Семинар 1. Кинематика

***Аудиторное занятие*:**

Иродов И.Е. Задачи по общей физике. - М.: Бином, 1998÷2010.

***№№* 1.25, 1.41, 1.45, 1.48**

Чуев Анатолий Степанович, https://www.bmstu.ru/ps/~chuev/

https://e-learning.bmstu.ru/fn/course/view.php?id=12 семинары на ФН-4

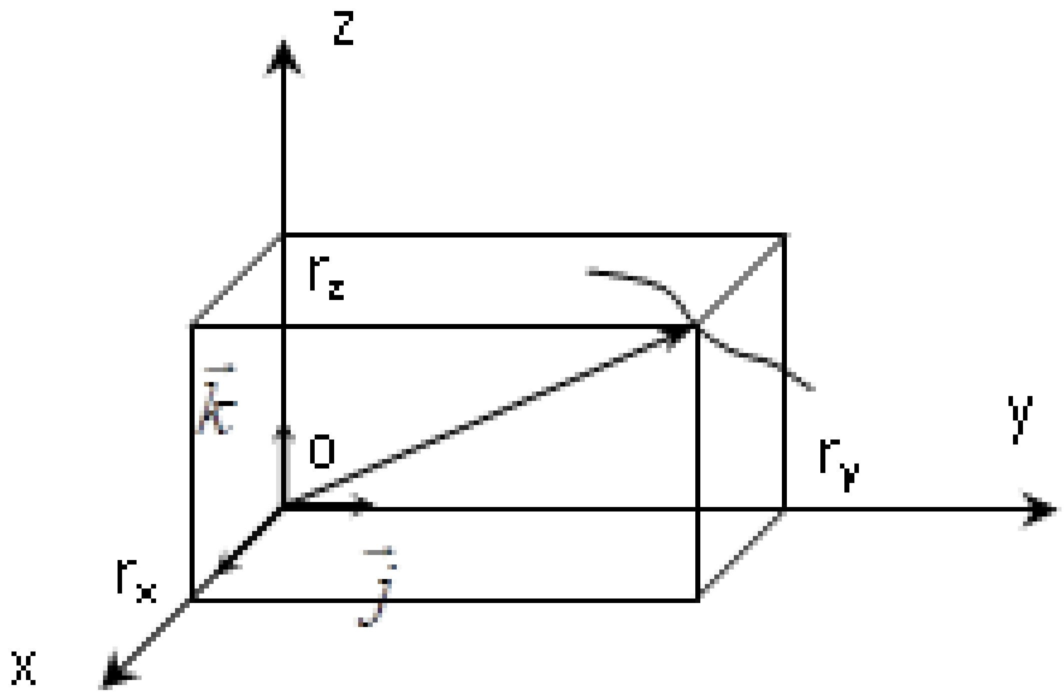
Краткие теоретические сведения:

Основные понятия:

Путь.
Перемещение (линейное и угловое).
Скорость линейная.
Скорость угловая.
Ускорение (тангенциальное и нормальное).
Полное ускорение.

Система координат и система отсчета.

Декартова система координат:



$$\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k}$$

В декартовой системе координат:

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k}$$

$$r_x(t)=x(t),\ r_y(t)=y(t),\ r_z(t)=z(t)$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k},$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

Одномерная система координат:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Средняя скорость – скалярная величина.

предел отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при стремлении Δt к нулю называется *истинной* или *мгновенной скоростью материальной точки в момент времени* t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

$[v] = \text{м}/\text{с}$ dim v = LT^{-1}

Ускорение материальной точки

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t),$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Ускорение это вторая производная от пути

$$a = \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$[a] = \text{м}/\text{с}^2$$

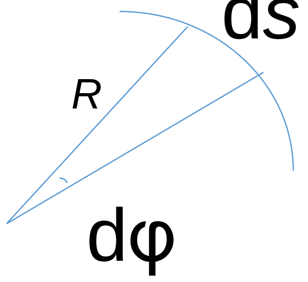
Тангенциальная и нормальная составляющие полного ускорения

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}.$$

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + (v^2/\rho)^2}$$

где $\dot{v}$ — производная модуля скорости по времени.



Кривизна траектории $K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$

Радиус кривизны $R = \frac{1}{K}$

В общем виде

$$\Delta\mathbf{r} = \int\limits_0^t \mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a}t^2/2.$$

С учетом начального положения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r},$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a}t^2/2.$$

Поступательное движение		Вращательное движение	
Путь	S	Угол поворота	φ
Скорость	$\upsilon = \dfrac{dS}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$
Взаимосвязь пути, скорости и ускорения	$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$ $S = \upsilon_0 t \pm \dfrac{at^2}{2}$ $S = \int_0^t \upsilon dt$	Взаимосвязь угла поворота, скорости и ускорения	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varphi = \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ $\varphi = \int_0^t \omega dt$
Основное уравнение динамики поступательного движения	$\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $m\vec{a} = \vec{F}$	Основное уравнение динамики вращательного движения	$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	Момент импульса	$\vec{L} = I\vec{\omega}$

АНАЛОГИИ СООТНОШЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ПРИ ЛИНЕЙНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ

Чуев А.С, МГТУ им. Н.Э. Баумана, www.bmstu.ru/ps/~chuev

Перемещение	
$\vec{l}$ - линейное перемещение	$\vec{\varphi}$ - угловое перемещение
Скорость	
$\vec{v} = d\vec{l} / dt$ - линейная скорость	$\vec{\omega} = d\vec{\varphi} / dt$ - угловая скорость
Соотношение скоростей	
$v = \omega R$; $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{R}]$	$\omega = v/R$
Ускорение	
$\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{l}/dt^2$ - линейное	$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt = d^2\vec{\varphi}/dt^2$ - угловое
Выражение для центростремительного (центробежного) ускорения	
$a_n = v^2 / R$	$a_n = \omega^2 R$
Суммарное ускорение	
$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$;	
Переносное ускорение (Кориолиса)	
$\vec{a}_K = 2[\vec{\omega} \times \vec{v}]$	

Задача № 1.25

Точка движется в плоскости xy по закону
$x = A\sin\omega t$, $y = A(1 - \cos\omega t)$,

где A и ω – положительные постоянные.

Найти: а) путь S, проходимой точкой за время τ;
б) угол между скоростью и ускорением точки.

Дано: $x(t)$; $y(t)$

Найти: S = ? Угол $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ = ?

Решение. Проекции v_x, v_y вектора мгновенной скорости $\mathbf{v}_\tau$ точки M на осях OX, OY:

$$v_x = dx/dt = A\omega\cos\omega t; \; v_y = dy/dt = A\omega\sin\omega t. \qquad (1)$$

Модуль v_τ вектора $\mathbf{v}_\tau$ мгновенной скорости точки:

$$v_\tau = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = A\omega. \qquad (2)$$

Путь S, проходимой точкой за время τ:

$$S = \int_0^\tau v_\tau dt = \int_0^\tau A\omega dt = A\omega\tau. \qquad (3)$$

Проекции a_x, a_y вектора **a** ускорения M материальной точки на оси координат OX, OY:

$$a_x = dv_x/dt = -A\omega^2 \sin\omega t = -\omega v_y; \qquad (4)$$

$$a_Y = dv_Y/dt = A\omega^2 \cos\omega t = \omega v_X. \qquad (5)$$

Угол $\varphi = \omega t$ между векторами мгновенной скорости v_τ и ускорения $\boldsymbol{a}$ точки M в один и тот же момент времени t определится отношением выражений (4) и (5):

$tg\varphi = \mathbf{v}_y/\mathrm{v}_x = |\boldsymbol{a}_x|/a_Y = tg\omega t$, при этом $\mathbf{v}_\tau \perp \boldsymbol{a}$. (6)

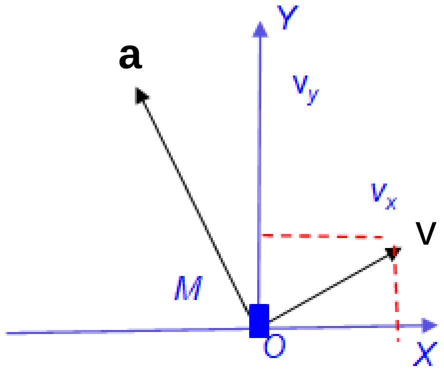


Рис. 1

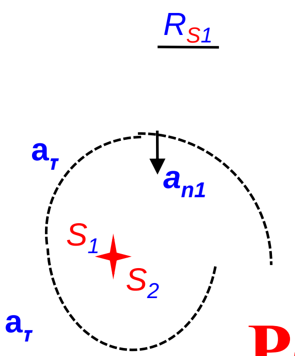
$$a_Y = \omega\, v_x$$

$$a_X = -\,\omega\, v_y$$

Ответ: а) $S = A\omega\tau$; б) $\pi/2$.

Задача № 1.41

Точка движется по плоскости так, что её тангенциальное ускорение $a_\tau = \alpha$, а нормальное ускорение $a_n = \beta t^4$, где α, β – положительные постоянные. В момент $t = 0$ точка покоилась. Найти радиус кривизны R_S траектории точки и её полное ускорение как функции пройденного пути S.



Дано: $a_\tau = \alpha$; $a_n = \beta t^4$

Найти: $R(S) = ?$; $a(S) = ?$

Решение: Проекция a_τ вектора тангенциального ускорения $\mathbf{a}_\tau$ на направление единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$ согласно условию задачи постоянна во времени, поэтому модуль v_τ вектора мгновенной скорости $\mathbf{v}_\tau$ материальной точки M:

$$a_\tau = dv_\tau/dt \leftrightarrow dv_\tau = a_\tau dt \leftrightarrow v_\tau = \int_0^t a_\tau dt \leftrightarrow v_\tau = \alpha_\tau t\,. \qquad (1)$$

$a_\tau = \alpha$

$a_n = \beta t^4$

Путь S, пройденный точкой в зависимости от времени t:

$$dS = v_\tau dt \leftrightarrow S = \int_0^t \alpha t dt \leftrightarrow S = \alpha t^2/2 \leftrightarrow t^2 = 2S/\alpha. \qquad (2)$$

Модуль a_n вектора $\boldsymbol{a}_n$ нормального ускорения,

направленный к S центру траектории радиусом кривизны R_S

в зависимости от времени t с учётом условия и (1), (2): $a_n = v_\tau^2/R_S$

Отсюда: $v_\tau^2 = a_n R_S \leftrightarrow v_\tau^2 = \beta t^4 R_S$

$a_\tau = \alpha$
$a_n = \beta t^4$

Так как $v_\tau^2 = \alpha^2 t^2 = \beta t^4 R_S$, то $\alpha^2 = \beta R_S t^2 = \beta R_S 2S/\alpha$

Отсюда: $$R_S = \alpha^3/2\beta S. \qquad (3)$$

Модуль a_n вектора нормального ускорения $\boldsymbol{a}_n$ с учётом условия и (3):

$$a_n = \beta(2S/\alpha)^2. \qquad (4)$$

Модуль a вектора полного ускорения $\boldsymbol{a}$ с учётом условия и (4):

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2(2S/\alpha)^4} = \alpha\sqrt{1 + (4\beta S^2/\alpha^3)^2}. \qquad (5)$$

Ответ: $R_S = \alpha^3/2\beta S$;

$a = \alpha\sqrt{1 + (4\beta S^2/\alpha^3)^2}$.

Задача № 1.45

Снаряд вылетел со скоростью $v = 320$ *м/с*, сделав внутри ствола $n = 2{,}0$ оборота. Длина ствола $l = 2{,}0$ *м*. Считая движения снаряда в стволе равноускоренным, найти его угловую скорость в момент вылета.

Дано: v; n. Найти: $\omega_\tau = ?$

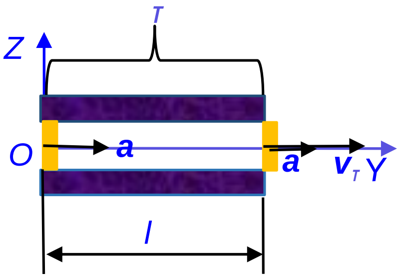


Рис.1

Решение. Время τ вылета снаряда с модулем v_τ вектора скорости $\mathbf{v}_\tau$ при движении в стволе длиной l с постоянным модулем вектора ускорения $\boldsymbol{a}$, с учётом $v_0 = 0$ при $y_0 = 0$:

$$a = dv/dt \leftrightarrow dv = adt \leftrightarrow v_\tau = \int_0^\tau adt \leftrightarrow v_\tau = a\tau \leftrightarrow v = dy/dt \leftrightarrow dy = vdt \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \int_0^l dy = \int_0^\tau atdt \leftrightarrow l = a\tau^2/2.$$ Из: $v_\tau = a\tau$; и $l = a\tau^2/2 \leftrightarrow \tau = 2l/v_\tau$. (1)

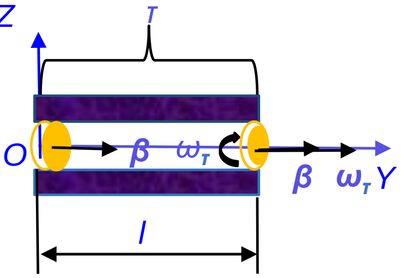


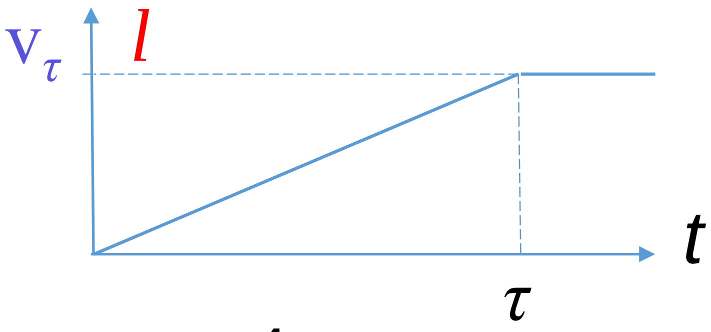
Рис.2

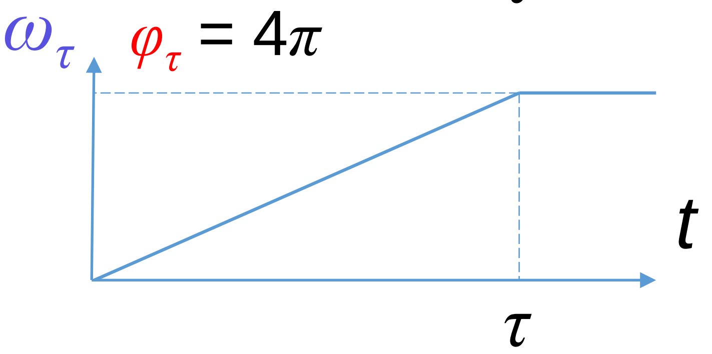
Угловая ω_τ скорость оси снаряда в момент τ вылета с учётом её постоянного модуля β вектора $\boldsymbol{\beta}$ углового ускорения, модуля $\omega_0 = 0$ вектора $\boldsymbol{\omega}_0$ начальной угловой скорости, модуля $\varphi_0 = 0$ вектора начального угла поворота $\boldsymbol{\varphi}_0$ снаряда и числа оборотов n в стволе, а также с учётом (1):

$$\beta = d\omega/dt \leftrightarrow d\omega = \beta dt \leftrightarrow \int_0^{\omega_\tau} d\omega = \int_0^{\tau} \beta dt \leftrightarrow \omega_\tau = \beta\tau \leftrightarrow \omega = d\varphi/dt \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow d\varphi = \omega dt \leftrightarrow \int_0^{2\pi n} d\varphi = \int_0^{\tau} \beta t dt \leftrightarrow 2\pi n = \beta\tau^2/2 \leftrightarrow \beta = 4\pi n/\tau^2:$$

$$\omega_\tau = 4\pi n/\tau \leftrightarrow \omega_\tau = 2\pi n \mathrm{v}_\tau/l = 2\cdot 3{,}14\cdot 2\cdot 320/2 \approx 2{,}0\cdot 10^3\ рад/с. \qquad (2)$$





Другой вариант решения:

Отношения $\dfrac{l}{\mathrm{v}_\tau} = \dfrac{4\pi}{\omega_\tau}$ равны из-за равенства двух процессов во времени

Ответ: $\omega_\tau = 2\pi n \mathrm{v}_\tau/l = 2{,}0\cdot 10^3$ рад/с .

Задача 1.48

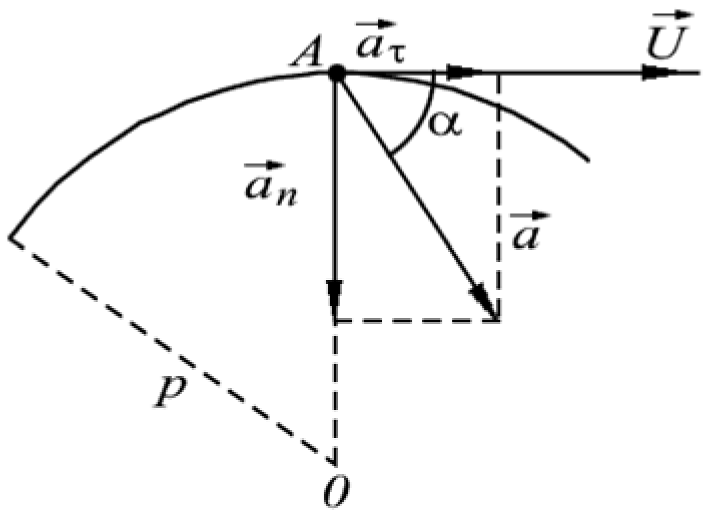
Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta = at$, где $a = 2,0 \cdot 10^{-2}$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\alpha = 60^\circ$ с ее вектором скорости?

Решение:

Тангенциальное, нормальное и полное ускорения определяются формулами:

$$\vec{a}_\tau = \left(\frac{dv_\tau}{dl}\right)\vec{\tau}; \qquad \vec{a}_n = \left(\frac{v^2}{R}\right)\vec{n}.$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{a_n}{a_\tau}.$$



Поскольку $\beta = \frac{d\omega}{dt} = at,$

то угловая скорость $\omega = \int_0^t atdt = \frac{1}{2}\alpha t^2.$

Нормальная составляющая углового ускорения $a_n = \omega^2 R = \dfrac{1}{4}\alpha^2 t^4 R$

Тангенциальная составляющая углового ускорения $a_\tau = \beta R = \alpha t R$

По рисунку: $tg\alpha = \dfrac{a_n}{a_\tau} = \dfrac{1}{4}\alpha t^3.$

Отсюда: $t = \left[\left(\frac{4}{a}\right) tg\alpha\right]^{1/3}$ = 7 с.

Дома:

1) ***Иродов И.Е. Задачи по общей физике. М.: Бином, 1998÷2010. №№ 1.20, 1.47.***
2) ***2) Чертов А.Г., Воробьёв А.А. Задачник по физике .- М.: Издат. Физ.-мат. лит. 2003. №№ 1.26, 1.54.***

Задачи Иродов И.Е. №№ 1.20, 1.47.

1.20. Радиус-вектор частицы меняется со временем t по закону $\mathbf{r} = \mathbf{a}t\,(1 - \alpha t)$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, α — положительная постоянная. Найти:

а) скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ частицы в зависимости от времени;

б) промежуток времени Δt, по истечении которого частица вернется в исходную точку, а также путь s, который она пройдет при этом.

а) v = $b(1-2\alpha t)$; **a** =-2a**b** =const, 2) $\Delta t = 1/\alpha$; s = $b/2\alpha$

1.47. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta = at$, где $a = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\alpha = 60°$ с ее вектором скорости?

$\langle\omega\rangle = 2\alpha/3 = 4$ рад/с, $\langle\beta\rangle = \sqrt{3ab} = 6$ рад/с^2

Задачи Чертов, Воробьев. №№ 1.26, 1.54.

1.26. Материальная точка движется по плоскости согласно уравнению $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}At^3 + \mathbf{j}Bt^2$. Написать зависимости: 1) $\mathbf{v}(t)$, 2) $\mathbf{a}(t)$.

1.26. 1) $\mathbf{v} = \mathbf{i}3At^2 + \mathbf{j}2Bt$; 2) $\mathbf{a} = \mathbf{i}6At + \mathbf{j}2B$.

1.54. Диск радиусом $r = 10$ см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2. Найти тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения.

1.54. 5 см/с^2; 10 см/с^2; 11 см/с^2.