

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

Чуев А.С., Задорожный Н.А.

**Системное представление физических величин и соотношений
квантовой механики**

*Компьютерный лабораторный практикум по квантовой механике (К-103),
учебный курс «Общая физика»*

Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
2019 г.

УДК 53.081; 537.8

ББК
ч

Чуев А.С., Задорожный Н.А. Системное представление физических величин и соотношений квантовой механики. Компьютерный лабораторный практикум. Метод. пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. – ... с.

Приводятся основные сведения о системном расположении и размерностных взаимосвязях физических величин, используемых в квантовой физике. Последовательность рассмотрения учебного материала соответствует общепринятому в учебнике И.В. Савельева и учебнике Л.К. Мартинсона и Е.В. Смирнова, используемых при изучении данного раздела общей физики в МГТУ им. Н.Э. Баумана. В первую очередь дается системное представление об излучательных тепловых величинах, изучение которых в прошлом положило начало становления квантовой физики. Следом рассматриваются соотношения неопределенностей Гейзенберга и физические величины, применяемые в волновой механике Шрёдингера. После освоения этих разделов изучается комплекс физических величин, относимых к разряду фундаментальных физических постоянных (природных констант). В их число входят постоянная Планка, заряд электрона, электрическая, магнитная и гравитационная постоянные, ряд других величин. Большинство природных констант оказываются системно связанными друг с другом закономерными связями, что выражает единство и целостность физического мира.

Для студентов 2-го курса физических специальностей, изучающих в МГТУ им. Н.Э. Баумана раздел общей физики «Квантовая физика».

Илл. 12. Библиогр. 7 назв.

УДК 53.081; 537.8

ББК

Методическое издание

**Анатолий Степанович Чуев
Задорожный Николай Антонович**

Предисловие

Период времени с конца 19 века и весь 20 век до начала нынешнего ознаменован не столько открытием новых природных взаимосвязей, сколько открытием фундаментальных физических констант или постоянных. К таким константам относятся скорость света, заряд электрона, постоянная Планка, постоянная тонкой структуры и некоторые другие фундаментальные величины. Оказалось, что все фундаментальные физические константы (ФФК) тесно взаимосвязаны друг с другом по величинам и размерностям. Эти качества указывают нам на единую природу ФФК, на единство Природы вообще.

Фундаментальные константы входят в уравнения из самых различных областей физики, демонстрируя тем самым свою универсальную природу. В силу этого ФФК являются основным инструментом, позволяющим сравнить теорию с экспериментом. Точность числовых значений ФФК определяет пределы возможностей теоретических расчетов. Иллюстрацией сказанного являются прецизионные вычисления квантовой электродинамики: их предсказательная сила зависит от точности, с которой определены постоянная Ридберга, постоянная тонкой структуры, отношение масс электрона и мюона и др. [1].

Изучение природных взаимосвязей и уточнение на этой основе значений ФФК представляет собой важнейшую задачу современной теоретической физики и ее прикладных направлений, включая метрологию. Метрологическая значимость ФФК определяется ролью, которую константы играют в создании современных эталонов единиц измерения физических величин (ФВ). Примером является использование скорости света c и электрической постоянной ϵ_0 в определении ампера – одной из основных единиц СИ. Другими примерами являются наиболее точные определения постоянной тонкой структуры и постоянной Планка "электрическими" методами. В настоящее время проводятся исследования по переопределению единицы массы – килограмма с помощью фундаментальных физических констант [2].

Практикум предусматривает использование специализированной компьютерной программы. При выполнении практикума студенты приобретают также навык пользования планарными (плоскими) изображениями системы ФВиЗ в различных вариантах исполнения. На этих изображениях, выполненных применительно к разным разделам квантовой физики, присутствуют большинство ФВ, встречающихся в сферах квантовой и волновой механики.

Компьютерный лабораторный практикум призван способствовать закреплению теоретических знаний, приобретаемых студентами на лекциях и при работе с литературными источниками.

Цель компьютерного лабораторного практикума

Цель данного компьютерного лабораторного практикума – познакомить студентов физических специальностей с ФВ квантовой механики, в том числе ФФК, показать их системные свойства – особенное расположение и размерностные связи, проиллюстрировать их единство, демонстрирующее единство физической Природы вообще. В результате выполнения данного лабораторного практикума достигается углубленное изучение студентами единиц измерения и размерностей ФВ, встречающихся при изучении разделов квантовой физики и (квантовой) волновой механики в курсе общей физики. Практикум способствует углублению профессиональных знаний студентов по своей специальности и формированию системного представления об окружающем мире.

Для освоения настоящего пособия требуется предварительное выполнение компьютерного практикума или самостоятельное изучение учебного пособия [3], в котором рассматривается общее строение системы физических величин и закономерностей (ФВиЗ) и приобретает первичная практика пользования этой системой в области электромагнитных величин. Дополнительные сведения по системе ФВиЗ имеются в источниках [4, 5].

Практикум по изучению системы ФВиЗ предусматривает пользование специально разработанной электронной (компьютерной) программой. Инструкция пользователя данной программой [6] изучается при выполнении практикума.

Введение

Система ФВиЗ представляет собой LT – размерностное основание, в котором все ФВ могут быть выражены по размерности через *длину* и *время*. В размерностях системы СИ многие ФВ отличаются от их LT – размерностного представления на тот или иной дополнительный размерностный сомножитель, которые положены в основу структурирования ФВ в систему ФВиЗ, оказывающейся многоуровневой (многослойной).

На рис. 1 представлена общая архитектура системы ФВиЗ. Системные уровни обозначены своими размерностными коэффициентами, содержащими коэффициенты G и k со своими степенными показателями. Физические величины определенного системного уровня, получая свое размерностное выражение в системе СИ, отличаются по размерности от их LT – представления на одинаковый размерностный сомножитель, что и определяет их принадлежность к тому или иному системному уровню.

Коэффициент G имеет размерность *гравитационной постоянной*, которая численно равна отношению инертной массы, измеряемой в килограммах к гравитационной массе, измеряемой в $\text{м}^3/\text{с}^2$. Коэффициент k – есть размерностное и числовое соотношение *массы* и *силы тока*. В данной системе ФВиЗ *масса* и *сила тока* при планарном (плоском)

изображении системных уровней располагаются в одной системной ячейке, их численное соотношение приведено на рис. 1. Линии на рис. 2 обозначают системные размерностные связи ФВ, участвующих в закономерных связях ФВ этих уровней.

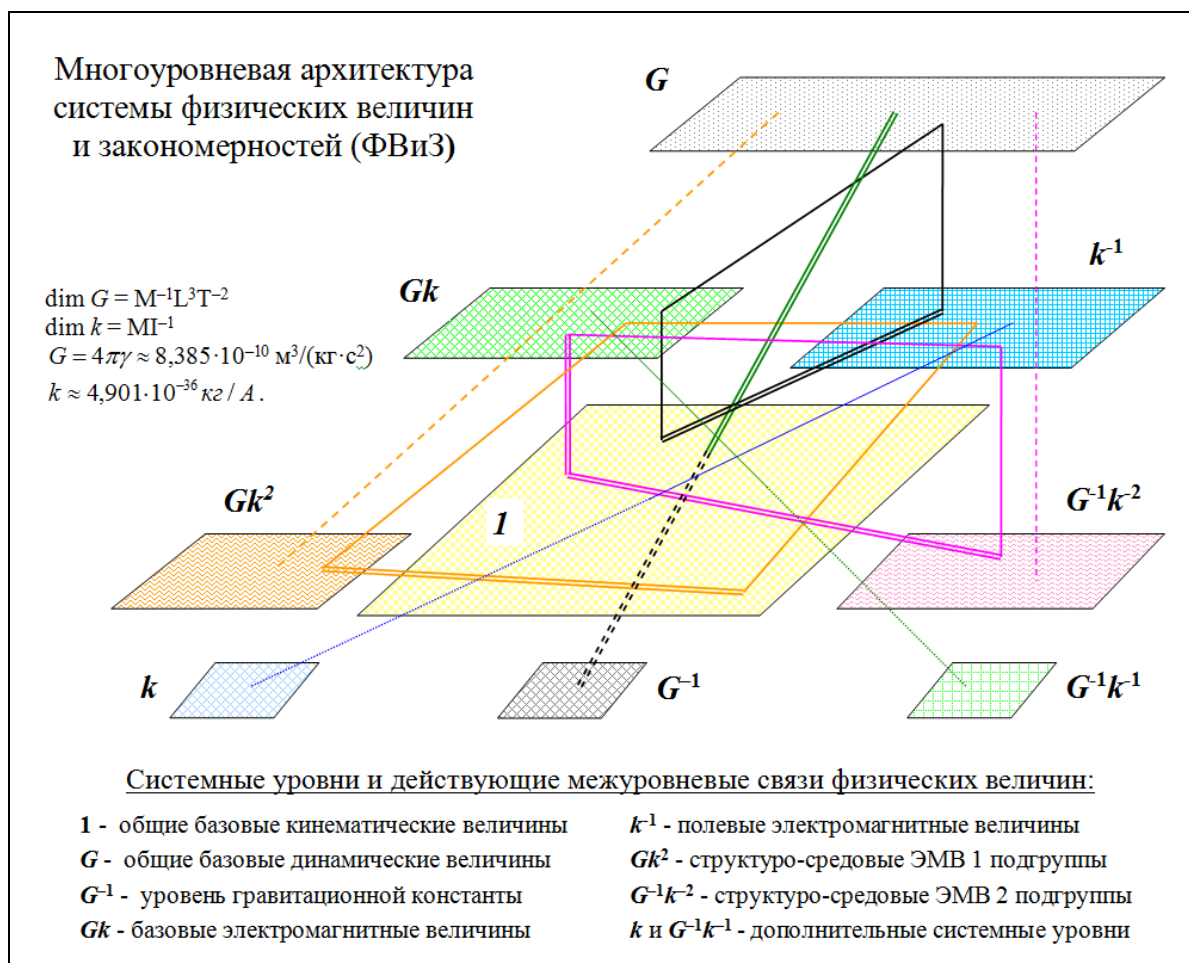


Рис.1. Архитектурное изображение системы ФВиЗ

1 Теоретическая часть

1.1 Системное представление тепловых и излучательных физических величин

На рис. 2 представлено планарное изображение системы ФВиЗ с преимущественным изображением тепловых и излучательных величин, изучение физики которых явилось прологом зарождения и становления современной квантовой физики. Для работы в компьютерной программе следует использовать файл ТЕПЛОТА.lts, соответствующий данному изображению. Основные формулы, используемые в разделе, приведены на рис. 2.

Интегральной характеристикой теплового излучения является *излучательная* (по иному, испускательная) *способность* тела или *энергетическая светимость* R . Слово интегральная означает *излучательная способность* (далее *излучательность*) во всем диапазоне частот или длин волн, соответствующих тепловому излучению.

$$R = \int_0^\infty r_{\omega,T} d\omega; \quad R = \int_0^\infty r_{\lambda,T} d\lambda.$$

Физический смысл *излучательности* – энергия, испускаемая в единицу времени единицей площади излучающего тела. Под интегральные величины $r_{\omega,T}$ и $r_{\lambda,T}$ представляют собой *спектральные* (по частоте и длине волны) *плотности излучательности*. Их соотношение $r_{\omega,T} d\omega = r_{\lambda,T} d\lambda$.

Система ФВиЗ с участием тепловых и излучательных величин

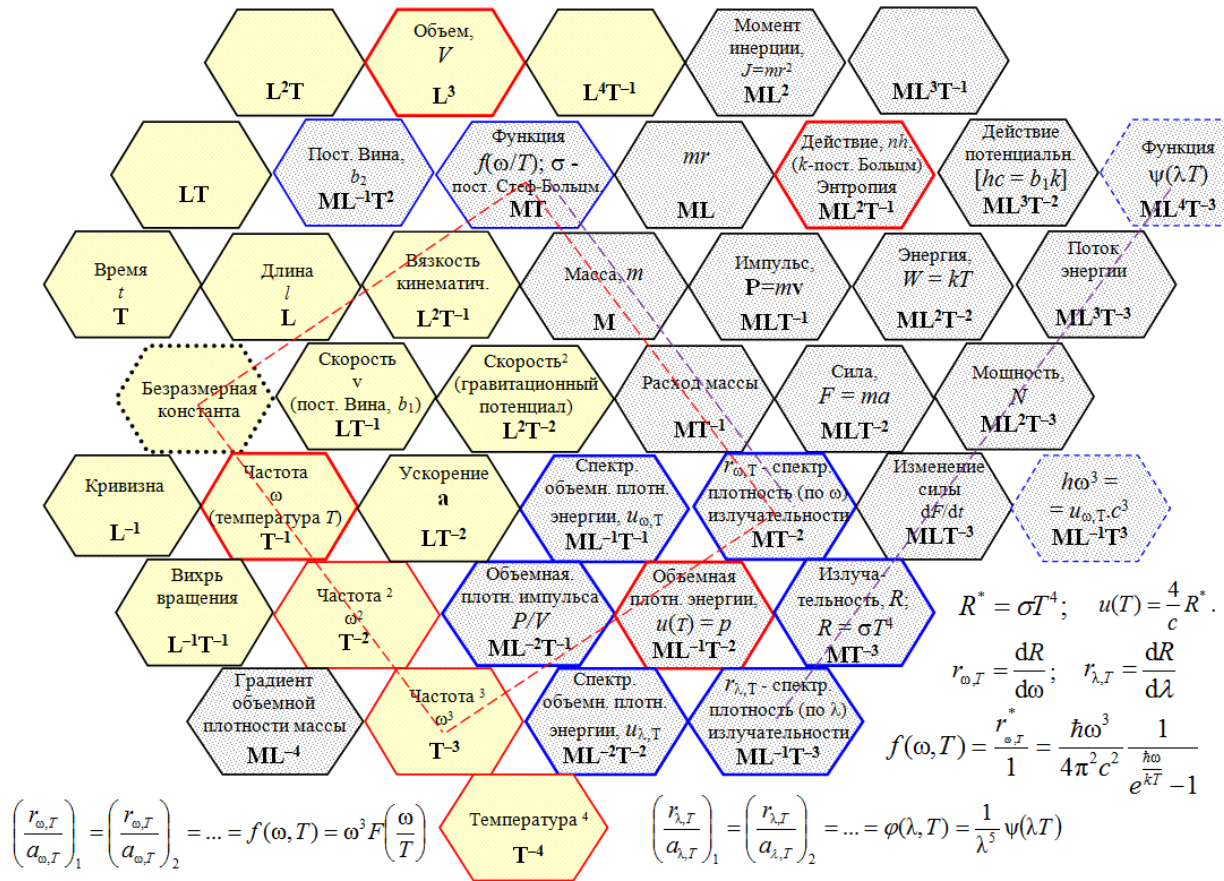


Рис. 2. Система ФВиЗ применительно к сфере тепловых и излучательных величин

Особенностью этой части системы ФВиЗ является назначение размерности *температуры* такой же как и у *частоты*. Оправданность этого будет ясна из дальнейшего изложения материала.

Основные ФВ связанные с температурой это энергия – W , энтропия – S , теплоемкость – C , постоянная Больцмана – k , изучение которых проводилось в разделах молекулярной физики и термодинамики. В разделе квантовой физики используются новые ФВ: интегральная и дифференциальные излучательности, приводимые выше, *постоянные Вина* – b_1 и b_2 , *постоянная Стефана-Больцмана* – σ , другие величины.

Теперь о размерности *температуры*. Приводимые на рис. 2 дифференциальные соотношения функций Кирхгофа

$$\left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_1 = \left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_2 = \dots = f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}}\right)_1 = \left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}}\right)_2 = \dots = \varphi(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} \psi(\lambda T)$$

при интегрировании по соответствующей переменной приводят к закону Стефана-Больцмана $R^* = \sigma T^4$ с показателем степени 4 при *температуре*. Таким образом, линейка рядом стоящих показатели степеней 3, 4 и 5 при ω , T и λ , а также известное соотношение $\lambda = 2\pi c / \omega$ прямо указывают на совпадение размерностей *температуры* и *частоты*.

Наряду с изучением теплового излучения, историческое становление квантовой физики было связано и с достижениями в изучении оптического и еще более высокочастотных спектров излучений. Это направление физики, в конце концов, вылилось в теорию атомарного строения веществ, получившей большое практическое применение.

Частотный спектр оптических излучений и поглощений атомов определяется в виде разности (биения) целочисленно кратных частот с квадратичной зависимостью межинтервальных значений

$$\omega = R_{\omega} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{m_e c^2 \alpha^2}{2\hbar} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) = T_n - T_k.$$

То же самое соотношение в представлении через длину волны имеет вид:

$$\frac{1}{\lambda_{n-k}} = R_{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{m_e c \alpha^2}{2h} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{\alpha^2}{2\lambda_K} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right).$$

Частотная постоянная Ридберга R_{ω} и длинноволновая постоянная R_{∞} , присутствующие в этих выражениях, тесно связаны с параметрами электрона и атомными константными величинами, среди которых оказываются: классический радиус электрона – r_e , радиус Бора – a_0 и комптоновская длина волны электрона $\lambda_K = \frac{h}{m_e c}$, при участии постоянной тонкой структуры α и скорости света c .

Длинноволновая постоянная Ридберга определяется соотношением $R_{\infty} = \frac{m_e c \alpha^2}{2h}$. С частотной постоянной $R_{\omega} = \frac{m_e q_e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^3} = \frac{m_e c^2 \alpha^2}{2\hbar}$ у нее связь такая же, как связь частоты с обратной длины волны ($R_{\omega} = 2\pi c R_{\infty}$). Линейка атомных константных величин с размерностью *длины* (в порядке их возрастания) выглядит так:

$$r_e = \alpha^2 a_0; \quad \lambda_K = a_0 \cdot 2\pi \cdot \alpha; \quad a_0 = \alpha / (4\pi R_{\infty}); \quad R_{\infty}^{-1} = 2\lambda_K / \alpha^2.$$

Таким образом, постоянная тонкой структуры α является важнейшей константой физического мира, вопрос о ее происхождении до сих пор является дискуссионным.

Если атомные величины выразить через наблюдаемую в опытах комптоновскую длину волны λ_K , то их последовательность в порядке возрастания примет такой вид:

$$r_e = \frac{\lambda_K \alpha}{2\pi}; \quad \lambda_K = \frac{h}{m_e c}; \quad a_0 = \frac{\lambda_K}{2\pi \cdot \alpha}; \quad R_\infty^{-1} = \frac{2\lambda_K}{\alpha^2}.$$

1.2 Системные представления физических величин, используемых в квантовой волновой механике

Изучение данного раздела курса физики предусматривает знакомство с квантовой оптикой, в которую входят спектральные законы оптических излучений, фотоэффект, эффект Комптона и соотношение неопределенностей Гейзенберга. Как показывают последние формулы эти разделы тесно связаны с предшествующим учебным разделом физики – электродинамикой. Поэтому наиболее подходящие изображения системы ФВиЗ для изучения данной раздела квантовой физики это изображения с участием электромагнитных величин и размерностей ФВ. Они приведены на рис. 3 и других подобных изображениях.

ВОЗМОЖНЫЕ СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ В ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМЕ

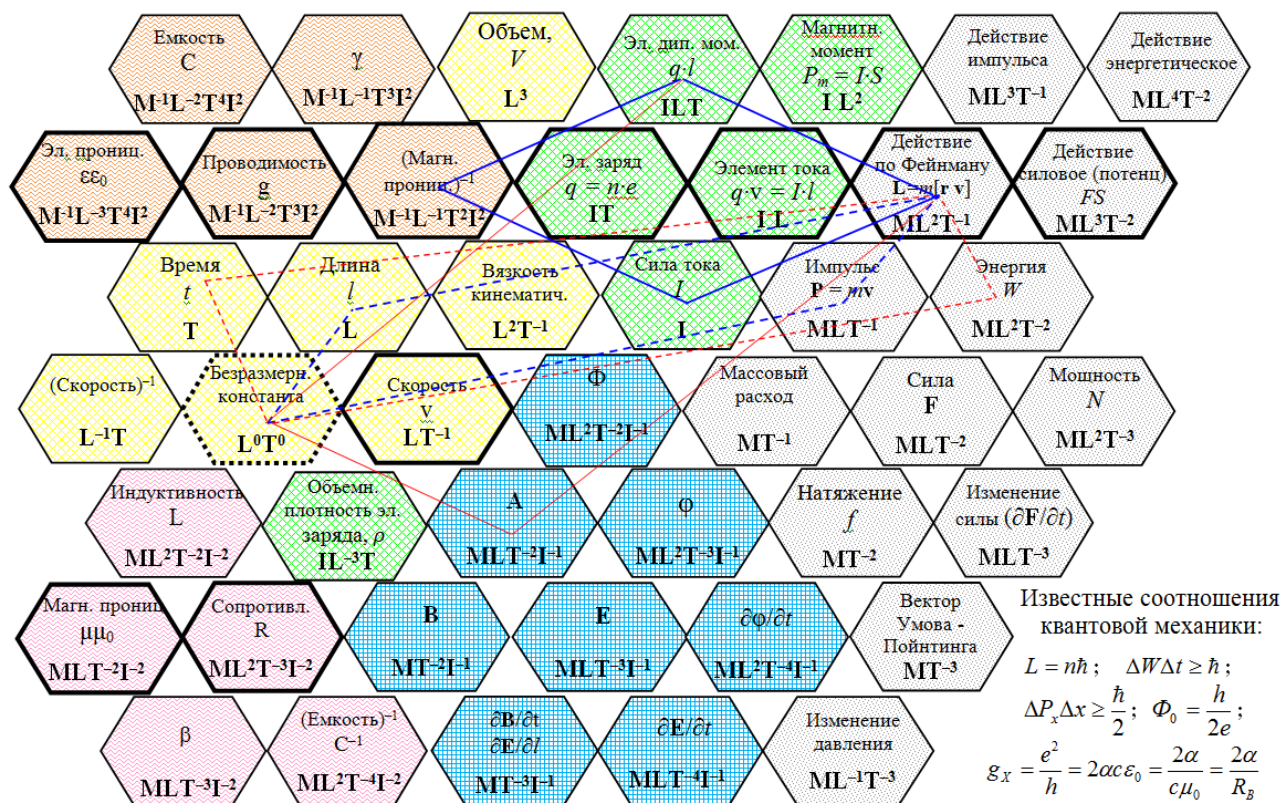


Рис. 3. Известные в квантовой механике и возможные соотношения неопределенностей

На этом рисунке изображены известные в квантовой механике соотношения неопределенностей с участием постоянной Планка. Приводятся также возможные (по системе ФВиЗ) соотношения с участием постоянной Планка и электромагнитных величин.

Студентам рекомендуется попробовать самим самостоятельно поискать в системе ФВиЗ другие подобные размерностные соотношения с участием постоянной Планка.

Физические величины и соотношения, встречающиеся в уравнениях Шрёдингера.

Планарное изображение системы ФВиЗ наиболее подходящее для вузовского курса квантовой (волновой) механики Шрёдингера не содержит электромагнитных величин. Такое изображение показано на рис. 4а.

СИСТЕМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ И СВЯЗАННЫХ С НЕЙ ВЕЛИЧИН

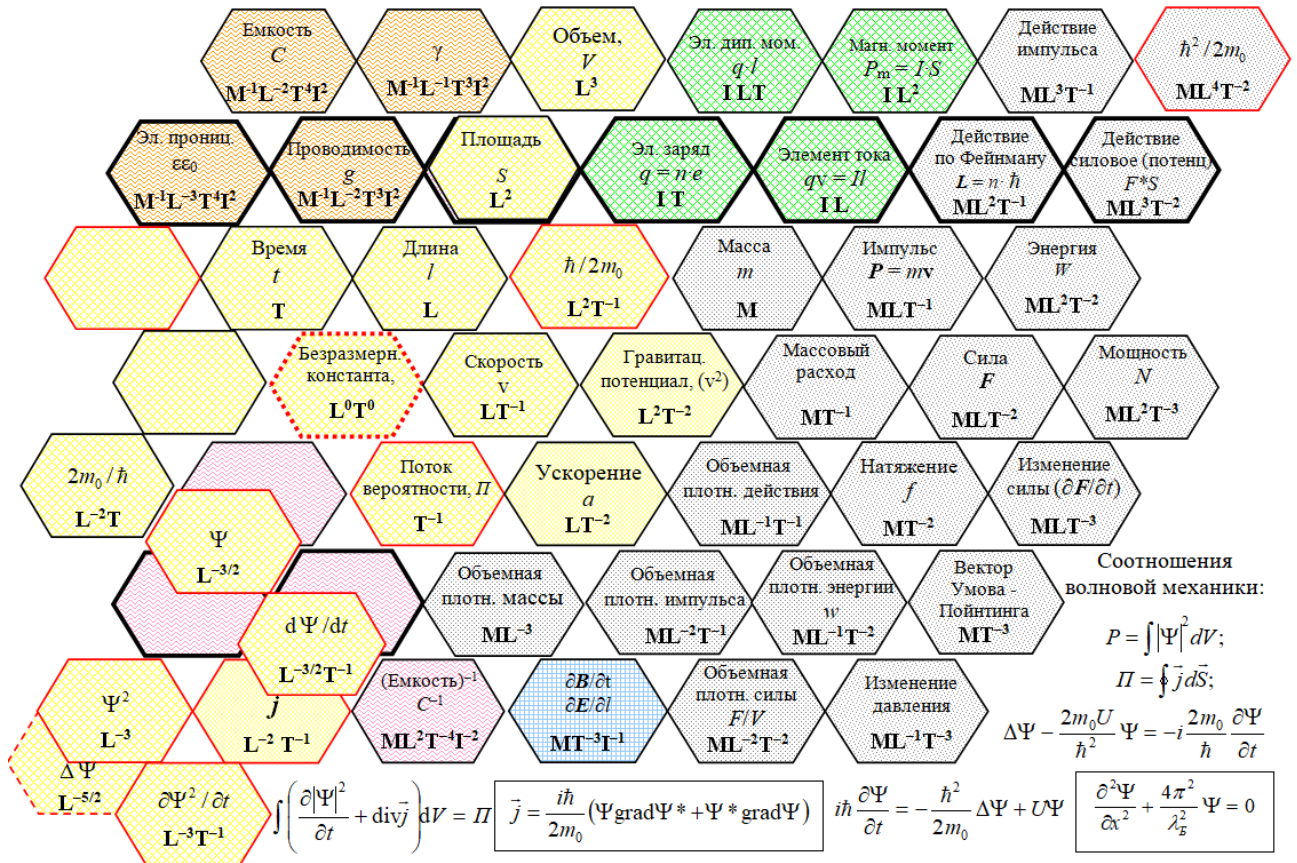


Рис. 4а. Физические величины и соотношения квантовой волновой механики

ФВ, относящиеся к электромагнитным величинам на рис. 4 показаны лишь частью, поскольку в вузовском курсе квантовой волновой механики они обычно не фигурируют.

В этом разделе особый интерес представляют следующие специфические величины волновой механики: волновая функция Ψ , здесь она трехмерная; квадрат волновой функции Ψ^2 ; плотность потока вероятностей $\vec{j} = \frac{\Pi}{S} \vec{n}$, а также физические величины $\frac{\hbar}{2m_0}$ и $\frac{\hbar^2}{2m_0}$.

На рис. 4б приведен другой вариант изображения системы ФВиЗ с показом ФВ, связанных с волновой функцией.

СИСТЕМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ И СВЯЗАННЫХ С НЕЙ ВЕЛИЧИН

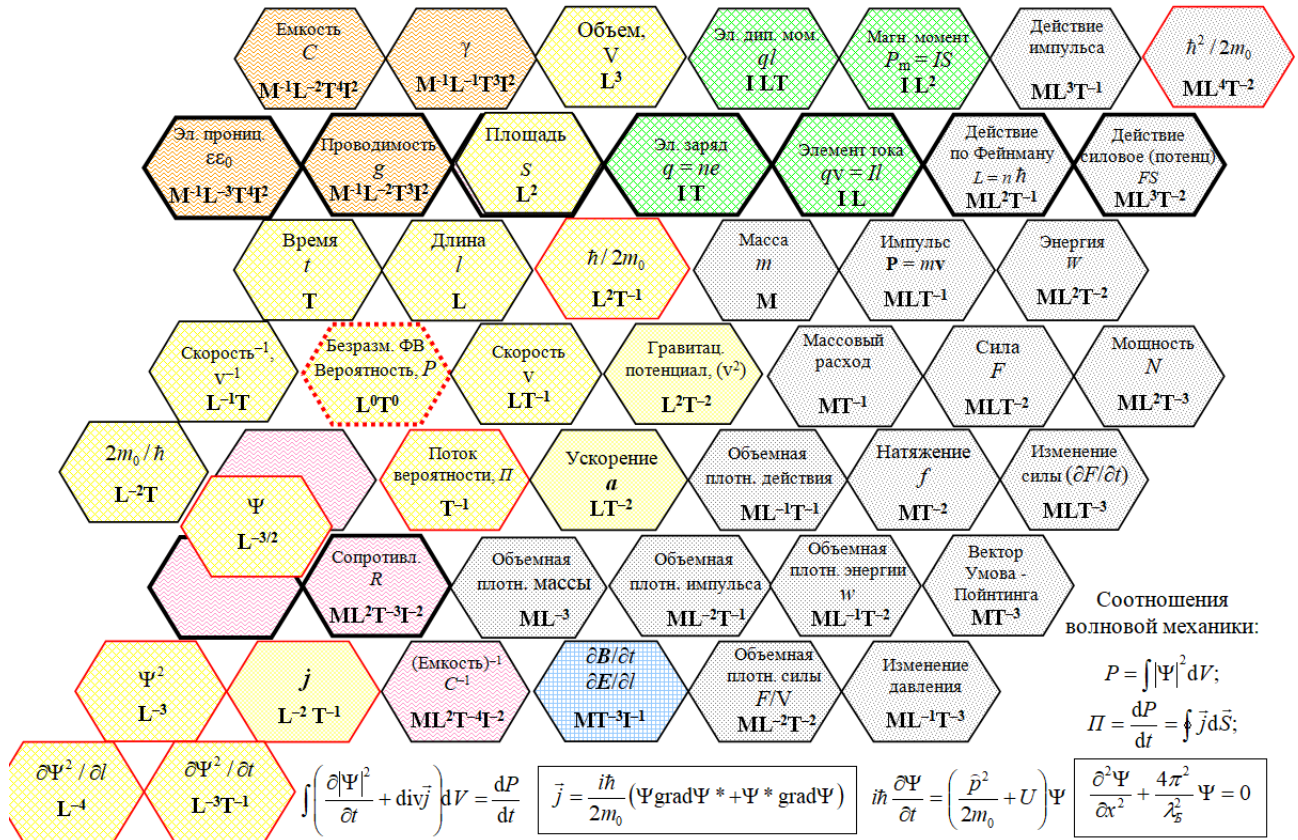


Рис. 46. Физические величины и соотношения квантовой волновой механики

1.3 Системные представления квантуемых и константных физических величин, принадлежащих сфере электромагнетизма

С практической точки зрения наиболее важным является изучение с системных позиций большой совокупности ФФК или квантуемых и константных величин (ККВ). Системное структурирование ФВ с выделением в системе ФВиЗ особой группы ККВ можно было заметить еще при изучении электромагнитных величин. Большинство ККВ относятся именно к этой сфере. Данный раздел посвящен именно этой группе величин.

На рис. 5 приведено упрощенное (скелетное) изображение системы ФВиЗ с участием электромагнитных величин, относимых к ККВ (ФФК). Шестигранниками обозначены ФВ, содержащие постоянную Планка и безразмерные величины. Эти величины можно назвать опорными или реперными для системы ФВиЗ, их местоположение неизменно для любых вариантов представления этой системы. Большими кружками обозначены квантуемые ФВ: *электрический заряд, магнитный поток, электрическое сопротивление и проводимость*. Рядом расположенные с ними ФВ, обозначенные малыми кружками, – это константные величины. Местоположение электромагнитных ККВ в системе ФВиЗ неоднозначно, оно зависит от выбора размерности одной из электромагнитных величин и ее места размещения относительно ФВ, обозначенных шестигранниками. Приводимый вариант размещения

электромагнитных ФВ в системе ФВиЗ, если не самый истинный, то уж смело можно утверждать, он наиболее подходящий для учебных целей [4].

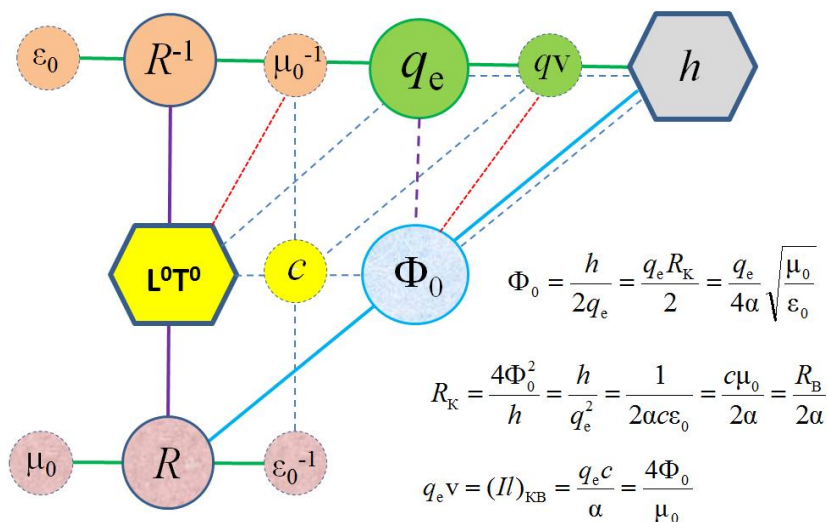


Рис. 5. Скелетное изображение системы ФВиЗ с участием ККВ

На рис. 6 приведена аналогичная схема с участием механической константной величины (ml) и некоторыми системными связями, которые на рис. 5 не видны или не обозначались.

На рис. 6 на месте *линейного элемента тока* присутствует механическая величина – произведение *массы* на *длину*. Оказывается это соотношение тоже константное, оно едино для всех микрочастиц ($ml = 3,786 \cdot 10^{-41}$ кг·м). В качестве *длины* для микрочастиц в этом соотношении выступает их комптоновская длина волны. Истинность приводимого числового значения не вызывает сомнений поскольку оно соответствует известной комптоновской длине волны микрочастиц, равной отношению постоянной Планка к скорости света.

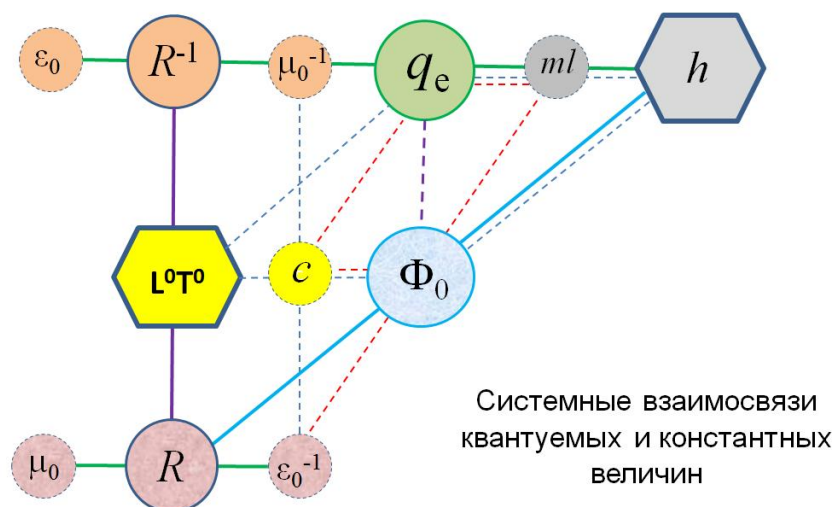


Рис. 6. Скелетное изображение системы ФВиЗ с участием ККВ

Верхний горизонтальный ряд ККВ на рис. 5 и рис. 6 показан в трехцветном исполнении и в этом заключен определенный смысл. На рис. 7 показан тот же ряд ККВ, обозначенных сплошной утолщенной окантовкой. Другие ККВ, включая скорость света, которые расположены вне основного системного ряда, обозначены на этом рисунке пунктирной утолщенной окантовкой.

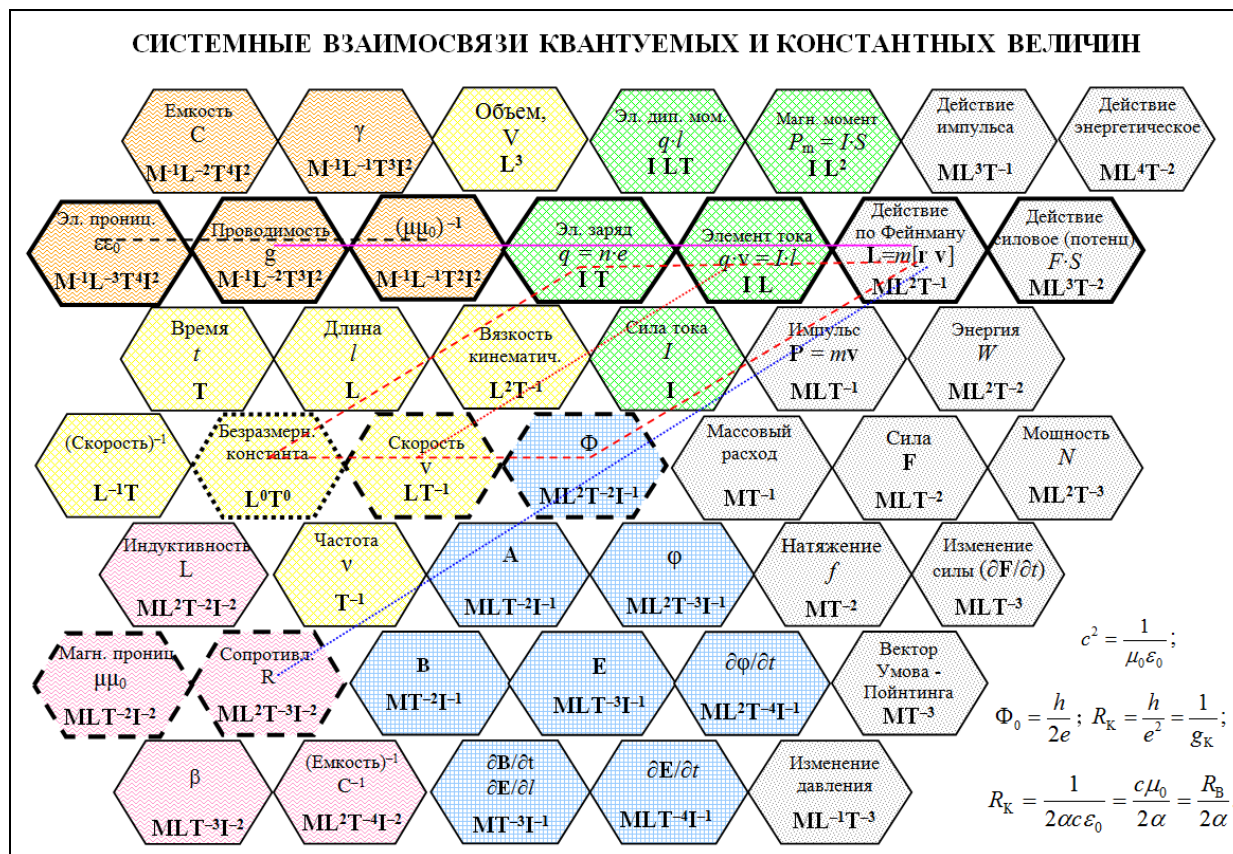


Рис. 7. Системное расположение ККВ в системе ФВиЗ в планарном исполнении

ФФК, образуемые тем или другим способом в системе ФВиЗ основной системный ряд ККВ, в системе СИ имеют следующие обозначения и числовые значения (жирным шрифтом выделены значения, принятые в СИ константными с 20.05 2019 г., а также определяемые ими; ранее константной величиной была принята только *скорость света*):

ϵ_0 – электрическая проницаемость вакуума (электрическая постоянная), $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 \cdot c^2)$;

μ_0 – магнитная проницаемость вакуума (магнитная постоянная), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м;

R_K – постоянная фон Клитцинга, $R_K = h/e^2 = \mathbf{25812,80746}$ Ом. С этим значением связано сопротивление вакуума, $R_B = 2\alpha R_K = c\mu_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377$ Ом;

α – постоянная тонкой структуры, $\alpha = 1/137,0359992$;

q_e (иное обозначение e) – заряд электрона, $q_e = \mathbf{1,602176634} \cdot 10^{-19}$ Кл;

$(I)_{KB}$ – линейный элемент тока (предположительно квантуемая величина);

h – постоянная Планка, $h = \mathbf{6,62607015} \cdot 10^{-34}$ Дж·с;

Π – *потенциальное действие* (по размерности произведение hc или *сила на площадь*);

Кроме обозначенных ККВ основного системного ряда, в определяющих уравнениях и уравнениях связи с их участием используются и другие величины, зачастую тоже относимые к ФФК. В первую очередь к ним относятся:

c – *скорость света*, $c = 299792458$ м/с;

$\Delta\nu_{Cs}$ – *частота сверхтонкого перехода основного состояния атома цезия*, утвержденная в СИ в качестве базовой частоты, определяющей *единицу времени*.

$\Delta\nu_{Cs} = 9192631770$ Гц, отсюда $1 \text{ с} = 9192631770$ периодов колебаний этой частоты;

Φ_0 – *квант магнитного потока*, $\Phi_0 = h/(2e) = 2,067833848 \cdot 10^{-15}$ Вб;

K_J – *величина, обратная Φ_0 (постоянная Джозефсона)*. $K_J = 4,835978484 \cdot 10^{14}$ Гц/В,

а также:

m_e – *масса электрона*, $m_e = 9,1093897(54) \cdot 10^{-31}$ кг;

λ_K – *комптоновская длина волны электрона*, $\lambda_K = \frac{hc}{m_e c^2} = 2,42631058(22) \cdot 10^{-12}$ м;

R_∞ – *постоянная Ридберга*, $R_\infty = m_e c \alpha^2 / (2h) = \alpha^2 / (2\lambda_K) = 10973731,534(13) \text{ м}^{-1}$;

a_0 – *радиус Бора*, $a_0 = \alpha / (4\pi R_\infty) = \lambda_K / (2\pi\alpha) = 0,529177249(24) \cdot 10^{-10}$ м;

r_e – *классический радиус электрона*, $r_e = \alpha^2 a_0 = 2,81794092(38) \cdot 10^{-15}$ м;

G – *гравитационная постоянная*, $G = 6,6742(10) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{с}^2 \text{ кг})$.

Имеются и другие ФВ, относимые к ККВ (по иному, ФФК).

Рис. 4, рис. 5 и последующие рисунки иллюстрируют, что ФФК связаны между собой закономерными соотношениями, которые легко обнаруживаются в системе ФВиЗ как системные размерностные соотношения (в виде выделенных параллелограммов и линий). На этом и других подобных плоских (планарных) изображениях системы ФВиЗ заметно выделяется основной системный ряд ККВ в виде горизонтально расположенных ячеек, обозначенных на рис. 7 утолщенной окантовкой.

Вне обозначенного основного системного ряда ККВ расположены еще несколько ФВ, которые тоже можно отнести к ФФК. На рис. 7 они обозначены утолщенной пунктирной окантовкой системных ячеек. Две из этих ФВ (*магнитная проницаемость* и *сопротивление*) по размерности обратны ФФК, входящим в основной системный ряд ККВ. *Скорость* сама по себе содержит константную величину (скорость света), а квантуемость *магнитного потока*, возможно, обусловлена квантуемостью замкнутых линейных элементов тока ($qv = \Pi$)_{КВ} или квантуемостью *потока намагниченности* ($\Phi_J = JS$). (Последняя ФВ предполагаемая, ее размерность и расположение в системе, идентичны с *элементом тока*).

На рис. 7 приведена часть формул основных соотношений ККВ и их системные изображения. Горизонтальной пунктирной линией в основном системном ряду ККВ обозначена взаимосвязь электрической и магнитной постоянных через скорость света и волновое сопротивление вакуума R_B .

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}; \quad R_B = \frac{1}{g_B} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \text{ Ом.}$$

Параллельная линия красного цвета, проходящая по тому же системному ряду обозначает связь постоянной Клитцинга (R_K) с постоянной Планка и зарядом электрона

$$R_K = \frac{h}{q_e^2} = \frac{1}{g_K}.$$

Наклонная точечная линия синего цвета визуализирует эту же закономерность.

Выделенный параллелограмм, обозначенный красными пунктирными линиями, иллюстрирует системную связь кванта магнитного потока Φ_0 с другими ФФК

$$\Phi_0 = \frac{h}{2q_e}.$$

Посередине этого выделенного параллелограмма проведена сплошная линия красного цвета, которая обозначает существование объективных физических связей ФВ «Элемент тока», имеющего размерность LI, с элементарным электрическим зарядом q_e и квантом магнитного потока Φ_0 . Ввиду своего системного расположения ФВ элемент тока должен быть квантуемой или константной величиной. Наиболее вероятное значение кванта элемента тока, определяемого системой ФВиЗ, следующее [5]:

$$(II)_{KB} = \frac{q_e c}{\alpha} = 6,8521 \cdot 10^{-9} \text{ Ам.}$$

Здесь $q_e = e$ – заряд электрона; c – скорость света; α – постоянная тонкой структуры.

Ожидаемая системная и числовая связь кванта элемента тока с квантом магнитного потока определяется выражением [5]

$$\Phi_0 = \mu_0 \frac{(II)_{KB}}{4}.$$

Квант магнитного потока в рассматриваемой системе ФВиЗ занимает практически центральное место, что наглядно иллюстрирует рис. 8. Системная связь, обозначенная на этом рисунке в форме прямоугольника, показывает закономерное соотношение кванта магнитного потока, элементарного электрического заряда и проводимости g_K , величины

обратной постоянной Клитцинга. В системной связи по типу пропорции участвует безразмерная постоянная с числовым значением 1/2.

$$\Phi_0 = \frac{q_e}{2g_K}.$$

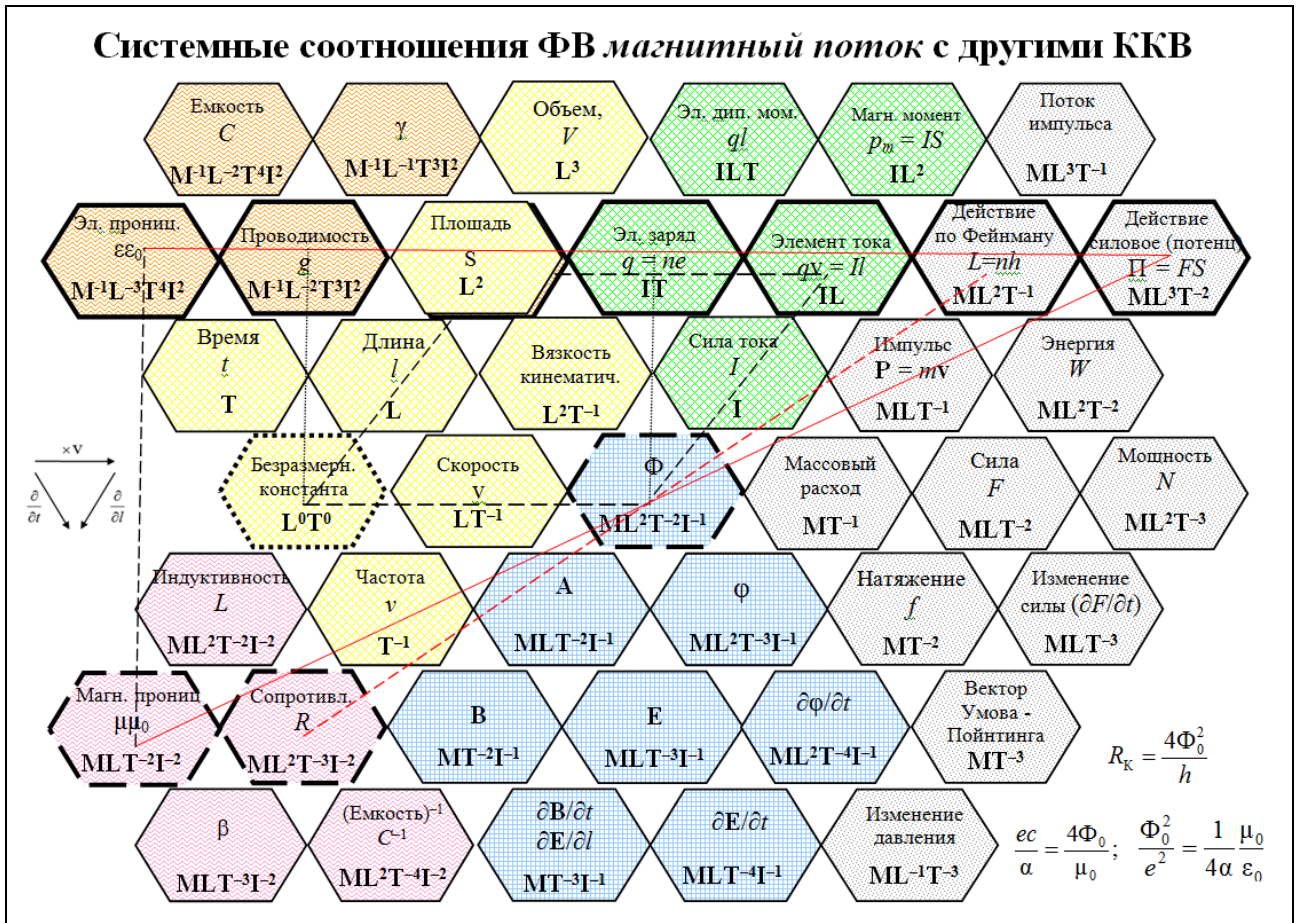


Рис. 8. Системные связи с участием квантуемых и константных величин (ККВ)

На следующем рис. 9 приведена квантовая закономерность, именуемая нестационарным эффектом Джозефсона. Формульное выражение этой закономерности

$$\frac{h}{2q_e} = \frac{\Delta\varphi}{\nu}.$$

Здесь $\Delta\varphi$ – разность электрических потенциалов на джозефсоновском переходе (изоляторе между двумя сверхпроводящими контактами); ν – частота излучаемых фотонов.

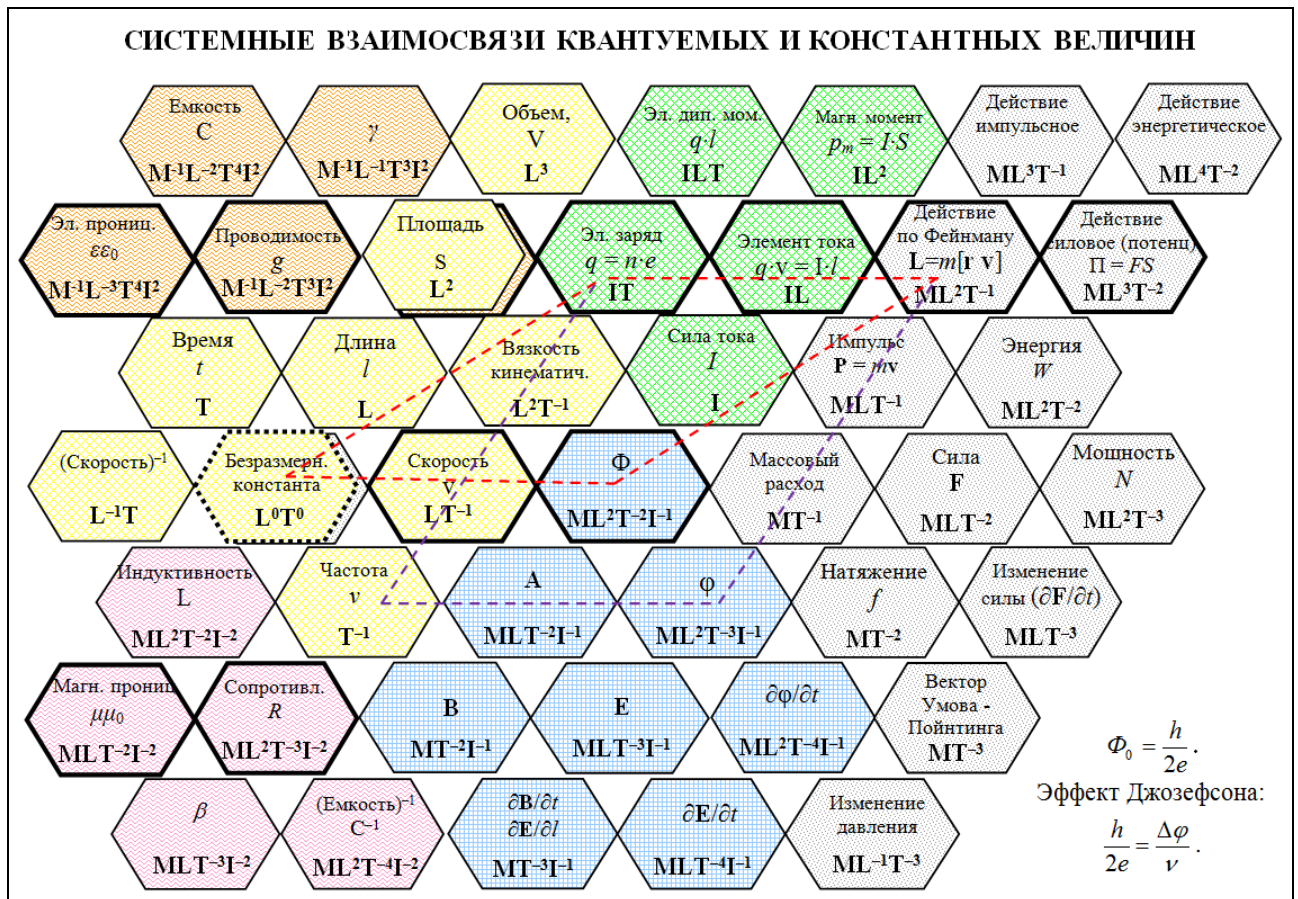


Рис. 9. Соотношения для кванта магнитного потока и эффекта Джозефсона

Поскольку все ФФК оказываются тесно увязанными друг с другом, то зная или задаваясь точными числовыми значениями для одной или двух из них, удастся сравнительно точно вычислить числовые значения для остальных. При этом возникает возможность определения основных единиц (как в СИ, так и в других системах единиц) через ФФК или через другие ФВ, единицы измерения которых устанавливаются точными значениями [2]. В системе СИ эта возможность после многолетних обсуждений была реализована в 2019 году. В результате этого единица измерения массы – килограмм был переопределен через постоянную Планка и электрические величины.

При назначении точных числовых значений каким-либо ФФК очень важным является правильный выбор их исходных значений или единиц измерения. Совершенный выбор единицы измерения любой ФФК становится определяющим и для других. Например, используемая в настоящем практикуме система ФВиЗ, основанная на LT -системе с размерностью электрического заряда L^3T^{-1} , в одной из возможных своих модификаций становится близка планковской системе единиц [2], где элементарный электрический заряд и скорость света приняты единичными. Эта система получила наименование «Естественной кинематической системы размерностей» (ЕКСП) [3].

Каковы будут числовые значения ФФК, принадлежащих основному системному ряду в различных системах единиц, включая ЕКСР, показано в табл. 2.

Таблица 2. Числовые значения ФФК в различных вариантах систем единиц.

Числовые значения квантов физических величин в LT -системе размерностей для соотношения $q_e \mu_0 = c \alpha^{-1}$

Наименование кванта физической величины	Значение при $q_e = \frac{4\pi m_e r_e \alpha}{c}$	Значение при $q_e = \frac{m^6}{c^4}$	Значение при $l_0 = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м}$ $t_0 = 1 \text{ с}$	Значение при $l_0 = 1 \text{ м}$ $t_0 = 1/2,99792458 \cdot 10^8 \text{ с}$	Числовое значение при $l_0 = 1,481936667 \cdot 10^{-36} \text{ м}$ $t_0 = 4,943208636 \cdot 10^{-45} \text{ с}$
Квант потенциального действия, Π_0	$2,899 \cdot 10^{-27} \text{ Дж} \cdot \text{м}$	$2,431 \cdot 10^{-36} \frac{\text{м}^6}{\text{с}^4}$	$\Pi_1 = 2,705 \cdot 10^{-53}$	$\Pi_2 = 3,009 \cdot 10^{-70}$	$\frac{1}{\alpha}$
Постоянная Планка, \hbar	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$	$5,556 \cdot 10^{-43} \frac{\text{м}^5}{\text{с}^3}$	$\frac{\Pi}{2\alpha}$, размерность $\frac{\text{Л}^3}{\text{Т}^3}$	$\frac{\text{Л}^3}{\text{Т}^3}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$
Квант линейного элемента тока, $(I)_{\text{кв}}$	$3,226 \cdot 10^{-45} \text{ А} \cdot \text{м}$	$2,705 \cdot 10^{-54} \frac{\text{м}^4}{\text{с}^2}$	Π , размерность $\frac{\text{Л}^4}{\text{Т}^2}$	$\frac{\text{Л}^4}{\text{Т}^2}$	$\frac{1}{\alpha}$
Элементарный электрический заряд, q_e	$7,852 \cdot 10^{-55} \text{ Кл}^*$	$6,584 \cdot 10^{-64} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$	$\Pi \alpha$, размерность $\frac{\text{Л}^3}{\text{Т}}$	$\frac{\text{Л}^3}{\text{Т}}$	1
(Магнитная постоянная) ⁻¹ , μ_0^{-1}	$1,911 \cdot 10^{-65} \frac{\text{м}}{\text{Гн}^*}$	$1,603 \cdot 10^{-74} \text{ м}^2$	$\Pi \alpha^2$, размерность Л^2	Л^2	α
(Постоянная Клингнга) ⁻¹ , R_K^{-1}	$9,305 \cdot 10^{-76} \text{ Ом}^* \cdot \text{с}^{-1}$	$7,802 \cdot 10^{-85} \text{ м} \cdot \text{с}$	$\Pi 2\alpha^3$, размерность LT	LT	$2\alpha^2$
Электрическая постоянная, ϵ_0	$2,127 \cdot 10^{-82} \frac{\Phi^*}{\text{м}}$	$1,783 \cdot 10^{-91} \text{ с}^2$	$\Pi \alpha^2$, размерность Т^2	Т^2	α

В начальных столбцах табл. 2 приведены значения ФФК для двух систем единиц очень похожих на систему СИ. В первом столбце исходным значением системного ряда ФФК принято известное (до 2019 г.) числовое значение в СИ постоянной Планка. При этом соблюдено системное соотношение базовой LT -размерностной системы $q_e \mu_0 = c/\alpha$. Во втором столбце приведены числовые значения ФФК той же системы, преобразованной в «метр-секундное» LT -размерностное представление. В этих условиях числовое значение ϵ_0 , которое расположено на другом конце основного системного ряда ККВ, оказывается порядка 10^{-82} и 10^{-91} . Понятно, что с такими числовыми значениями ФФК и разбросом этих значений работать очень неудобно.

В последующем двоекном столбце табл. 2 показано как изменяются числовые значения основного системного ряда ККВ приводимых LT -размерностных систем, если единицей *длины* принять метр или единицей *времени* принять секунду, а сопряженную с ними ФВ увязать со скоростью света. Числовые значения ККВ, включая квант *потенциального действия* Π_0 , в этих вариантах оказываются различными, но они обязательно включают в себя значения, соответствующие последнему столбцу табл. 2, то есть, варианту ЕКСР.

Таким образом, данные таблицы 2 иллюстрируют, что выбором числовых значений единиц измерения *длины* и *времени* в LT -системе размерностей можно добиться такого

положения, что все ККВ основного системного ряда получают числовые значения, определяемые лишь постоянной тонкой структуры α . Это и достигнуто в ЕКСР.

Интересно, что в системе ЕКСР обнаруживается токовая сущность и единство трех главных силовых физических взаимодействий, что показано в табл. 3

Таблица 3.

Основные силовые взаимодействия в ЕКСР

Наименование силового взаимодействия	Взаимодействующие физические величины		LT -размерность величин	Уравнение связи, определяющее силу взаимодействия
	по заряду	по току		
Электростатическое	q	It	L^3T^{-1}	$F = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{(It)_1 (It)_2}{4\pi r^2}$
Электродинамическое	qv	I	L^4T^{-2}	$F = \mu_0 \frac{(qv)_1 (qv)_2}{4\pi r^2} = \mu_0 \frac{(I)_1 (I)_2}{4\pi r^2}$
Гравитационное	q/t	I	L^3T^{-2}	$F = \frac{I_1 I_2}{4\pi r^2}$

На рис. 10 в табличной форме приведены значения в ЕКСР для основного системного ряда ККВ и значения для их ближайших соотношений. Очевидна симметрия этих соотношений, переходящая, если так можно выразиться и «на отношения отношений».

Числовые соотношения в системном ряду ФФК (в значениях ЕКСР)

Электрич. постоянная	(Постоянная Клитцинга) ⁻¹	(Магнитная постоянная) ⁻¹	Элементарн. электр. заряд	Квант элемента тока	Постоянная Планка	Квант потенц. действия
ϵ_0	$(R_K)^{-1}$	$(\mu_0)^{-1}$	q_e	$\frac{q_e c}{\alpha}$	h	$\Pi = \frac{q_e^2}{\epsilon_0}$
α	$2\alpha^2$	α	1	α^{-1}	$(2\alpha^2)^{-1}$	α^{-1}
$2\alpha c$	$\frac{c}{2\alpha}$	$\frac{c}{\alpha}$	$\frac{c}{\alpha}$	$\frac{c}{2\alpha}$	$2\alpha c$	

Рис. 10. Соотношения числовых значений ККВ в ЕКСР

Аналогичная таблица, соответствующая действующей системе СИ показана на рис. 11. Оказывается, что в СИ основной системный ряд ККВ (которые, в числовой форме на рис. 11 не приводятся, но тоже в большинстве своем, оказываются связанными через скорость света) имеет два «разрыва», обозначаемые на рисунках сменой цвета заливки последовательно расположенных (по горизонтали) ячеек с ФВ.

Соотношения в системном ряду ФФК (в значениях СИ)

Электрич. постоянная	(Постоянная Клитцинга) ⁻¹	(Магнитная постоянная) ⁻¹	Элементарный электрич. заряд	Квант элемента тока	Постоянная Планка	Квант потенц. действия
ϵ_0	$(R_k)^{-1}$	$(\mu_0)^{-1}$	q_e	$\frac{q_e c}{\alpha}$	h	$\Pi = \frac{q_e^2}{\epsilon_0}$
$\frac{1}{R_k \epsilon_0} = 2\alpha c$	$\frac{R_k}{\mu_0} = \frac{c}{2\alpha}$	$q_e \mu_0 = \xi c / \alpha = 2,013355 \cdot 10^{-25}$	$\frac{c}{\alpha}$	$\frac{h\alpha}{q_e c} = \frac{\xi c}{2\alpha}$	$\frac{q_e^2}{\epsilon_0 h} = 2\alpha c$	

Рис.11. Числовые значения ККВ и их соотношения в СИ

«Разрывы» на рис. 11, в отличие от *LT*-размерностного варианта рис. 10 (это парные соотношения между значением μ_0^{-1} и элементарным электрическим зарядом q_e , а также между «квантом элемента тока» и постоянной Планка h) дополнительно обусловлены особым соотношением в СИ единиц измерения *массы* и *силы тока*. Данное соотношение определяется выражением, состоящим опять же из ККВ. В СИ это соотношение $\xi = \alpha q_e \mu_0 / c$ приблизительно равно $4,901 \cdot 10^{-36}$ А/кг. В вариантах *LT*- систем табл. 2 оно единичное.

Таким образом, рис. 11 иллюстрирует, что в системе ФВиЗ, построенной на размерностях и единицах СИ, электромагнитные величины разных системных групп (а также и их отношения) в отличие от *LT*-размерностного варианта (см. рис. 10) содержат дополнительный размерностный сомножитель, обусловленный отличием единиц измерения *массы* и *силы тока*. Если *масса* и *сила тока* измерялись бы в единицах ЕКСР, то известные силовые закономерности соответствовали бы табл. 3.

Наблюдаемые соотношения ФФК, расположенных в основном системном ряду ККВ и имеющих размерности СИ, приведены в табл. 4. По таблице, как и по ранее приводимым рисункам видно, что основной системный ряд ККВ подразделяется на три группы. Эти группы ККВ принадлежат более широким группам ФВ, отличающимся от их *LT*-размерностного представления на дополнительные размерностные коэффициенты Gk^2 , Gk и G , рассмотренные в учебном пособии по электромагнетизму [3].

Рис. 11 и табл. 4 иллюстрируют, что и в СИ, несмотря на принадлежность ФФК к разным системным группам, их последовательность вполне упорядочена. Выделенный горизонтальный ряд показывает выражение ККВ основного системного ряда через постоянную Планка и заряд электрона, принятые в 2019 году в СИ строго определенными по их числовому значению. Выражение постоянной структуры через эти значения следующее

$$\alpha = \frac{q_e^2 c \mu_0}{2h} = 7,297352565 \cdot 10^{-3}.$$

Обратное этому значение, более удобное для запоминания

$$\alpha^{-1} = 137,0359992 \approx 137,036.$$

Табл. 4.

Соотношения ККВ в основном системном ряду с участием скорости света c и постоянной тонкой структуры α

	$2\alpha c$	$\xi c / \alpha = q_e \mu_0$	$\xi c / 2\alpha = q_e \mu_0 / 2$				
	ε_0	R^{-1}	μ_0^{-1}	q_e	$(M)_{\text{КВ}}$	h	q_e^2 / ε_0
ε_0, h	ε_0	$2\alpha c \varepsilon_0$	$\varepsilon_0 c^2$	$\sqrt{\varepsilon_0 2\alpha c h}$	$\sqrt{\varepsilon_0 2c^3 h / \alpha}$	h	$2\alpha c h$
R, h	$(2\alpha c R)^{-1}$	R^{-1}	$\frac{c}{2\alpha R}$	$\sqrt{\frac{h}{R}}$	$\frac{c}{\alpha} \sqrt{\frac{h}{R}}$	h	$2\alpha c h$
μ_0, h	$(\mu_0 c^2)^{-1}$	$\frac{2\alpha}{\mu_0 c}$	μ_0^{-1}	$\sqrt{\frac{2\alpha h}{c \mu_0}}$	$\sqrt{\frac{2c h}{\alpha \mu_0}}$	h	$2\alpha c h$
q_e, h	$\varepsilon_0 = \frac{q_e^2}{2\alpha c h}$	$\frac{q_e^2}{h}$	$\frac{q_e^2 c}{2\alpha h}$	q_e	$q_e c / \alpha$	h	$2\alpha c h$
ε_0, q_e	ε_0	$2\alpha c \varepsilon_0$	$\varepsilon_0 c^2$	q_e	$q_e c / \alpha$	$\frac{q_e^2}{2\alpha c \varepsilon_0}$	$\frac{q_e^2}{\varepsilon_0}$
μ_0, q_e	$(\mu_0 c^2)^{-1}$	$\frac{2\alpha}{\mu_0 c}$	μ_0^{-1}	q_e	$q_e c / \alpha$	$\frac{q_e^2 c \mu_0}{2\alpha}$	$q_e^2 \mu_0 c^2$
R, q_e	$\frac{1}{2\alpha c R}$	R^{-1}	$\frac{c}{2\alpha R}$	q_e	$q_e c / \alpha$	$q_e^2 R$	$2\alpha c q_e^2 R$
ε_0, μ_0	ε_0	$2\alpha \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$	μ_0^{-1}				
			$c / 2\alpha$		c / α		$2\alpha c$

Примечание к табл. 4. Первая колонка таблицы содержит ККВ, посредством которых выражаются другие ККВ того же ряда. Верхний и нижний ряды таблицы содержат (в треугольных ячейках) коэффициенты, показывающие связь соседних ФВ в основном системном ряду ККВ.

2 Практическая часть

2.1 При подготовке отчета выполняемого компьютерного практикума зарисовать упрощенные скелетные схемы рис. 4 и рис. 5, законспектировать обозначения и числовые значения ККВ основного системного ряда и расположенные вне его. Использовать только систему СИ. Выписать основные формульные соотношения, для тепловых и оптических законов излучения, в том числе выражающие их связи с атомными константами.

2.2 Используя электронную программу и инструкцию по работе с ней [6] поочередно вывести на экран компьютера изображения системы ФВиЗ, наиболее подходящие для выполнения заданий своего варианта.

2.3 Построить с помощью электронной программы, а также вручную изображения требуемых системных закономерностей в соответствии с заданным вариантом. Отобразить в конспекте эти закономерности в виде выделенных линий или параллелограммов по типу приводимых далее упрощенных изображений. На рисунках приводить: наименование закономерности, ее формульное выражение, взаимное расположение ФВ, участвующих в закономерности, их обозначения и размерности в СИ. Значения G и k не приводить.

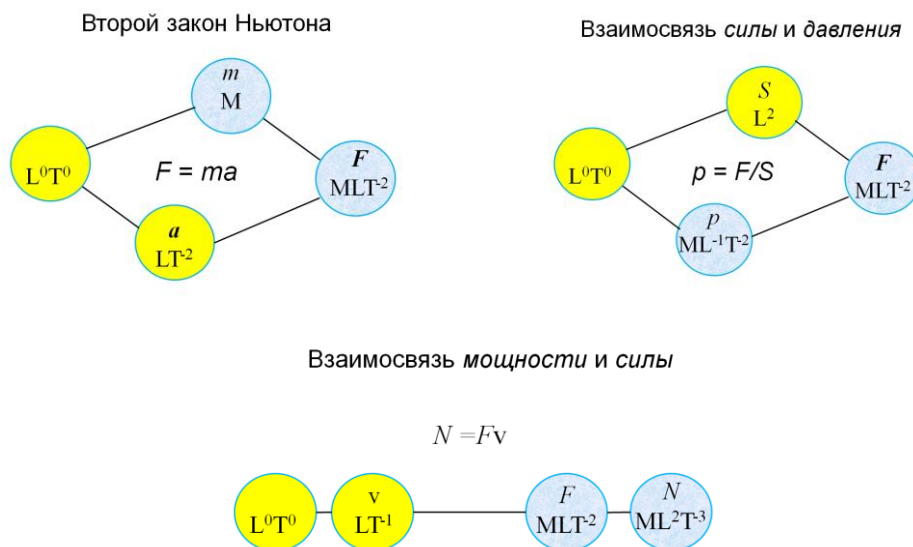
2.4 Пользуясь системой ФВиЗ попытаться найти с участием нескольких ФФК такие системные соотношения, которых нет в данном учебном пособии.

Варианты заданий для выполнения в практической части:

по заданным уравнениям связи изобразить (построить) системные связи или показать системные соотношения для их составляющих

№ вар.	Задания по системе в изображении рис. 2	Задания по системе в изображении рис. 4	Задания по системе в изображении рис. 3, 5–9
1	$u(T) = \frac{dW}{dV} = \frac{4}{c} R^*$	$\int_{\mathfrak{R}^N} \Psi^* \Psi dV = 1$	$\Phi_0 = \frac{h}{2e}; \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$
2	$R^* = \sigma T^4$	$\Pi = \oint \vec{j} d\vec{S}; \quad \Delta P_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$	$g_x = \frac{e^2}{h}; \quad \mu_0 = \frac{2\alpha R}{c}$
3	$r_{\omega,T} = \frac{dR}{d\omega}$	$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m_0} (\Psi \text{grad} \Psi^* + \Psi^* \text{grad} \Psi)$	$\frac{h}{2e} = \frac{\Delta\phi}{v}; \quad h = e^2 R_x$
4	$r_{\lambda,T} = \frac{dR}{d\lambda}$	$\frac{\partial \Psi ^2}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$	$g_x = 2\alpha c \epsilon_0; \quad e = \sqrt{\epsilon_0 2\alpha c h}$
5	$b_1 = \lambda_m T$	$P = \int \Psi ^2 dV; \quad \Delta W \Delta t \geq \hbar$	$\Phi_0 = \frac{e}{2g_x}; \quad (II)_{\text{KB}} = \frac{ec}{\alpha}$
6	$W = kT$	$\int \left(\frac{\partial \Psi ^2}{\partial t} + \text{div} \vec{j} \right) dV = \Pi$	$g_x = \frac{2\alpha}{R_B}; \quad g_x = 2\alpha \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$
7	$S = k \ln \Omega$	$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda_B} \right)^2 \Psi = 0$	$\Phi_0 = \mu_0 \frac{(II)_{\text{KB}}}{4};$ $R_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \text{ Ом}$

Примеры упрощенного изображения системных связей, выражающих физические закономерности



Контрольные вопросы к защите лабораторного практикума

1. В чем проявляется природное единство ФФК? Роль ФФК в метрологии. Какие ФФК в 2019 г. получили в СИ точные числовые значения и что этим достигнуто?
2. Поясните основные особенности системы ФВиЗ в области тепловых и излучательных величин, в области волновой механики.
3. Поясните основные особенности системы ФВиЗ в области волновой механики. Поясните физический смысл ФВ участвующих в уравнениях Шрёдингера и других уравнения квантовой волновой механики.
4. Приведите уравнение связи и покажите системную закономерность с участием элементарного *электрического заряда* и *магнитной постоянной*,
5. Приведите уравнения связи и покажите системные закономерности с участием *электрической постоянной* и *магнитной постоянной*.
6. Приведите уравнение связи и покажите системную закономерность с участием постоянной Планка и элементарного *электрического заряда*.
7. Поясните происхождение и значения постоянной Джозефсона и постоянной фон Клитцинга.
8. Определите системное расположение возможной ФВ *поток намагниченности*.
9. Определите системное расположение возможной ФФК «константа локализации микрочастиц» с размерностью произведения *массы* на *длину*.
10. По заданным уравнениям связи найдите в системе ФВиЗ соответствующие им системные изображения.

Литература

1. Кононогов С.А. Системы единиц и фундаментальные физические константы. Законодательная и прикладная метрология. – 2009. – № 1. – С. 15-24.
2. Каршенбойм С.Г. Фундаментальные физические константы. Успехи физических наук. Том 175. № 3. 2005. С. 271–298.
3. Чуев А.С., Задорожный Н.А. Изучение системных размерностных взаимосвязей электромагнитных величин. Лабораторный практикум Э-27. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016 г. <http://www.fn.bmstu.ru/learning-work-fs-4/learning-semester-3-fs-4/46-fn-dep/fn4/learning/sem3/155-phys-labs-sem3>
4. Чуев А.С. О системе СИ и других возможных системах единиц с позиции общей системы физических величин и закономерностей. Журнал «Законодательная и прикладная метрология». № 5, 2014. С. 44-49.
5. Чуев А.С. Физическая картина мира в размерности «длина-время». Серия «Информатизация России на пороге XXI века». – М.: СИНТЕГ, 1999. 96 с.
6. Инструкция по работе с электронной программой. МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра ФН-4, 2016 г.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П1. Тепловые и излучательные величины, участвующие в соотношениях квантовой физики

№ п/п	Наименование физической величины	Усл. Обозн.	Размерность ФВ в системе		Соотношение размерностей ФВ (LT/MLT)
			LT	MLT	
<i>Входящие в динамические общие базовые величины</i>					
1	Энергия, (работа, теплота)	W (A, U)	L^5T^{-4}	ML^2T^{-2}	$M^{-1}(L^3T^{-2}) = G$
2	Мощность	N	L^5T^{-5}	ML^2T^{-3}	
3	Импульс (колич. движения)	P	L^4T^{-3}	MLT^{-1}	
4	Объемная плотность энергии (давление)	$u(T)$ (p)	L^2T^{-4}	$ML^{-1}T^{-2}$	
5	Масса	m	L^3T^{-2}	M	
6	Объемная плотность массы	ρ_m	T^{-2}	ML^{-3}	
7	Излучательность	R	L^3T^{-5}	MT^{-3}	
8	Спектральная плотность излучательности по ω	$r_{\omega,T}$	L^3T^{-4}	MT^{-2}	
9	Спектральная плотность излучательности по λ	$r_{\lambda,T}$	L^2T^{-5}	$ML^{-1}T^{-3}$	
10	Спектральная (по ω) объемная плотность энергии	$u_{\omega,T}$	L^2T^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	
11	Спектральная (по λ) объемная плотность энергии	$u_{\lambda,T}$	LT^{-4}	$ML^{-2}T^{-2}$	
12	Действие, момент импульса, теплоемкость, энтропия, постоянная Больцмана	$H, L,$ $C, k;$ (nh)	L^5T^{-3}	ML^2T^{-1}	
13	Постоянная Стефана-Больцмана, Дж/К ⁴	σ	L^3T^{-1}	(MT)*	
14	Вторая постоянная Вина, Вт/(м ³ ·К ⁵)	b_2	L^2	(ML ⁻¹ T ²)*	
15	Функция $F(\omega/T)$	$F(\omega/T)$	L^3T^{-1}	MT	
16	Функция $\psi(\lambda T)$	$\psi(\lambda T)$	L^6T^{-5}	ML^4T^{-3}	
<i>Входящие в кинематические общие базовые величины</i>					
1	Безразмерная константа (в системе LT: $G^{-1}=1$)	–	–	–	
2	Время	t	T	T	
3	Длина	l	L	L	
4	Площадь	S	L ²	L ²	
5	Объем	V	L ³	L ³	
9	Скорость	v	LT ⁻¹	LT ⁻¹	
10	Частота (угловая)	ω	T ⁻¹	T ⁻¹	Принято $\Theta = T^{-1}$

1.
* - в отличие от системы СИ размерность температуры Θ принята совпадающей с размерностью частоты T^{-1} .

Таблица П2. Важнейшие тепловые и излучательные величины и уравнения связи с их участием

№ п/п	Наименование определяющих и иных уравнений связи ФВ	Уравнение связи	Примечание
1	Длина волны излучения, λ	$\lambda = cv$	ν - частота излуч. циклическая
2	Частота излучения круговая, ω (правильнее - частота угловая)	$\omega = 2\pi\nu; \nu = 1/T_{ц}$	$T_{ц}$ - длительность цикла, период
3	Объемная плотность энергии равновесного теплового излучения	$u(T) = W/V$	
4	Спектральная (по ω) объемная плотность энергии	$u_{\omega,T} = du(T)/d\omega$	
5	Спектральная (по λ) объемная плотность энергии	$u_{\lambda,T} = du(T)/d\lambda$	
6	Излучательность, (энергетическая светимость – устарев.)	$R = N/S$	Мощность, излучения, приходящаяся на единицу площади
7	Излучательность АЧТ - (R^*)	$R^* = (c/4) \cdot u(T)$	c – скорость света
8	Закон Стефана-Больцмана	$R^* = \sigma T^4$	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² ·К ⁴)
9	Значение излучательности для серого тела	$R = \alpha \sigma T^4$	
10	Спектральная (по ω) плотность излучательности	$r_{\omega,T} = dR/d\omega$	
11	Спектральная (по λ) плотность излучательности	$r_{\lambda,T} = dR/d\lambda$	
12	Определение излучательности через $r_{\omega,T}$ и $r_{\lambda,T}$	$R = \int_0^{\infty} r_{\omega,T} d\omega$	$R = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda$
13	Поглощательная способность тел	$a_{\omega,T} = \frac{d\Phi_{\omega}^*}{d\Phi_{\omega}}$	$d\Phi_{\omega}$ - падающий и $d\Phi_{\omega}^*$ - поглощенный потоки в интервале $d\omega$
14	Закон Кирхгофа (1859 г.)	$\left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} \right)_i = \frac{r_{\omega,T}^*}{1} = f(\omega, T)$	$\left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} \right)_i = \frac{r_{\lambda,T}^*}{1} = \varphi(\lambda, T)$
15	Спектральная плотность излучательности серого тела	$r_{\omega,T} = a_{\omega,T} \cdot r_{\omega,T}^*$	$r_{\omega,T}^*$ – спектральная плотность излучательности АЧТ
16	Соотношение спектральных (по ω и λ) объемной плотности энергии и излучательности	$u_{\omega,T} = 4r_{\omega,T}/c$	$u_{\lambda,T} = 4r_{\lambda,T}/c$
17	Соотношение спектральных плотностей излучательности по λ и ω	$r_{\lambda,T} = r_{\omega,T} d\omega/d\lambda$ ($r_{\lambda,T} = a_{\lambda,T} \cdot r_{\lambda,T}^*$)	$r_{\lambda,T} = r_{\omega,T} 2\pi c/\lambda^2$; $r_{\lambda,T}^*$ – для АЧТ
18	Формула Релея - Джинса	$r_{\omega,T}^* = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT$	

19	Первый закон Вина (закон смещения)	$\lambda_m = b_1/T$	$b_1 = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
20	Второй закон Вина (для $\Gamma_{\lambda, \max, T}$)	$r_{\lambda, \max, T} = b_2 \cdot T^5$	$b_2 = 1,287 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \text{К}^5)$
21	Функция Планка	$r_{\omega, T}^* = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}$	
22	Функция Кирхгофа $F(\omega/T)$		$F(\omega/T) = r_{\omega, T}/\omega^3$
23	Функция Кирхгофа $\psi(\lambda T)$		$\psi(\lambda T) = r_{\lambda, T} \cdot \lambda^5$
24	Формула Планка	$E_\phi = h\nu$	
25	Интегральная плотность энергии излучения фотонного газа	$u(T) = \frac{4\sigma}{c} T^4$	
26	Давление фотонного газа	$p = \frac{4\sigma}{3c} T^4$	
27	Теплоемкость фотонного газа при постоянном объеме	$C_V = \frac{16\sigma}{c} T^3 V$	
28	Энтропия фотонного газа	$S = \frac{16\sigma}{3c} T^3 V$	
29	Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта	$h\nu = A_B + E_m$	
30	Уравнения де Бройля	$E = \hbar\omega; \vec{p} = \hbar\vec{k}$	
31	Момент импульса (момент количества движения). (Действие актуальное)	$L = mvr = Wt = nh$ $([Wt] = C = S)$	
32	Действие потенциальное	$\Pi = FS = Wl$	$[\Pi] = hc \cong b_1 k$
33	Импульс (количество движения)	$P_\phi = h/\lambda$	$P = mv = Ft$
34	Объемная плотность импульса	$\rho_P = P/V$	