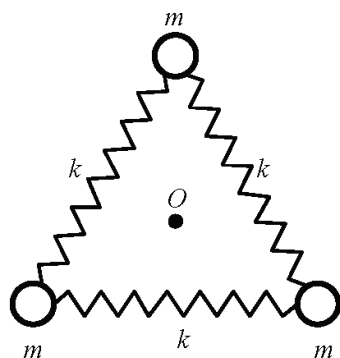


Рис. 19

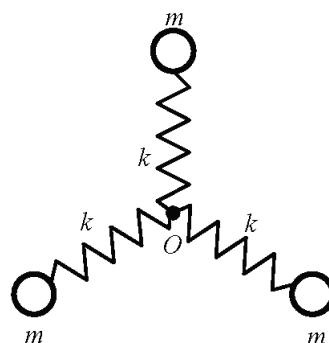


Рис. 20

На рис. 19, 20 представлены конструктивные схемы МС, состоящих из трех одинаковых шариков массой  $m$  каждый, соединенных тремя пружинами жесткостью  $k$  каждая. На рис. 19 шарики расположены в вершинах равностороннего треугольника, а на рис. 20 шарики вместе с пружинами образуют правильную трехлучевую звезду с центром в точке  $O$ .

Данные МС можно рассматривать как модели трехатомных молекул, соединенных между собой упругими связями. Так же, как в предыдущей задаче, будем рассматривать движение этой МС на горизонтальной плоскости, а трением шариков об эту плоскость будем пренебрегать.

Требуется определить собственную частоту колебаний каждой МС при условии, что шарики будут совершать малые синхронные колебания с соблюдением условий центральной симметрии.

Движение шариков МС, показанной на рис. 20, будет происходить вдоль лучей звезды, так что три шарика в любой момент времени будут находиться на одинаковом расстоянии от центра масс МС (точка  $O$ ) и будут образовывать подобные геометрические фигуры.

Шарики МС, изображенной на рис. 19, также будут двигаться вдоль лучей, исходящих из центра (точка  $O$ ). При этом исходная форма равностороннего треугольника этой МС будет сохраняться в любой момент времени, а изменяться будут только размеры треугольника (подобие треугольников сохраняется).

В обеих задачах при движении шариков из положения равновесия к центру пружины сжимаются, а при движении от центра пружины растягиваются. Но центры масс МС (точка  $O$ ) на рис. 19, 20 остаются при любых движениях шариков неподвижными. Поэтому частоты колебаний МС будут равны частотам колебаний каждого отдельного шарика.

Итак, собственная круговая частота свободных незатухающих колебаний МС, показанной на рис. 20, будет равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.13)$$

Несколько сложнее дело обстоит с МС, приведенной на рис. 19. Определим частоту этой МС, используя закон сохранения механической энергии. На рис. 21 представлена схема треугольной МС при ее расширяющемся движении.

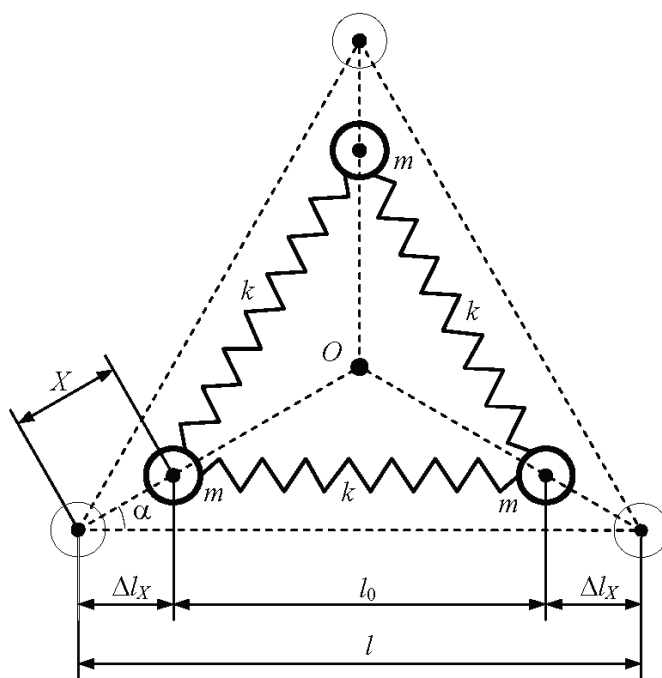


Рис. 21

Обозначим через  $\Delta l = l - l_0$  изменение длины каждой пружины, которое, согласно рис. 21, будет равно

$$\Delta l = 2\Delta l_x = 2x \cos \alpha, \quad (3.14)$$

где  $x$  — смещение шарика относительно его положения равновесия вдоль линии движения. Поскольку каждый угол в равностороннем треугольнике равен  $60^\circ$ , угол  $\alpha$  на рис. 21 будет равен  $\alpha = 30^\circ$ . А так как  $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ , вместо выражения (3.14) следует написать

$$\Delta l = \sqrt{3}x. \quad (3.15)$$

Полная механическая энергия всей МС в произвольный момент времени

$$E = 3 \frac{k\Delta l^2}{2} + 3 \frac{mV_x^2}{2} = \text{const}. \quad (3.16)$$

После подстановки (3.15) в (3.16) получим:

$$E = 9 \frac{kx^2}{2} + 3 \frac{mV_x^2}{2} = \text{const}. \quad (3.17)$$

Поскольку энергия  $E$ , согласно (3.17), не зависит от времени, производная от энергии по времени будет равна нулю:

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad (3.18)$$

Подставляя (3.17) в (3.18) приходим к уравнению следующего вида:

$$V_x \left( 3kx + m \frac{dV_x}{dt} \right) = 0.$$

Так как в общем случае  $V_x \neq 0$ , выражение, стоящее в скобках, должно быть равно нулю. А поскольку  $V_x = \dot{x}$ , в итоге получаем дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.19)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}. \quad (3.20)$$

Итак, формула (3.20) определяет круговую частоту МС, изображенной на рис. 19, а также частоту колебаний каждого шарика

этой МС. Интересно, что частота, определяемая по формуле (3.20), в  $\sqrt{3}$  больше частоты, которая определяется формулой (3.13).

Аналогичным образом вычисляют собственные частоты незатухающих колебаний МС, изображенных на рис. 22–25. С этой целью необходимо, используя закон сохранения механической энергии, вывести дифференциальное уравнение для этих МС, аналогичное уравнению (3.19).

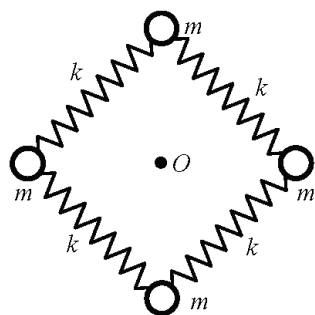


Рис. 22

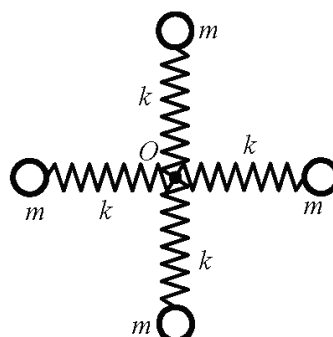


Рис. 23

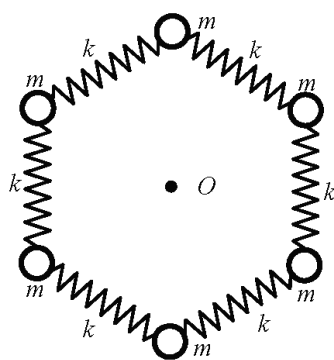


Рис. 24

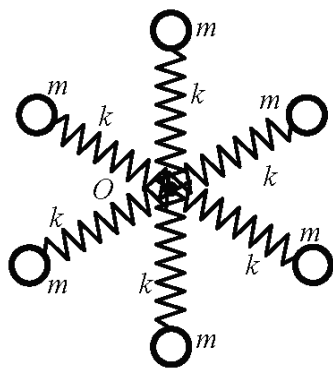


Рис. 25

**Общие условия задач раздела 3.** Для конкретной колебательной системы (КС), представленной на соответствующем рисунке, необходимо:

1) вывести дифференциальное уравнение малых свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движению тела КС пропорциональна скорости, т. е.  $\vec{F} = -r\vec{V}$ , где  $r$  — коэффициент сопротивления;

2) определить круговую частоту  $\omega_0$  и период  $T_0$  свободных незатухающих колебаний;

3) найти круговую частоту  $\omega$  и период  $T$  свободных затухающих колебаний;

4) вычислить логарифмический декремент затухания;

5) определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальную амплитуду  $A_0$  и фазу  $\varphi_0$  колебаний;

6) записать уравнение колебаний с учетом найденных значений.

**Общие исходные данные:**  $m^* = 0,1$  кг;  $k^* = 10$  Н/м;  $l^* = 0,1$  м;  $r^* = 0,2$  кг/с;  $u^* = 0,1$  м/с;  $\rho^* = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $S^* = 10^{-3}$  м<sup>2</sup>;  $\varphi^* = \pi/6$ .

Другие исходные данные и начальные условия задачи для каждого варианта задания приведены в табл. 8 — 15.

**Основные зависимости к задаче раздела 3.** Исходными уравнениями для вывода дифференциального уравнения колебаний могут быть, например, уравнение поступательного движения твердого тела, записанное в проекции на ось  $OX$ , или уравнение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси вращения  $OZ$ . В первом случае уравнение имеет вид

$$ma_x = \sum_i F_{ix},$$

где  $a_x = \ddot{x}$  — проекция вектора ускорения тела на ось  $OX$ ;  $F_{ix}$  — проекция вектора  $i$ -й силы, действующей на тело, на ось  $OX$ .

Во втором случае уравнение выглядит так:

$$I_z \varepsilon_z = \sum_i M_{iz},$$

где  $I_z$  — момент инерции тела относительно оси  $OZ$ ;  $\varepsilon_z = \ddot{\alpha}$  — проекция углового ускорения на ось  $OZ$ ;  $\alpha$  — угол поворота тела;  $M_{iz}$  — проекция вектора момента  $i$ -й силы на ось  $OZ$ .

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний запишется так:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $\beta = \frac{r}{2m}$  — коэффициент затухания.

Решение этого уравнения при условии, что  $\omega_0 > \beta$ , имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — круговая частота свободных затухающих колебаний.

Логарифмический декремент затухания вычисляется по формуле

$$\delta = \beta T,$$

где  $T = 2\pi/\omega$ .

### Задача 3-1

Для МС, расположенных на горизонтальной плоскости и представленных на рис. 22–25, определить круговую частоту и период собственных незатухающих колебаний. Значения масс шариков, жесткость соединяющих их пружин, а также другие исходные данные приведены в табл. 8. Трением шариков при их движении о контактную горизонтальную плоскость пренебречь.

Дополнительно (в соответствии с общими условиями задачи 3) рассчитать значения всех требуемых величин и вывести уравнение затухающих колебаний горизонтального пружинного маятника (см. рис. 26), у которого масса шарика  $m$ , а длина и жесткость пружины равны соответственно  $l_0$  и  $k$  (см. табл. 8). В начальный момент времени шарик смещают так, что длина пружины становится равной  $l$ , а за тем кратковременным воздействием сообщают шарiku скорость  $\vec{v}_1$  или  $\vec{v}_2$ . В результате система приходит в колебательное движение в горизонтальном направлении. Трением шарика о боковую поверхность пренебречь.

Таблица 8

Номер варианта	Рисунок	$m$	$k$	$l_0$	$l$	$r$	$V_1$	$V_2$
1	22; 23	$0,3m^*$	$1,5k^*$	$1,3l^*$	$1,5l^*$	$1,1r^*$	$0,5u^*$	0
2	24; 25	$0,9m^*$	$1,1k^*$	$1,5l^*$	$1,2l^*$	$1,5r^*$	0	$0,4u^*$
3	22; 23	$0,5m^*$	$1,7k^*$	$1,7l^*$	$1,5l^*$	$1,7r^*$	$0,7u^*$	0
4	24; 25	$0,7m^*$	$1,3k^*$	$1,1l^*$	$1,4l^*$	$1,9r^*$	0	$0,6u^*$

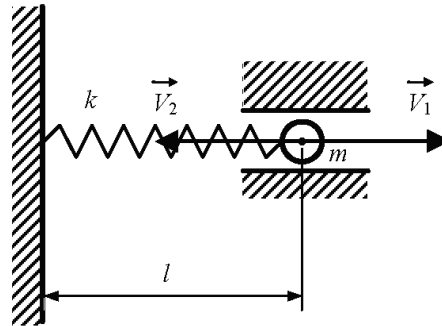


Рис. 26

## Задача 3-2

Механическая система, рассматриваемая в этой задаче, расположена на горизонтальной плоскости (см. рис. 18). Значения массы шариков, длина и жесткость соединяющих их пружин, а также другие исходные данные приведены в табл. 9.

Определить:

- 1) положение центра масс МС;
- 2) жесткость левой и правой частей пружины, длины которых равны  $l_{10}$  и  $l_{20}$ ;
- 3) приведенную массу МС;
- 4) круговую частоту и период собственных незатухающих колебаний.

Трением шариков о контактную горизонтальную плоскость пренебречь.

Таблица 9

Номер варианта	$m_1$	$m_2$	$k$	$l_0$	$l$	$r$	$V_1$	$V_2$
5	$0,4m^*$	$0,6m^*$	$1,2k^*$	$l^*$	$1,2l^*$	$2r^*$	$0,4u^*$	0
6	$0,2m^*$	$0,7m^*$	$1,5k^*$	$1,2l^*$	$l^*$	$1,4r^*$	0	$0,5u^*$
7	$0,8m^*$	$0,4m^*$	$1,6k^*$	$1,4l^*$	$1,6l^*$	$1,8r^*$	$0,6u^*$	0
8	$0,6m^*$	$0,5m^*$	$1,4k^*$	$1,6l^*$	$1,2l^*$	$1,6r^*$	0	$0,7u^*$

Дополнительно (в соответствии с общими условиями задач раздела 3) рассчитать значения всех требуемых величин и вывести уравнение затухающих колебаний вертикального пружинного маятника (см. рис. 27), у которого масса шарика равна  $m = m_1$ , а длина и жесткость пружины равны соответственно  $l_0$  и  $k$  (см. табл.9). В начальный момент времени шарик смещают так, что длина пружины становится равной  $l$ , а затем кратковременным воздействием сообщают ему скорость  $\vec{V}_1$  или  $\vec{V}_2$ . В результате система приходит

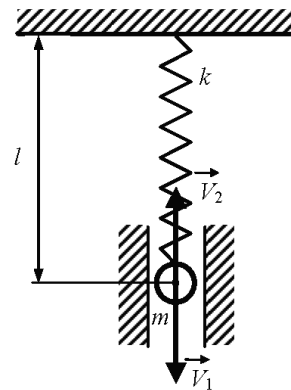


Рис. 27

в колебательное движение в вертикальном направлении. Трением шарика о боковую поверхность пренебречь.

### Задача 3-3

Колебательные системы, представленные на рис. 28 – 31, состоят из шайбы массой  $m$  и двух упругих пружин, имеющих жесткости  $k_1$  и  $k_2$ . Движение КС происходит в окружающей среде с малыми вязкими свойствами (малым коэффициентом сопротивления  $r$ ). На рис. 28, 30 шайба колеблется под воздействием пружин, соединенных параллельно, а на рис. 29, 31 колебания происходят под воздействием пружин, соединенных последовательно. Массой пружин можно пренебречь. На рис. 28, 29 КС имеет горизонтальное расположение в поле силы тяжести, а на рис. 30, 31 – вертикальное расположение. Длины 1-й и 2-й пружин в недеформиро-

ванных состояниях равны  $l_{10}$  и  $l_{20}$ . Возможные векторы начальной скорости шайбы равны  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ . Шайбу, находящуюся в положении равновесия, смещают на расстояние  $L$ , а затем импульсом придают ей в начальный момент времени  $t = 0$  скорость  $\vec{V}_1$  или  $\vec{V}_2$  в соответствии с заданием (см. табл. 10–13). В результате КС приходит в колебательное движение. На рис. 28, 30 длина каждой пружины в деформированном состоянии при  $t = 0$  равна  $L$ . На рис. 29, 31 общая длина двух пружин в деформированном состоянии при  $t = 0$  равна  $L$ .

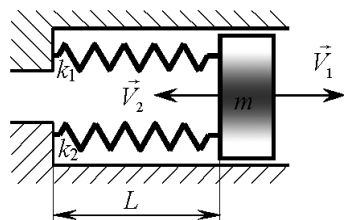


Рис. 28

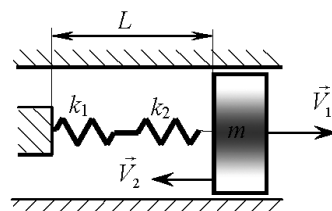


Рис. 29

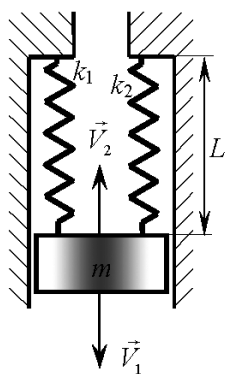


Рис. 30

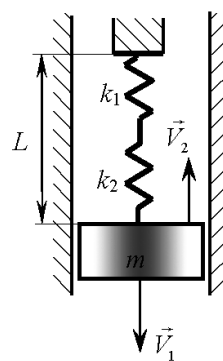


Рис. 31

Таблица 10 (к рис. 28)

Номер варианта	$r$	$k_1$	$k_2$	$m$	$l_{10}$	$l_{20}$	$L$	$V_1$	$V_2$
9	$r^*$	$1,6k^*$	$1,4k^*$	$1,4m^*$	$l^*$	$l^*$	$0,9l^*$	$0,4U^*$	0
10	$2r^*$	$1,2k^*$	$k^*$	$1,5m^*$	$1,1l^*$	$1,1l^*$	$1,2l^*$	$0,5U^*$	0
11	$4r^*$	$1,6k^*$	$1,4k^*$	$m^*$	$1,2l^*$	$1,2l^*$	$1,1l^*$	0	$0,3U^*$

Таблица 11 (к рис. 29)

Номер варианта	$r$	$k_1$	$k_2$	$m$	$l_{10}$	$l_{20}$	$L$	$V_1$	$V_2$
12	$3r^*$	$0,8k^*$	$k^*$	$m^*$	$l^*$	$l^*$	$2,1l^*$	$0,4U^*$	0
13	$2r^*$	$1,6k^*$	$1,4k^*$	$0,8m^*$	$l^*$	$l^*$	$1,9l^*$	0	$0,2U^*$
14	$3r^*$	$k^*$	$1,2k^*$	$1,4m^*$	$1,1l^*$	$1,1l^*$	$2,3l^*$	0	$0,3U^*$

Таблица 12 (к рис. 30)

Номер варианта	$r$	$k_1$	$k_2$	$m$	$l_{10}$	$l_{20}$	$L$	$V_1$	$V_2$
15	$2r^*$	$1,6k^*$	$1,4k^*$	$m^*$	$1,6l^*$	$1,6l^*$	$1,5l^*$	$U^*$	0
16	$2r^*$	$1,2k^*$	$1,4k^*$	$1,4m^*$	$1,5l^*$	$1,5l^*$	$1,4l^*$	0	$U^*$
17	$3r^*$	$2k^*$	$1,8k^*$	$0,8m^*$	$l^*$	$l^*$	$1,6l^*$	$0,8U^*$	0

Таблица 13 (к рис. 31)

Номер варианта	$r$	$k_1$	$k_2$	$m$	$l_{10}$	$l_{20}$	$L$	$V_1$	$V_2$
18	$r^*$	$1,6k^*$	$1,4k^*$	$0,8m^*$	$3l^*$	$3l^*$	$5,8l^*$	$U^*$	0
19	$3r^*$	$1,2k^*$	$k^*$	$0,4m^*$	$2l^*$	$2l^*$	$4,8l^*$	$0,8U^*$	0
20	$r^*$	$1,8k^*$	$1,6k^*$	$m^*$	$4l^*$	$4l^*$	$7,8l^*$	0	$U^*$

### Задача 3-4

Колебательная система, представленная на рис. 32, состоит из невесомой пробирки площадью поперечного сечения  $S$ , на дно которой насыпана свинцовая дробь массой  $m$ . Пробирка с дробью

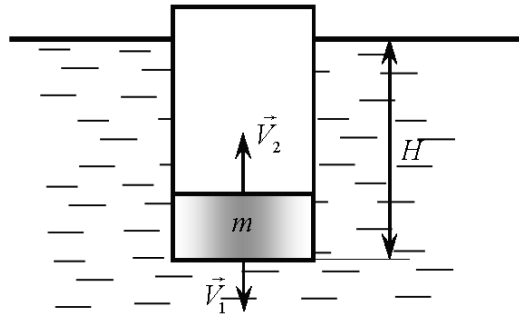


Рис. 32

опущена в жидкость плотностью  $\rho$  и находится в ней в вертикальном положении.

Пробирку, находящуюся в положении равновесия на глубине  $H_0$ , смещают на глубину  $H$ , а затем импульсом придают ей в начальный момент времени  $t = 0$  скорость  $\vec{V}_1$  или  $\vec{V}_2$  в соответствии с заданием (табл. 14).

В результате КС приходит в колебательное движение в вертикальном направлении. Коэффициент сопротивления при движении пробирки в жидкости равен  $r$ .

Таблица 14

Номер варианта	$\rho$	$S$	$m$	$r$	$H$	$V_1$	$V_2$
21	$\rho^*$	$S^*$	$m^*$	$5r^*$	$1,1l^*$	$0,2U^*$	0
22	$\rho^*$	$1,2S^*$	$2m^*$	$5r^*$	$1,9l^*$	0	$0,3U^*$
23	$0,9\rho^*$	$1,1S^*$	$1,5m^*$	$6r^*$	$1,6l^*$	$0,4U^*$	0
24	$0,9\rho^*$	$S^*$	$m^*$	$6r^*$	$1,2l^*$	0	$0,2U^*$

### Задача 3-5

На рис. 33 представлен физический маятник (ФМ), состоящий из двух шаров радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и массами соответственно  $m_1$  и  $m_2$ . Шары жестко скреплены с помощью стержня длиной  $L$  и массой  $m_3$ . Через точку  $O$  стержня проходит горизонтальная ось вращения ФМ, расположенная на расстоянии  $l_0$  от верхнего кон-

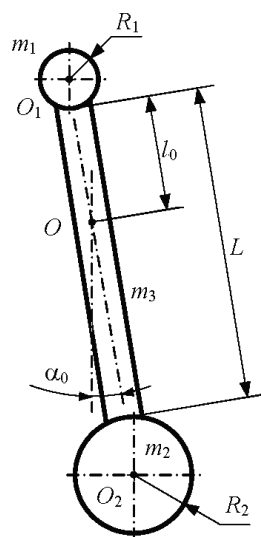


Рис. 33

ца стержня так, что ФМ может совершать вращательное движение в вертикальной плоскости. Физический маятник, находящийся в положении равновесия, отклоняют на угол  $\alpha_0$  (табл. 15), а затем в начальный момент времени  $t = 0$  отпускают. В результате ФМ начинает совершать свободные незатухающие колебания, т. е. в этой задаче коэффициент сопротивления считается равным нулю ( $r = 0$ ).

Таблица 15

Номер варианта	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$R_1$	$R_2$	$L$	$l_0$	$\alpha_0$
25	$8,8m^*$	$21m^*$	$32m^*$	$0,3l^*$	$0,4l^*$	$10l^*$	$3l^*$	$1/2\varphi^*$
26	$21m^*$	$41m^*$	$35m^*$	$0,4l^*$	$0,5l^*$	$12l^*$	$4l^*$	$1/3\varphi^*$
27	$8,8m^*$	$21m^*$	$28m^*$	$0,3l^*$	$0,4l^*$	$8l^*$	$2l^*$	$1/2\varphi^*$
28	$21m^*$	$41m^*$	$30m^*$	$0,4l^*$	$0,5l^*$	$9l^*$	$3l^*$	$1/3\varphi^*$

## 4. ВОЛНЫ

### Задача 4-1

В среде на расстоянии  $d$  друг от друга находятся одинаковые излучатели плоских продольных, акустических, монохроматических волн ( $S_1$  и  $S_2$ , рис. 34). Оба излучателя колеблются по закону  $\xi = A \cos(\omega t)$ , где  $\xi$  — смещение излучателя из положения равновесия при колебаниях;  $A$  — амплитуда;  $\omega$  — круговая частота при колебаниях излучателя.

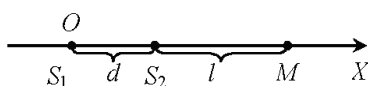


Рис. 34

Исходные данные для каждого варианта задания представлены в табл. 16.

Таблица 16

Номер варианта	Частота $\nu$ , кГц	Амплитуда $A$ , мм	$d$ , м	$l$ , м	Среда	Скорость волны в среде $c$ , м/с
1	1	0,8	1,36	30	Воздух	340
2	2	0,6	0,68	20	Воздух	340
3	1	0,5	0,34	10	Воздух	340
4	10	0,3	0,9	30	Вода	1500
5	20	0,2	0,6	20	Вода	1500
6	10	0,1	0,3	10	Вода	1500

Необходимо:

1) вывести уравнение продольных колебаний частиц среды в точке  $M$ , находящейся на расстоянии  $l$  от второго излучателя. Считать, что направления колебаний частиц среды в точке  $M$  совпадают с осью  $x$ ;

2) определить отношение амплитуды смещений частиц среды к длине волны  $\lambda$ ;

3) вывести уравнение колебаний скорости частиц среды в точке  $M$ . Найти амплитуду скорости частиц среды и ее отношение к скорости распространения волны;

4) вывести уравнение колебаний деформаций частиц среды в точке  $M$ . Найти связь амплитуды деформаций с амплитудой скорости частиц среды.

**Основные зависимости к задачам раздела 4.** Уравнение плоской монохроматической косинусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , в общем случае имеет вид

$$\xi = A \cos (\omega t - kx + \varphi),$$

где  $\xi$  — смещение частиц среды;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число;  $\lambda$  — длина волны, определяемая по формулам  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  или  $\lambda = cT$  (здесь  $c$  — скорость волны в среде); круговая частота  $\omega$ , период  $T$  и частота колебаний  $\nu$  связаны соотношениями  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $T = 1/\nu$ ;  $\varphi$  — начальная фаза волны.

*Принцип суперпозиции (наложения) волн* формулируется следующим образом.

Результирующая волна, образующаяся при наложении двух волн  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , определяется по формуле

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_1 \cos (\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) + A_2 \cos (\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2),$$

где индексы 1, 2 относятся соответственно к параметрам первой и второй волн.

В частном случае рассмотрим, как это происходит в задаче 4-1.

Если начало координат (точка  $O$ ) совпадает с расположением источника колебаний  $S_1$ , то от этого источника вдоль оси  $OX$  будет распространяться первая волна вида

$$\xi_1 = A \cos (\omega t - kx). \quad (4.1)$$

От источника колебаний  $S_2$  вдоль оси  $OX$  будет распространяться вторая волна

$$\xi_2 = A \cos [\omega t - k(x - d)]. \quad (4.2)$$

В итоге результирующие колебания частиц среды в произвольной точке  $x$  оси  $OX$  будут происходить в соответствии с принци-

пом суперпозиции волн:

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t). \quad (4.3)$$

После подстановки выражений (4.1) и (4.2) в (4.3) и последующих преобразований получаем

$$\xi(x, t) = 2A \cos\left(\frac{kd}{2}\right) \cos\left(\omega t - kx + \frac{kd}{2}\right). \quad (4.4)$$

Скорость частиц среды определяется как частная производная от смещения частиц (4.4) по времени:

$$V_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (4.5)$$

а деформация (относительное изменение длины частиц среды) — как частная производная по координате:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Далее вместо произвольной координаты  $x$  в уравнения (4.4)—(4.6) подставим координату точки  $M$  ( $x = d + l$ ), тем самым определив искомые значения  $\xi$ ,  $V_x$ ,  $\varepsilon_x$  в точке  $M$ .

#### Задача 4-2

Для стержня длиной  $l$ , закрепленного, как показано на рис. 35—40, необходимо:

1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нем образуется стоячая волна;

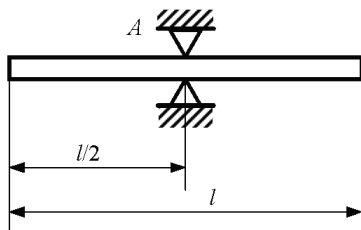


Рис. 35

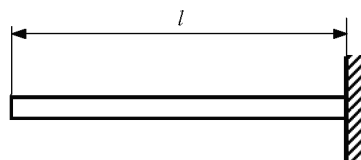


Рис. 36

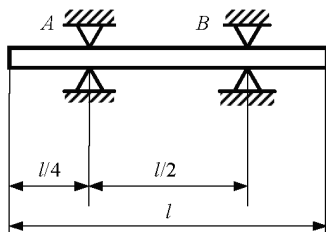


Рис. 37

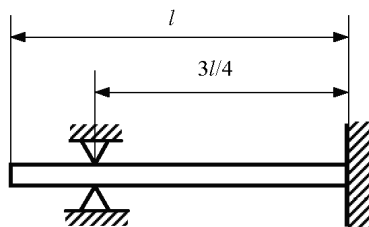


Рис. 38

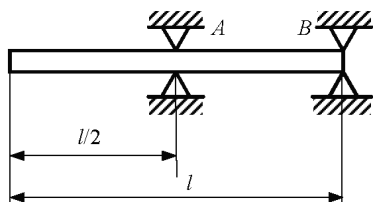


Рис. 39

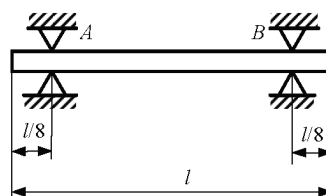


Рис. 40

2) указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам);

3) определить частоту и длину волны  $i$ -й гармоники;

4) для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественную картину:

а) стоячей волны амплитуд смещений;

б) стоячей волны амплитуд деформаций.

Исходные данные для каждого варианта задачи представлены в табл. 17.

Таблица 17

Номер варианта	Вид крепления	Материал	Плотность $\rho$ , $10^3$ кг/м <sup>3</sup>	Модуль Юнга $E$ , $10^{10}$ Па	Длина $l$ , м	Определить $i$ -ю гармонику
7	Рис. 35	Сталь	7,8	20	0,8	3
8	Рис. 36	Латунь	8,5	12	1	2
9	Рис. 37	Алюминий	2,7	7	1,2	1

Окончание табл. 17

Номер варианта	Вид крепления	Материал	Плотность $\rho, 10^3$ кг/м <sup>3</sup>	Модуль Юнга $E, 10^{10}$ Па	Длина $l, м$	Определить $i$ -ю гармонику
10	Рис. 38	Стекло	2,5	6	1	1
11	Рис. 39	Титан	4,5	11	0,8	1
12	Рис. 35	Медь	8,9	12	1,2	2
13	Рис. 36	Сталь	7,8	20	0,8	3
14	Рис. 37	Латунь	8,5	12	1	2
15	Рис. 38	Алюминий	2,7	7	1,2	2
16	Рис. 39	Стекло	2,5	6	1	2
17	Рис. 40	Сталь	7,8	20	1,6	2

**Элементы теории стоячих волн.** Если на левом торце стержня длиной  $l$ , закрепленного, как показано на рис. 35, будет действовать источник гармонических колебаний

$$\xi(t) = A \cos \omega t,$$

то вдоль стержня слева направо будет распространяться прямая волна

$$\xi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad (4.7)$$

где  $A$  — амплитуда волны;  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число;  $\omega$  — циклическая частота колебаний;  $\lambda$  — длина волны.

При отражении прямой волны (4.7) от свободного противоположного правого торца стержня длиной  $l$  по стержню будет распространяться обратная отраженная волна

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t + kx - 2kl). \quad (4.8)$$

При наложении прямой (4.7) и обратной (4.8) волн в стержне образуется стоячая волна

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = 2A \cos(kl - kx) \cos(\omega t - kl).$$

Амплитуда стоячей волны будет равна

$$A_{ст} = 2A \cos(kl - kx). \quad (4.9)$$

При  $x = l$  из выражения (4.9) следует, что  $A_{\text{ст}} = 2A$ . Это означает, что на конце стержня всегда будет пучность смещений частиц стержня. Чтобы на переднем торце стержня, откуда по стержню распространяется возмущение, т. е. при  $x = 0$ , была также пучность, необходимо, чтобы в формуле (4.9) выполнялось условие  $\cos kl = 1$ . А это возможно при выполнении условия, что

$$kl = \pi n,$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — целочисленный ряд значений. С учетом того, что  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , после преобразований получаем

$$l = \frac{\lambda}{2}n. \quad (4.10)$$

Формула (4.10) показывает, что при образовании в стержне стоячей волны на его длине  $l$  должно укладываться целое число полуволн.

Величина  $\lambda/2$  в формуле (4.10) определяет длину стоячей волны  $\lambda_{\text{ст}} = \lambda/2$ . Из формулы (4.10) можно также определить частоты  $\nu_n$ , при которых в стержне образуется стоячая волна.

Поскольку

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad (4.11)$$

где  $\nu$  — частота колебаний, связанная с циклической частотой соотношением  $\omega = 2\pi\nu$ , а скорость упругой волны  $c$  определяется по формуле  $c = \sqrt{E/\rho}$ , то при подстановке выражения (4.11) в (4.10) находим возможные частоты, при которых в стержне может образоваться стоячая волна,

$$\nu_n = \frac{c}{2l}n. \quad (4.12)$$

При  $n = 1$  из (4.12) определяем основную частоту (основной тон)  $\nu = \frac{c}{2l}$ , а при  $n = 2, 3, 4 \dots$  находим обертоны.

Из формулы (4.9) при условии, что  $\cos(kl - kx) = 0$ , находим координаты узлов стоячей волны:

$$kl - kx = \frac{\pi}{2}(2m + 1),$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Отсюда при условии, что  $k = 2\pi/\lambda$ , находим

$$x_m = l - \frac{\lambda}{4}(2m + 1). \quad (4.13)$$

Подставляя в (4.13) целочисленный ряд значений, находим координаты узлов:

$$\begin{aligned} \text{при } m = 0 \quad x_0 &= l - \frac{\lambda}{4}; \\ \text{при } m = 1 \quad x_1 &= l - \frac{3}{4}\lambda; \\ \text{при } m = 2 \quad x_2 &= l - \frac{5}{4}\lambda. \end{aligned}$$

Эти координаты для различных стоячих волн указаны на рис. 41, а, б. В данной задаче стержень закреплен посередине. Следовательно, в центре стержня всегда будет узел стоячей волны. На рис. 41, а схематично изображена стоячая волна при  $n = 1$  и  $m = 0$ , а на рис. 41, б при  $n = 3$  и  $m = 0, 1, 2$ . При  $n = 2$  в рассматриваемом стержне стоячая волна не образуется. В точке с координатой  $x = 0$  узла не должно быть, так как с этого места в стержень передается возмущение от внешнего источника.

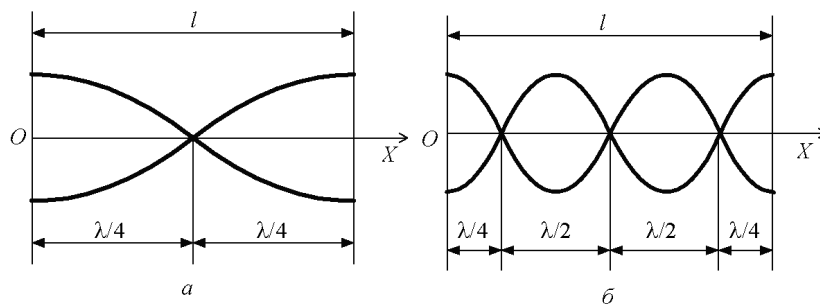


Рис. 41

Если второй торец стержня имеет жесткую заделку, как показано на рис. 36, то фаза отраженной волны от этой заделки будет смещена на величину  $\pi$ :

$$\xi_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx - 2kl - \pi),$$

а прямая волна остается без изменений

$$\xi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx).$$

При наложении прямой и обратной волн получаем стоячую волну:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx - 2kl - \pi) = \\ &= 2A\cos\left(kl - kx - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t - kl - \frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

или

$$\xi(x, t) = 2A\sin(kl - kx) \sin(\omega t - kl),$$

где амплитуда стоячей волны имеет вид

$$A_{\text{ст}} = 2A\sin(kl - kx). \quad (4.14)$$

В итоге уравнение стоячей волны запишется так:

$$\xi(x, t) = A_{\text{ст}}\sin(\omega t - kl).$$

Согласно формуле (4.14), амплитуда стоячей волны при  $x = l$  будет равна нулю ( $A_{\text{ст}} = 0$ ). Отсюда следует, что на заднем торце стержня, где имеется жесткая заделка, всегда будет узел стоячей волны.

При  $x = 0$  из формулы (4.14) получаем:

$$A_{\text{ст}} = 2A\sin kl. \quad (4.15)$$

Так как на переднем торце стержня, откуда от источника колебаний распространяются возмущения, должна быть пучность, из (4.15) следует, что  $\sin kl = 1$ . В этом случае находим:

$$kl = \pi n - \frac{\pi}{2}, \quad (4.16)$$

где  $n$  принимает целочисленный ряд значений  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Поскольку волновое число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , из выражения (4.16) следует, что

$$l = \frac{\lambda}{2} \left( n - \frac{1}{2} \right). \quad (4.17)$$

Например, при  $n = 1$  из (4.17) получаем:  $l = \lambda/4$  (см. рис. 42, а), а при  $n = 2$   $l = (3/4)\lambda$  (см. рис. 42, б).

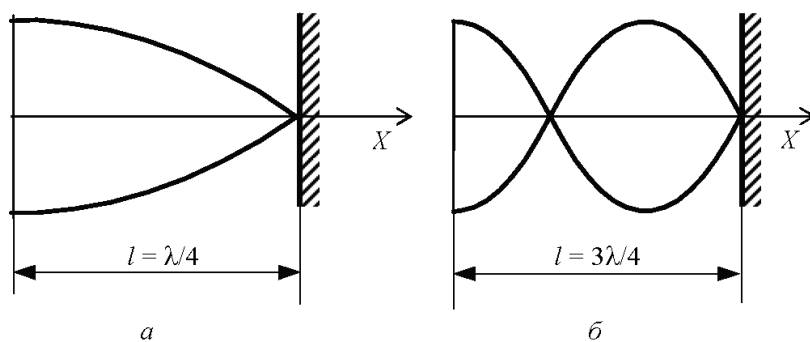


Рис. 42

Подставляя известное соотношение  $\lambda = c/v$  в (4.17), находим спектр резонансных частот, при которых в данном стержне будет образовываться стоячая волна:

$$v_n = \frac{c}{2l} \left( n - \frac{1}{2} \right).$$

При  $n = 1$  получаем основную частоту  $v_1 = \frac{c}{4l}$ , а при  $n = 2, 3, 4, \dots$  определяем обертоны.

Считается, что в тех точках стержня, где имеется одно или два крепления (например,  $A$  на рис. 35, 38 или  $A$  и  $B$  на рис. 37, 39, 40), нет продольных смещений частиц стержня, т. е. в этих точках будут расположены узлы стоячей волны.

### Задача 4-3

Для прямого вертикального волновода (трубы) длиной  $l$ , расположенного в среде (воздухе или воде), как указано на соответствующем рисунке, необходимо:

- 1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в волноводе, при которых в нем образуется стоячая волна;
- 2) указать, какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (высшим гармоникам);
- 3) определить частоту и длину волны  $i$ -й гармоники;

4) для этой гармоники нарисовать вдоль волновода качественную картину:

- а) стоячей волны амплитуд смещений;
- б) стоячей волны амплитуд давлений.

При этом необходимо учитывать то обстоятельство, что в том месте, где расположен узел стоячей волны смещений, будет возникать пучность стоячей волны давлений и наоборот.

Исходные данные для каждого варианта задачи представлены в табл. 18.

Скорость звука в воде  $c_1 = 1500$  м/с, а в воздухе  $c_2 = 340$  м/с.

Таблица 18

Номер варианта	Схема волновода	Среда		Длина волновода $l$ , м	Определить $i$ -ю гармонику
		внутри	снаружи		
18	Рис. 43	Воздух	Воздух	1,02	1
19	Рис. 44	Вода	Вода	1,5	4
20	Рис. 45	Вода	Вода	0,9	2
21	Рис. 46	Воздух	Воздух	2,04	2
22	Рис. 47	Воздух	Воздух	3,4	4

**Дополнительные пояснения к задачам 4-2, 4-3.** На рис. 46 волновод открыт с обоих концов. На рис. 43–45, 47 волновод на одном конце имеет жесткую пластину, а другой его конец свободен. На рис. 46, 47 открытый нижний конец волновода совпадает с границей раздела сред (воздух — вода), а другой конец волновода открыт и находится полностью в воздухе (см. рис. 46) либо закрыт жесткой пластиной (см. рис. 47).

Задачи 4-2 и 4-3, которые относятся к стержням и волноводам, необходимо выполнять в следующем порядке: сперва прорисовать возможные стоячие волны на длине стержня (волновода) при различных длинах волн так, чтобы на длине стержня (волновода) укладывалось, в соответствии с граничными условиями, требуемое число полуволн и четвертей волн. Начинать прорисовывать стоячие волны необходимо для больших длин волн, а затем для

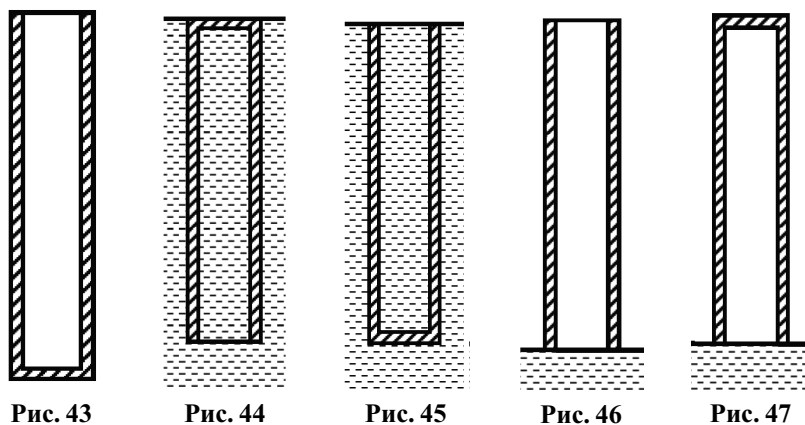


Рис. 43      Рис. 44      Рис. 45      Рис. 46      Рис. 47

меньших длин волн. Далее, внимательно рассматривая получившиеся рисунки, постараться установить общую закономерность возникновения стоячих волн при разных длинах волн так, чтобы в итоге получить общую формулу, связывающую длину стержня (волновода) с числом полуволн и четвертей волн, укладывающихся на его длине.

Рассмотрим, как это делается, на примере образования стоячей волны внутри замкнутого волновода, заполненного воздухом, с жесткими торцами, верхний торец которого выполнен в виде заглушки на резьбовом соединении, а в центре волновода расположен источник колебаний. Сперва прорисуем возможные стоячие волны в рассматриваемом волноводе (рис. 48).

Рассматривая получившиеся рисунки, можно подобрать формулу, которая определяет число полуволн на длине  $l$  волновода, например, при  $i = 1$   $l = \lambda/2$ , при  $i = 2$   $l = 3\lambda/2$ , при  $i = 3$   $l = 5\lambda/2$ . Следовательно, общая формула, связывающая  $l$  и  $\lambda$  при любом целочисленном значении  $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ , будет иметь вид

$$l = (2i - 1)\lambda/2. \quad (4.18)$$

Согласно выражению (4.18) и известному соотношению  $\lambda = c/v$ , находим значения резонансных частот, при которых в волноводе образуется стоячая волна:

$$\nu_i = (2i - 1)c/2l. \quad (4.19)$$

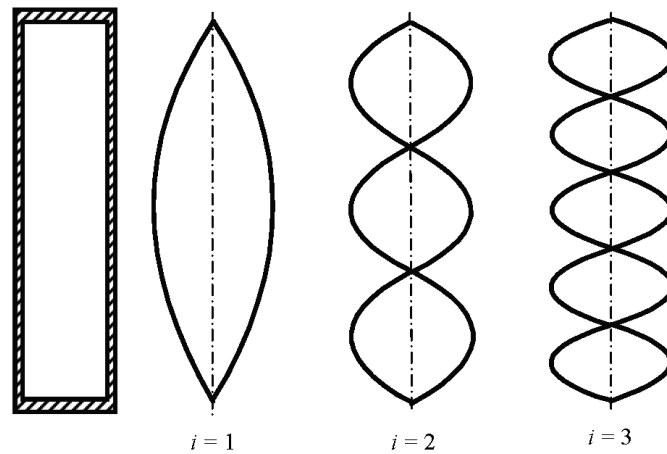


Рис. 48

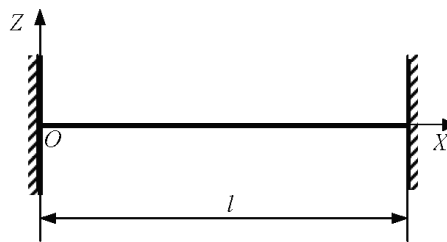


Рис. 49

Итак, при  $i = 1$  из формулы (4.19) получаем основную частоту  $\nu_1 = c/2l$ , а при  $i = 2, 3, 4, \dots$  получаем частоты  $\nu_2, \nu_3, \nu_4, \dots$ , которые будут соответствовать обертонам.

#### Задача 4-4

Для струны длиной  $l$ , натянутой с силой  $\vec{F}$  и закрепленной, как указано на рис. 49, необходимо:

- 1) определить частоту колебаний и длину волны  $i$ -й гармоники стоячей волны;
- 2) для этой гармоники нарисовать вдоль струны качественную картину:

- а) стоячей волны амплитуд смещений точек струны;  
 б) распределения скоростей точек струны для момента времени  $t = 0,25T$ , где  $T$  – период колебания струны для  $i$ -й гармоники.

Исходные данные для каждого варианта задачи представлены в табл. 19.

Таблица 19

Номер варианта	Характеристики струны				Сила натяжения $F$ , Н	Номер гармоники
	длина $l$ , м	диаметр $d$ , мм	материал струны	плотность $\rho$ , $10^3$ кг/м <sup>3</sup>		
23	0,6	0,4	Медь	8,9	1	3
24	0,9	0,5	Медь	8,9	3	4
25	1,0	0,6	Медь	8,9	4	5
26	1,2	0,3	Сталь	7,8	5	4
27	0,8	0,2	Сталь	7,8	6	3
28	0,7	0,1	Сталь	7,8	2	2

**Дополнительные пояснения к задаче 4-4.** Скорость волны в струне (скорость распространения поперечных смещений) рассчитывают по формуле  $a = \sqrt{\frac{F}{\tau}}$ , где  $\tau = \frac{m}{l}$  – линейная плотность материала струны, а  $m$  – масса струны. Волновое уравнение, описывающее распространение вдоль струны поперечной волны, имеет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

где  $z$  – смещение частиц струны относительно положения равновесия в поперечном направлении.

## ЛИТЕРАТУРА

*Иродов И.Е.* Механика. Основные законы. М.; СПб.: Физматлит, 2000.

*Иродов И.Е.* Волновые процессы. Основные законы. М.; СПб.: Физматлит, 1999.

*Савельев И.А.* Курс общей физики: Учеб. пособие для вузов: В 5 кн. Кн. 1: Механика. М.: Наука; Физматлит, 1998.

*Савельев И.А.* Курс общей физики: Учеб. пособие для вузов: В 5 кн. Кн. 4: Волны. Оптика. М.: Наука; Физматлит, 1998.

*Сивухин Д.В.* Курс общей физики. Т. 1: Механика. М.: Наука, 1989.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Требование к оформлению домашнего задания.....	3
1. Динамика материальной точки.....	6
Задача 1-1.....	6
Пример решения задачи 1-1.....	9
Задача 1-2.....	14
Пример решения задачи 1-2.....	18
Задача 1-3.....	22
2. Динамика вращательного движения.....	24
Задача 2-1.....	24
Задача 2-2.....	25
Задача 2-3.....	27
Задача 2-4.....	28
Пример решения задачи 2-1.....	33
3. Колебания.....	35
Задача 3-1.....	43
Задача 3-2.....	44
Задача 3-3.....	45
Задача 3-4.....	47
Задача 3-5.....	48
4. Волны.....	50
Задача 4-1.....	50
1. Задача 4-2.....	52
2. Задача 4-3.....	58
Задача 4-4.....	61
Литература.....	63