Методические указания

Л.А. Лунёва, А.М. Макаров

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ. ТЕМА «ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ».

Под редакцией проф. О.С. Литвинова

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.

Одним из важнейших следствий системы уравнений классической электродинамики, основателем которой был Дж. К. Максвелл, является открытие явления распространения в пространстве электромагнитных волн как формы существования электромагнитного поля.

В неподвижной изотропной однородной непроводящей электрический ток среде систему уравнений Максвелла можно записать в следующей форме:

$$div\,\vec{D} = \rho; \quad div\,\vec{B} = 0; \quad rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t}; \quad rot\,\vec{H} = \frac{\partial\,\vec{D}}{\partial\,t}, \tag{1}$$

где $\vec{D}$ - векторное поле электрического смещения (вектор $\vec{D}$), $\vec{B}$ - векторное поле магнитной индукции, $\vec{E}$ - векторное поле напряжённости электрического поля, $\vec{H}$ - векторное поле напряжённости магнитного поля. В рассматриваемой среде имеют место материальные уравнения среды:

$$\vec{D} = \varepsilon\,\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\,\mu_0\vec{H}, \quad \varepsilon = const, \quad \mu = const. \tag{2}$$

Здесь ε - относительная диэлектрическая проницаемость среды, μ - относительная магнитная проницаемость среды, ε_0 и μ_0 - электрическая и магнитная постоянные (система единиц СИ).

Материальные уравнения среды (2) позволяют переписать систему уравнений Максвелла в форме уравнений для напряжённостей электромагнитного поля:

$$\varepsilon\,\varepsilon_0 div\,\vec{E} = \rho; \quad \mu\,\mu_0 div\,\vec{H} = 0; \quad rot\,\vec{E} = -\mu\,\mu_0\frac{\partial\,\vec{H}}{\partial\,t}; \quad rot\,\vec{H} = \varepsilon\,\varepsilon_0\frac{\partial\,\vec{E}}{\partial\,t}. \tag{3}$$

Из системы уравнений (3) можно получить волновые уравнения для напряжённостей электрического и магнитного полей. Для выполнения этой цели проведём следующие выкладки.

$$rot\,rot\,\vec{E} \equiv grad\,div\,\vec{E} - \Delta\,\vec{E} = -\mu\,\mu_0 rot\frac{\partial\,\vec{H}}{\partial\,t} = -\mu\,\mu_0\frac{\partial}{\partial\,t}rot\,\vec{H} = -\varepsilon\,\mu\,\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\,t^2}, \tag{4}$$

$$rot\,rot\,\vec{H} \equiv grad\,div\,\vec{H} - \Delta\,\vec{H} = +\varepsilon\,\varepsilon_0 rot\frac{\partial\,\vec{E}}{\partial\,t} = +\varepsilon\,\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial\,t}rot\,\vec{E} = -\varepsilon\,\mu\,\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial\,t^2}. \tag{5}$$

Ниже будет показано, что в рассматриваемом случае объёмная плотность сторонних электрических зарядов ρ обращается в нуль, это обстоятельство имеет следствием соотношения

$$div\,\vec{E} = 0, \qquad div\,\vec{H} = 0. \tag{6}$$

С учётом соотношений (6), очевидно, приходим к уравнениям для напряжённостей электрического и магнитного полей, эти уравнения имеют каноническую форму, характерную для волновых уравнений, т.е. уравнений, описывающих процесс распространения волн той или иной физической природы:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \upsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \upsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} \right), \qquad (7)$$

$$где \qquad \upsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0} = \frac{c^2}{n^2}.$$

Здесь c - скорость света в вакууме, n - показатель преломления среды, υ - скорость распространения волны. Величину υ можно представить следующим образом:

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ есть скорость распространения электромагнитных волн при $\varepsilon = \mu = 1$, т. е. в вакууме. Если же электромагнитные волны распространяются не в вакууме, а в среде, то скорость их распространения изменяется по закону $\upsilon == \dfrac{c}{n}$, а длина волны при той же частоте становится другой, и в этом легко убедиться на опыте.

Одно из возможных решений волновых уравнений (7) - решение в форме плоских гармонических волн:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_m \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \qquad \vec{H}(\vec{r},t) = H_m \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad , \qquad (8)$$

где $\vec{E}_m$ и $\vec{H}_m$ - амплитуды колебаний векторов напряжённостей электрического и магнитного полей рассматриваемой волны, постоянные комплексные (в частном случае – действительные) во всех точках пространства; $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица; $\vec{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения с координатами x, y, z; $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ - круговая частота, определяемая периодом колебаний T; $\vec{k}$ - волновой вектор, направление которого определяется направлением распространения волны, а модуль волнового вектора (волновое число) связан с длиной волны λ соотношением $k = 2\pi/\lambda$; λ - длина волны, определяющая её пространственный период колебаний, под которым понимается расстояние, проходимое волной за время, равное её периоду колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{\nu}$, где ν - частота колебаний, единицей которой в СИ является герц (Гц). Величину $\varphi_{полн} = \omega t - \vec{k}\vec{r} - \varphi_0$ называют полной (мгновенной) фазой колебаний волны. Заметим, что начальная фаза колебаний φ_0, присутствующая в правой части соотношения для полной фазы, в рассматриваемой задаче принята равной нулю. Особенностью гармонической электромагнитной волны является зависимость её полной фазы колебаний $\varphi_{полн}$ от времени и положения точки наблюдения в пространстве.

Фазовая скорость гармонической плоской волны определяется зависимостью:

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}. \tag{9}$$

Фазовая скорость волны является скоростью перемещения в пространстве с течением времени элементов поверхности волнового фронта, т.е. поверхности, в точках которой мгновенная фаза колебаний описываемой физической величины является постоянной. В зависимости от того, какую форму имеет волновой фронт, говорят о *плоских* волнах (волновой фронт плоский), *сферических*, *цилиндрических* и т.д. Круговая частота ω и волновой вектор $\vec{k}$ гармонической волны по определению являются постоянными величинами, они не зависят от координат точки наблюдения и рассматриваемого момента времени.

Специфическая комплексная форма записи искомых зависимостей (8) очень удобна для выяснения общих свойств электромагнитных волн. Из уравнений (7) можно сделать заключение, что фазовые скорости распространения "электрической" и "магнитной" волн одинаковы. Но это далеко не исчерпывает всех свойств электромагнитных волн. В рассматриваемой среде в безграничном пространстве плоские гармонические электромагнитные волны являются "поперечными" волнами, волны $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не могут существовать по отдельности, их амплитуды связаны между собой как по величине, так и по взаимной ориентации векторов $\vec{E}_m$ и $\vec{H}_m$, а мгновенные фазы колебаний этих волн должны быть одинаковы. Свойства рассматриваемых электромагнитных волн можно установить с помощью исходных дифференциальных уравнений первого порядка - системы уравнений Максвелла (3). Сущность этого явления состоит в том, что при повторном дифференцировании часть информации о решении исходной системы уравнений теряется.

Напомним полезные сведения из математики.

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi),$$

$$div\,(\varphi\vec{a}) \equiv (grad\,\varphi)\cdot\vec{a} + \varphi\, div\,\vec{a}, \quad rot\,(\varphi\vec{a}) \equiv (grad\,\varphi)\times\vec{a} + \varphi\, rot\,\vec{a},$$

$$grad\,(\vec{k}\cdot\vec{r}) = k_x\cdot\vec{e}_x + k_y\cdot\vec{e}_y + k_z\cdot\vec{e}_z = \vec{k}, \quad \forall\vec{k} = \overrightarrow{const}\ .$$

В форме комплексного числа $e^{i\varphi}$ первое слагаемое $\cos(\varphi)$ представляет собой действительную часть, а второе слагаемое $i\sin(\varphi)$ - мнимую часть комплексного числа. Физический смысл по условию можно приписать либо действительной, либо мнимой части комплексных выражений (8).

Система уравнений Максвелла (3), если использовать предполагаемую форму решения (8) с учётом приведённых выше математических соотношений, принимает вид:

$$\begin{gathered} i\,\vec{k}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon\,\varepsilon_0}; \qquad i\,\vec{k}\cdot\vec{H}(\vec{r},t) = 0; \\ i\,\vec{k}\times\vec{E}(\vec{r},t) = i\,\omega\,\mu\,\mu_0\vec{H}(\vec{r},t); \qquad i\,\vec{k}\times\vec{H}(\vec{r},t) = -i\,\omega\,\varepsilon\,\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r},t). \end{gathered} \tag{10}$$

Из второй строчки уравнений (10) следует:

$$\vec{H} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega\,\mu\,\mu_0}; \quad \vec{E} = -\frac{\vec{k}\times\vec{H}}{\omega\,\varepsilon\,\varepsilon_0}. \tag{11}$$

В соответствии с выражениями (11) векторные величины $\vec{E}$ и $\vec{H}$ по отдельности перпендикулярны волновому вектору $\vec{k}$ и перпендикулярны друг другу, в этом состоит свойство "поперечности" электромагнитных волн (заметим, что в волноводах конечных размеров это свойство может не иметь места). Следует обратить внимание на то, что рассматриваемые волны $\vec{E}$ и $\vec{H}$ являются "синфазными", их мгновенные фазы колебаний совпадают. Результаты (11) не противоречат первой строчке соотношений (10), более того, обнаруживается, что в рассматриваемом случае объёмная плотность сторонних электрических зарядов тождественно равна нулю (выше это было только предположением).

Если выражение для вектора $\vec{H}$ из соотношений (11) подставить в выражение для вектора $\vec{E}$ в тех же соотношениях, получаем ***дисперсионное уравнение*** как условие нетривиальной совместности системы (11):

$$\vec{E} = -\frac{\vec{k}\times\vec{k}\times\vec{E}}{\omega^2\,\varepsilon\,\mu\,\varepsilon_0\mu_0} = -\frac{\vec{k}\,(\vec{k}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\,(\vec{k}\cdot\vec{k})}{\omega^2\,\varepsilon\,\mu\,\varepsilon_0\mu_0} = \frac{k^2\cdot\vec{E}}{\omega^2\,\varepsilon\,\mu\,\varepsilon_0\mu_0} \;\;\Rightarrow\;\; \omega^2 = \frac{k^2}{\varepsilon\,\mu\,\varepsilon_0\mu_0}. \tag{12}$$

Дисперсионное уравнение (12) должно обязательно быть выполненным, иначе было бы необходимо допустить в качестве единственной возможности реализации рассматриваемого метода существование только тривиального решения $\vec{E} = 0$ и $\vec{H} = 0$, что не представляет интереса.

В соответствии с дисперсионным уравнением круговая частота электромагнитной волны жёстко связана с длиной волны, эти параметры нельзя задать независимо друг от друга. Фазовая скорость волны (9) в рассматриваемом случае определяется только параметрами среды. Заметим также, что круговая частота гармонической электромагнитной волны по определению в настоящей работе является действительной величиной, а в соответствии с дисперсионным уравнением (12) волновое число k, а значит и волновой вектор $\vec{k}$, являются действительными величинами.

В каждой точке пространства, в котором распространяется электромагнитная волна, можно рассчитать объёмную плотность энергии электромагнитного поля:

$$w = \frac{\varepsilon\,\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\,\mu_0 H^2}{2} \tag{13}$$

и вектор плотности потока энергии - вектор Пойнтинга:

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = w\cdot\vec{\upsilon}. \tag{14}$$

При вычислении плотности потока энергии электромагнитного поля следовало бы объёмную плотность энергии умножить на вектор групповой скорости волны, но в рассматриваемом случае среды без диссипации (среда непроводящая) конечные выражения для фазовой и групповой скоростей совпадают.

В двух последних формулах предполагается, что электрическое и магнитное поле описываются действительными выражениями (т.е. не используется комплексная форма записи):

$$\vec{E}=\vec{E}_m\cdot\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}-\varphi_0),\qquad \vec{H}=\vec{H}_m\cdot\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}-\varphi_0)\,. \tag{15}$$

Покажем, что вторая часть соотношения (14) справедлива.

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}+\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}\times\vec{k}}{2\mu\mu_0\omega}+\frac{\vec{k}\times\vec{H}\times\vec{k}}{2\varepsilon\varepsilon_0\,\omega}=\frac{\vec{k}\cdot(E^2)}{2\mu\mu_0\omega}+\frac{\vec{k}\cdot(H^2)}{2\varepsilon\varepsilon_0\omega}=$$

$$=\frac{\vec{k}}{\omega\cdot\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\cdot\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{\mu\mu_0H^2}{2}\right)=\frac{\vec{k}}{k}\cdot\frac{k}{\omega}\cdot\upsilon^2\cdot w=\frac{\vec{k}}{k}\cdot\upsilon\cdot w=w\cdot\vec{\upsilon}.$$

Для рассматриваемых явлений справедлива теорема Пойнтинга:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{\mu\mu_0H^2}{2}\right)=-div\,\vec{S}\,.$$

Для установившегося гармонического волнового процесса средний по времени поток вектора Пойнтинга через замкнутую боковую поверхность объёма конечных размеров равняется мощности излучателя, находящегося в этом объёме.

Естественно, что выражения (13) и (14) явно зависят от координат точки наблюдения и времени, что позволяет рассчитывать мгновенные значения рассматриваемых величин. Однако, на опыте мы имеем дело не с мгновенным потоком энергии, а со средним его значением по времени. Для каждой точки пространства можно рассчитать средние по времени величины и объёмной плотности электромагнитной энергии, и среднее значение вектора Пойнтинга, и среднее значение модуля вектора Пойнтинга. Математическое правило для этих операций имеет вид

$$<f>=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot d\,t\ . \tag{16}$$

Обратим внимание читателя на то обстоятельство, что для векторных полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ принцип суперпозиции имеет место, а для "квадратичных" величин типа w или вектор Пойнтинга принцип суперпозиции не имеет места.

Пример решения задачи.

Условие задачи.

Плоская гармоническая электромагнитная волна, распространяющаяся в произвольном направлении в вакууме, имеет вид: $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_m\cos(\omega t-\vec{k}\,\vec{r}\,)$. Считая волновой вектор $\vec{k}$ и вектор амплитуды колебаний напряжённости электрического поля волны $\vec{E}_m$ известными и действительными величинами, что допустимо для однородной изотропной среды без эффектов поглощения, найти:

1) вектор напряжённости магнитного поля $\vec{H}(\vec{r},t)$ этой волны как функцию времени t и радиус-вектора $\vec{r}$ точки наблюдения;
2) объёмную плотность энергии $w(\vec{r},t)$;
3) вектор Пойнтинга $\vec{S}$;
4) средний вектор Пойнтинга $\langle\vec{S}\rangle$;
5) среднее значение $\langle S\rangle$ плотности потока энергии, переносимой этой волной;
6) вектор плотности тока смещения $\vec{j}_{см}$;
7) среднее за период колебаний значение модуля плотности тока смещения $\langle|\ \vec{j}_{см}\ |\rangle$;
8) модуль импульса $K_{ед}$ в единице объёма, переносимого электромагнитной волной.

РЕШЕНИЕ

1. Найдём вектор напряжённости магнитного поля $\vec{H}(\vec{r},t)$ электромагнитной волны как функцию времени t и радиус-вектора $\vec{r}$ точки наблюдения.

Представим векторы напряжённости электрического поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ и магнитного поля $\vec{H}(\vec{r},t)$ плоской гармонической электромагнитной волны в комплексной форме (соотношения 8):

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_m\cdot e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\quad,\qquad \vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}_m\cdot e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\quad.$$

Подставим соотношения (8) в третье уравнение системы уравнений Максвелла (1) в дифференциальной форме, связывающее между собой изменение в пространстве и во времени электрического и магнитного полей (выражение закона электромагнитной индукции Фарадея):

$$rot\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \tag{17}$$

где $rot\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}$ - представление ротора векторного поля $\vec{E}$ в декартовых координатах с помощью символического определителя третьего порядка; $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ - единичные орты осей *Ox, Oy, Oz* декартовой системы координат.

При записи уравнения (17) учтено, что по условию задачи электромагнитная волна распространяется в вакууме и поэтому значение магнитной проницаемости вещества μ равно единице. Для определения $rot\vec{E}$ вычислим сначала производные вектора $\vec{E}$ по координатам $x, y, z.$

Предварительно представим скалярное произведение волнового вектора $\vec{k}$ и радиус-вектора $\vec{r}$ точки наблюдения в координатной форме:

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z$$

и теперь найдём необходимые производные:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} &= \vec{E}_m \cdot (-ik_x) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -i\,k_x\,\vec{E};\\
\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} &= \vec{E}_m \cdot (-ik_y) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -i\,k_y\,\vec{E};\\
\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} &= \vec{E}_m \cdot (-ik_z) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -i\,k_z\,\vec{E}.
\end{aligned} \qquad (18)$$

Можно заметить, что дифференцирование $\vec{E}$ по координате x эквивалентно умножению $\vec{E}$ на множитель $(-ik_x)$, а дифференцирование $\vec{E}$ по координатам y и z - умножению $\vec{E}$ на множители $(-ik_y)$ и $(-ik_z)$ соответственно.

Запишем $rot\vec{E}$ с учётом соотношений (18):

$$rot\vec{E} = \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i\left[\vec{k}\times\vec{E}\right].$$

Определим теперь производную $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\,\omega\,\vec{H} \quad ,$$

подставим полученные соотношения для $rot\vec{E}$ и $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ в уравнение Максвелла (17) и в результате получим:

$$-i\left[\vec{k}\times\vec{E}\right] = -\mu_0\, i\,\omega\,\vec{H}\,.$$

Эта зависимость позволяет записать выражение для вектора напряжённости магнитного поля $\vec{H}(\vec{r},t)$ плоской гармонической электромагнитной волны:

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0\omega}\left[\vec{k}\times\vec{E}\right]. \qquad (19)$$

Соотношение (19) показывает, в частности, что у электромагнитной волны в вакууме фазы колебаний электрического и магнитного полей совпадают.

Используем в соотношении (19) для вектора $\vec{E}$ комплексную форму записи (8) и возьмём действительную часть от обеих частей полученного равенства:

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0\omega}\left[\vec{k}\times\vec{E}_m\right]\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\ .$$

Между волновым числом k и круговой частотой ω справедливы соотношения:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{\omega}{c},$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ - скорость света в вакууме, следовательно

$$\frac{1}{\mu_0\omega} = \frac{1}{\mu_0 kc} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\mu_0 k} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}.$$

Окончательно для вектора напряжённости магнитного поля $\vec{H}(\vec{r},t)$ электромагнитной волны получаем следующую зависимость:

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[\vec{k}\times\vec{E}_m\right]\cos(kct - \vec{k}\vec{r}), \tag{20}$$

из которой можно увидеть, что вектор напряжённости магнитного поля $\vec{H}(\vec{r},t)$ перпендикулярен как волновому вектору $\vec{k}$, так и вектору $\vec{E}$. Кроме того, эта зависимость позволяет получить соотношение между амплитудами колебаний электрической и магнитной компонент рассматриваемой электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме:

$$H_m = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot\left|\vec{k}\times\vec{E}_m\right| = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}k\cdot E_m\sin(90^\circ) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m. \tag{21}$$

2. Найдём объёмную плотность энергии электромагнитного поля $w(\vec{r},t)$**.** Объёмная плотность энергии электромагнитного поля w в соответствии с определением (13) для вакуума может быть рассчитана по следующей зависимости:

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}, \tag{22}$$

где первое слагаемое w_E представляет собой объёмную плотность энергии электрического поля, а второе слагаемое w_H – объёмную плотность энергии магнитного поля. Используя соотношение между амплитудами колебаний векторов напряжённостей электрического и магнитного полей (21), можно показать, что $w_E = w_H$. Тогда соотношение (22) можно привести к следующему виду:

$$w = 2w_E = 2w_H = \varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2 = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,E\cdot H. \tag{23}$$

Заметим, что объёмная плотность энергии электромагнитной волны представляет собой функцию, зависящую от времени и координат точки наблюдения и определяющую мгновенное значение плотности энергии:

$$w(\vec{r},t) = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E_m^2\cos^2(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}) = \varepsilon_0 E_m^2\,\cos^2(k\,c\,t - \vec{k}\,\vec{r}). \tag{24}$$

3. Найдём вектор Пойнтинга $\vec{S}$ ***- вектор плотности потока энергии электромагнитной волны.***

Плотность потока энергии S представляет собой вектор, численно равный энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. В соответствии с зависимостью (14) для определения вектора Пойнтинга $\vec{S}=\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]$ следует вычислить векторное произведение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, первый определён условием задачи, а второй – полученной зависимостью (19). Подставив (19) в (14), получим:

$$\vec{S}=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[\vec{E}\times\left[\vec{k}\times\vec{E}\right]\right]=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[\vec{k}(\vec{E}\cdot\vec{E})-\vec{E}(\vec{E}\cdot\vec{k})\right]. \qquad (25)$$

Здесь использована известная формула векторного анализа для двойного векторного произведения:

$$\left[\vec{a}\cdot\left[\vec{b}\cdot\vec{c}\right]\right]=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}),$$

для запоминания которой часто используется выражение «бац минус цаб». Второе слагаемое в (25) в квадратных скобках равно нулю, т.к. векторы $\vec{E}$ и $\vec{k}$ взаимно перпендикулярны. Следовательно

$$\vec{S}=\frac{\vec{k}}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{E}^2=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{E}^2\vec{e}_k=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{E}_m^2\vec{e}_k\cos^2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r}), \qquad (26)$$

где $\vec{e}_k=\dfrac{\vec{e}_k}{|\vec{e}_k|}$ - единичный вектор, параллельный вектору $\vec{k}$, т.е. орт направления распространения волны.

4. Найдём средний за период колебаний вектор Пойнтинга $\langle\vec{S}\rangle$ ***плоской гармонической электромагнитной волны, распространяющейся в произвольном направлении в вакууме.***

Вектор Пойнтинга в рассматриваемой задаче определён зависимостью (26). Математическое правило для нахождения средних по времени величин имеет вид (16). Следуя этому правилу, найдём среднее значение $\langle\vec{S}\rangle$.

$$\langle\vec{S}\rangle=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\vec{S}(t)\cdot dt=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2\vec{e}_k\cdot\cos^2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})dt=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2\vec{e}_k\cdot\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})dt.$$

Из полученного выражения видно, что усреднение вектора $\vec{S}$ за период приводит к определению среднего значения за период функции $\cos^2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})$.

Покажем, что это значение равно $\frac{1}{2}$.

$$\langle\cos^2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})\rangle=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\cos^2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})\,d\,t=\frac{1}{2T}\cdot\int_0^T(1+\cos 2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r}))\,dt.$$

Видим, что последний интегра|л распадается на два интеграла, причём значение первого интеграла равно *T,* а значение второго интеграла обращается в нуль. Покажем это, предварительно произведя замену переменных во втором интеграле: $z=2\omega t-2\vec{k}\,\vec{r}$.

Первообразной для этого интеграла является функция $\sin z$, а с учётом соотношения для z и после подстановки пределов интегрирования получим:

$$\frac{1}{2T}\cdot\int_0^T(\cos 2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r}))dt=\frac{1}{4\omega T}\left[\sin(2\omega T-2\vec{k}\,\vec{r})-\sin(0-2\vec{k}\,\vec{r})\right].$$

Соотношение между периодом колебаний и круговой частотой имеет вид: $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. Заменяя период колебаний через круговую частоту в квадратных скобках последнего выражения и раскладывая первый и второй синус по формуле синуса разности двух аргументов

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

видим, что значение выражения в квадратных скобках равно нулю. Поэтому

$$\langle\cos^2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})\rangle=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\cos^2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})\,d\,t=\frac{1}{2}.$$

Окончательно для среднего значения вектора $\langle\vec{S}\rangle$ получаем:

$$\langle\vec{S}\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2\vec{e}_k. \qquad (27)$$

5. Найдём среднее значение $\langle S\rangle$ плотности потока энергии, переносимой рассматриваемой волной.

Среднее за период колебаний значение плотности потока энергии в соответствии с правилом (16) может быть найдено следующим образом:

$$\langle S\rangle=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T S(t)\,dt,$$

где S – модуль вектора Пойнтинга $\vec{S}$.

$$|\,\vec{S}\,|=S=\left|\vec{E}\times\vec{H}\right|=E_mH_m\cos^2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})\cdot\sin 90^\circ=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2\cos^2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r}).$$

Тогда для значения $\langle S\rangle$ получим:

$$\langle S\rangle=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2\cos^2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})\,dt=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2\,\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\cos^2(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2. \qquad (28)$$

$\langle S\rangle$ - это есть средняя энергия, проходящая через единицу поверхности в единицу времени, или интенсивность волны. Полученный результат показывает, что энергия, переносимая электромагнитной волной, пропорциональна квадрату амплитуды.

6. Найдём вектор плотности тока смещения $\vec{j}_{см}$.

Вектор плотности тока смещения определяется следующей зависимостью:

$$\vec{j}_{см}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad (29)$$

где $\vec{D}$ - вектор электрического смещения. В соответствии с материальными уравнениями (2) $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, а в рассматриваемой задаче электромагнитная волна распространяется в вакууме, поэтому относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon=1$, и тогда $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$.

По условию задачи вектор напряжённости электрического поля равен

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_m\cos(\omega t-\vec{k}\,\vec{r}) \quad\Rightarrow\quad \vec{D}(\vec{r},t)=\varepsilon_0\vec{E}_m\cos(\omega\, t-\vec{k}\,\vec{r}).$$

Колебания вектора плотности тока смещения будут определяться выражением

$$\vec{j}_{см}(\vec{r},t)=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=-\varepsilon_0\omega\,\vec{E}_m\sin(\omega t-\vec{k}\,\vec{r}). \qquad (30)$$

7. Найдём среднее за период колебаний значение модуля плотности тока смещения $\langle|\ \vec{j}_{\,см}|\rangle$**.**

$$\langle|\ \vec{j}_{\,см}|\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\left|-\varepsilon_0\omega\,\vec{E}_m\sin(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})\ \right|dt.$$

При вычислении последнего интеграла затруднений не возникает, но следует иметь в виду, что период колебаний модуля данной подинтегральной функции в два раза меньше периода колебаний самой функции. При подстановке пределов интегрирования, используя формулу косинуса разности двух аргументов, необходимо аккуратно привести подобные слагаемые. В результате получим:

$$\langle|\ \vec{j}_{\,см}|\rangle=\frac{2}{\pi}\cdot\varepsilon_0 k\,c\,E_m. \qquad (31)$$

8. Определим модуль импульса $\vec{K}_{ед}$ ***(удельный импульс) электромагнитной волны.***

Плоская электромагнитная волна с объёмной плотностью энергии w имеет в единице объёма отличный от нуля импульс. Соотношение между плотностью потока энергии S и импульсом в единице объёма электромагнитной волны в векторной форме имеет вид:

$$\vec{K}_{ед}=\frac{\vec{S}}{c^2}.$$

Модуль этой величины можно рассчитать по следующей зависимости:

$$K_{ед}=\frac{w}{c}.$$

Используя соотношение (24), для $K_{ед}$ получим:

$$K_{ед}=(\varepsilon_0E_m^2\ \cos^2(k\,c\,t-\vec{k}\ \vec{r}))/c. \qquad (32)$$

Ниже представлены условия и исходные данные для каждого варианта домашнего задания (задача №4).

<u>Варианты 1-8.</u>

<u>Условие задачи</u>.

Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в вакууме в положительном направлении оси *Ox*. Вектор плотности потока электромагнитной энергии $\vec{S}$ имеет вид: $\vec{S}(x,t)=\vec{S}_m\cos^2(\omega t-k\cdot x)$. Считая волновое число k и амплитудное значение S_m вектора $\vec{S}$ известными и действительными величинами, что допустимо для однородной изотропной среды без эффектов поглощения, найти:

1) вектор напряжённости электрического поля $\vec{E}$ этой волны как функцию времени t и координат точки наблюдения;

2) вектор напряжённости магнитного поля $\vec{H}$ этой волны как функцию времени t и координат точки наблюдения;

3) объёмную плотность энергии w;

4 средний вектор Пойнтинга $\langle\vec{S}\rangle$;

5) среднее значение $\langle S\rangle$ плотности потока энергии, переносимой этой волной;

6) вектор плотности тока смещения $\vec{j}_{см}$;

7) среднее за период колебаний значение модуля плотности тока смещения $\langle|\vec{j}_{см}|\rangle$;

8) величину импульса $K_{ед}$ (в единице объёма).

9) записать волновое уравнение для магнитной и электрической компонент рассматриваемой электромагнитной волны и изобразить схематично мгновенную фотографию этой волны.

Таблица исходных данных к задаче для вариантов 1-8.

Номер варианта	Исходные данные задачи 1		Определить							
	$S_m, \frac{Дж}{с\cdot м^2}$	$k,\ м^{-1}$	$\vec{E}$	$\vec{H}$	w	$\langle\vec{S}\rangle$	$\langle S\rangle$	$\vec{j}_{см}$	$\langle\lvert\vec{j}_{см}\rvert\rangle$	$K_{ед}$
1	26.0	0.41								
2	33.9	0.42								
3	46.2	0.44								
4	60.0	0.45								
5	76.5	0.47								
6	93.5	0.48								
7	113.9	0.50								
8	135.6	0.52								

Варианты 9-16.

***Условие задачи*.**

Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в вакууме в положительном направлении оси *Oy*. Вектор плотности потока электромагнитной энергии $\vec{S}$ имеет вид: $\vec{S}(y,t) = \vec{S}_m \cos^2(\omega t - k\cdot y)$. Считая волновое число k и амплитудное значение S_m вектора $\vec{S}$ известными и действительными величинами, что допустимо для однородной изотропной среды без эффектов поглощения, найти:

2) вектор напряжённости электрического поля $\vec{E}$ этой волны как функцию времени t и координат точки наблюдения;

2) вектор напряжённости магнитного поля $\vec{H}$ этой волны как функцию времени t и координат точки наблюдения;

3) объёмную плотность энергии w;

4 средний вектор Пойнтинга $\langle\vec{S}\rangle$;

5) среднее значение $\langle S\rangle$ плотности потока энергии, переносимой этой волной;

6) вектор плотности тока смещения $\vec{j}_{см}$;

7) среднее за период колебаний значение модуля плотности тока смещения $\langle|\vec{j}_{см}|\rangle$;

8) величину импульса $K_{ед}$ (в единице объёма).

9) записать волновое уравнение для магнитной и электрической компонент рассматриваемой электромагнитной волны и изобразить схематично мгновенную фотографию этой волны.

Таблица исходных данных к задаче для вариантов 9-16.

Номер варианта	Исходные данные задачи 2		Определить							
	$S_m, \dfrac{Дж}{с\cdot м^2}$	$k,\ м^{-1}$	$\vec{E}$	$\vec{H}$	w	$\langle\vec{S}\rangle$	$\langle S\rangle$	$\vec{j}_{см}$	$\langle\lvert\vec{j}_{см}\rvert\rangle$	$K_{ед}$
9	60.0	0.45								
10	46.2	0.44								
11	33.9	0.42								
12	76.5	0.47								
13	135.6	0.52								
14	113.9	0.50								
15	26.0	0.41								
16	93.5	0.48								

Варианты 17-24.

***Условие задачи*.**

Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в вакууме в положительном направлении оси Oz. Вектор плотности потока электромагнитной энергии $\vec{S}$ имеет вид: $\vec{S}(z,t) = \vec{S}_m \cos^2(\omega t - k \cdot z)$. Считая волновое число k и амплитудное значение S_m вектора $\vec{S}$ известными и действительными величинами, что допустимо для однородной изотропной среды без эффектов поглощения, найти:

3) вектор напряжённости электрического поля $\vec{E}$ этой волны как функцию времени t и координат точки наблюдения;

2) вектор напряжённости магнитного поля $\vec{H}$ этой волны как функцию времени t и координат точки наблюдения;

3) объёмную плотность энергии w;

4 средний вектор Пойнтинга $\langle \vec{S} \rangle$;

5) среднее значение $\langle S \rangle$ плотности потока энергии, переносимой этой волной;

6) вектор плотности тока смещения $\vec{j}_{см}$;

7) среднее за период колебаний значение модуля плотности тока смещения $\langle | \vec{j}_{см} | \rangle$;

8) величину импульса $K_{ед}$ (в единице объёма).

9) записать волновое уравнение для магнитной и электрической компонент рассматриваемой электромагнитной волны и изобразить схематично мгновенную фотографию этой волны.

Таблица исходных данных к задаче для вариантов 17-24.

Номер варианта	Исходные данные задачи 3		Определить							
	$S_m, \dfrac{Дж}{с \cdot м^2}$	$k, м^{-1}$	$\vec{E}$	$\vec{H}$	w	$\langle \vec{S} \rangle$	$\langle S \rangle$	$\vec{j}_{см}$	$\langle \lvert \vec{j}_{см} \rvert \rangle$	$K_{ед}$
17	135.6	0.52								
18	26.0	0.41								
19	113.9	0.50								
20	33.9	0.42								
21	46.2	0.44								
22	60.0	0.45								
23	76.5	0.47								
24	93.5	0.48								

Варианты 25-32.

Условие задачи.

Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в произвольном направлении в вакууме. Вектор напряжённости $\vec{H}$ магнитного поля электромагнитной волны имеет вид: $\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_m \cos(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}\,)$. Считая волновой вектор $\vec{k}$ и вектор амплитуды колебаний напряжённости магнитного поля волны $\vec{H}_m$ известными и действительными величинами, что допустимо для однородной изотропной среды без эффектов поглощения, найти:

1) вектор напряжённости электрического поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ этой волны как функцию времени t и радиус-вектора $\vec{r}$ точки наблюдения;
2) объёмную плотность энергии $w(\vec{r},t)$;
3) вектор Пойнтинга $\vec{S}$;
4) средний вектор Пойнтинга $\langle\vec{S}\rangle$;
5) среднее значение $\langle S\rangle$ плотности потока энергии, переносимой этой волной;
6) вектор плотности тока смещения $\vec{j}_{см}$;
7) среднее за период колебаний значение модуля плотности тока смещения $\langle|\,\vec{j}_{см}\,|\rangle$;
8) модуль импульса $K_{ед}$ (в единице объёма).

Таблица исходных данных к задаче для вариантов 25-32.

Номер варианта	Исходные данные задачи 4		Определить							
	$H_m, A/м$	$k,\ м^{-1}$	$\vec{E}(\vec{r},t)$	$w(\vec{r},t)$	$\vec{S}$	$\langle\vec{S}\rangle$	$\langle S\rangle$	$\vec{j}_{см}$	$\langle\lvert\vec{j}_{см}\rvert\rangle$	$K_{ед}$
25	0.26	0.41								
26	0.30	0.42								
27	0.35	0.44								
28	0.40	0.45								
29	0.45	0.47								
30	0.50	0.48								
31	0.55	0.50								
32	0.60	0.52								

Литература

Литвинов О.С., Горелик В.С. Электромагнитные волны и оптика. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2006.

Иродов И.Е. Волновые процессы. Основные законы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. М.: Лань, 2007.

Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.