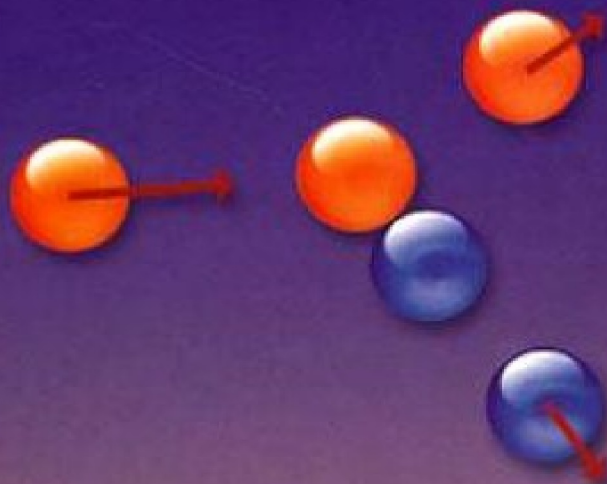


В. А. Никеров

# ФИЗИКА

Современный курс

Учебник



**В. А. Никеров**

# **Физика**

**Современный курс**

*Учебник*

Допущено Научно-методическим советом по физике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям

Москва

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К<sup>о</sup>»

2012

**УДК 53**  
**ББК 22.3**  
**Н62**

**Рецензенты:**

Кафедра общей физики Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского (зав. кафедрой доктор технических наук, профессор П. Г. Штерн).

Доктор физ.-мат. наук, профессор В. Р. Никитенко (Московский инженерно-физический институт).

**Никеров В. А.**

**Н62** Физика. Современный курс: Учебник / В. А. Никеров. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К<sup>о</sup>», 2012. — 452 с.

ISBN 978-5-394-01133-7

В учебнике последовательно изложены современные представления о механике и молекулярной физике, электродинамике и волновой оптике, квантовой физике. Курс является компактным, но при этом дает цельное представление об основных законах и понятиях современной физики, их взаимосвязи и происхождении. В рамках соответствия государственным образовательным стандартам дано представление о ряде существенных разделов и подходов сегодняшней физики. Акцент в изложении сделан на наиболее перспективные, бурно развивающиеся и финансируемые приложения, и это делает учебник востребованным и современным по сути. В первую очередь речь идет о приложениях физики к современным технологиям, электронике, медицине и биологии.

Учебник подготовлен на основе курса лекций, прочитанных автором в Московском институте электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

Для студентов технических и иных вузов, а также для самоподготовки и повторения ранее изученного материала. Может быть использован также преподавателями для самообразования и подготовки к занятиям.

ISBN 978-5-394-01133-7

© Никеров В. А., 2012

© ООО «ИТК «Дашков и К<sup>о</sup>», 2012

# Содержание

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	15
<b>Часть 1. МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА</b> .....	17
1. Кинематика материальной точки .....	17
1.1. Механика и ее структура. Материальная точка и твердое тело .....	17
1.2. Перемещение и пройденный путь .....	19
1.3. Скорость, ускорение .....	20
1.4. Тангенциальное, нормальное и полное ускорения .....	22
2. Динамика материальной точки .....	23
2.1. Первый закон Ньютона .....	23
2.2. Второй закон Ньютона. Масса. Сила .....	24
2.3. Третий закон Ньютона .....	26
2.4. Закон сохранения импульса. Центр масс (инерции). Движение центра инерции .....	27
3. Работа и энергия .....	29
3.1. Работа силы. Мощность .....	29
3.2. Энергия. Кинетическая и потенциальная энергия. Консервативные и диссипативные системы .....	31
3.3. Связь силы и потенциальной энергии. Условие равновесия .....	32
3.4. Закон сохранения энергии .....	36
3.5. Упругое и неупругое соударение тел .....	38
4. Кинематика и динамика вращательного движения твердого тела .....	43
4.1. Кинематика твердого тела. Угловое перемещение, угловая скорость, угловое ускорение .....	43
4.2. Работа при вращательном движении. Момент силы .....	46
4.3. Кинетическая энергия при вращательном движении. Момент инерции .....	47

4.4. Теорема Штейнера.....	50
4.5. Уравнение динамики вращательного движения.....	52
4.6. Закон сохранения момента импульса.....	52
4.7. Аналогия между поступательным и вращательным движением .....	54
5. Гармонические и затухающие колебания .....	55
5.1. Гармонические колебания. Свободные колебания системы .....	55
5.2. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение .....	56
5.3. Затухающие колебания. Коэффициент затухания, декремент, логарифмический декремент, время релаксации.....	59
6. Сложение колебаний. Вынужденные колебания .....	62
6.1. Представления колебаний.....	62
6.2. Сложение колебаний одинаковой частоты и одинакового направления .....	63
6.3. Сложение колебаний близких частот. Биения.....	64
6.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.....	65
6.5. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Период и амплитуда вынужденных колебаний .....	66
6.6. Резонанс. Семейство резонансных кривых .....	70
7. Волны.....	72
7.1. Упругие волны. Продольные и поперечные волны .....	72
7.2. Уравнение плоской волны. Фазовая скорость .....	73
7.3. Волновое уравнение упругой волны и его решение .....	75
7.4. Плотность энергии упругой волны .....	78
7.5. Перенос энергии бегущей волной. Вектор Умова.....	80
7.6. Принцип суперпозиции при сложении волн. Стоячая волна. Колебания струны .....	81

8. Специальная теория относительности .....	83
8.1. Преобразования Галилея и постулаты специальной теории относительности .....	83
8.2. Преобразования Лоренца .....	85
8.3. Следствия СТО: замедление времени и сокращение длины .....	88
8.4. Импульс тела и основное уравнение релятивистской динамики .....	90
8.5. Кинетическая и полная энергии в СТО. Энергия покоя. Релятивистский инвариант .....	92
9. Молекулярно-кинетическая теория. Принципы классической статистической физики .....	94
9.1. Физические основы молекулярно-кинетической теории. Уравнение состояния идеального газа .....	94
9.2. Вывод основного уравнения молекулярно- кинетической теории .....	96
9.3. Элементы классической статистической физики. Функции распределения и их роль .....	98
10. Распределение Максвелла и характерные скорости молекул. Барометрическая формула. Распределение Больцмана .....	102
10.1. Распределение Максвелла по составляющим скорости .....	102
10.2. Распределение Максвелла по модулю скорости. Нахождение наиболее вероятной, средней, среднеквадратичной скоростей .....	105
10.3. Барометрическая формула .....	108
10.4. Распределение Больцмана .....	109
11. Элементы физической кинетики. Явления переноса в газах .....	111
11.1. Средняя длина пробега и частота столкновений молекул .....	111
11.2. Общий вид уравнения переноса .....	114

11.3.	Диффузия и коэффициент диффузии .....	117
11.4.	Теплопроводность и коэффициент теплопроводности .....	118
11.5.	Вязкость и коэффициент вязкости .....	120
11.6.	Броуновское движение и диффузия .....	121
11.7.	Поглощение и рассеяние частиц. Закон Бугера- Ламберта. Транспортировка частиц через среды.....	124
12.	Первое начало термодинамики .....	128
12.1.	Первое начало термодинамики и закон сохранения энергии.....	128
12.2.	Работа и теплота. Работа, совершаемая газом в различных изопроцессах .....	129
12.3.	Внутренняя энергия идеального газа. Степени свободы молекул. Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы .....	131
12.4.	Теплоемкость идеального газа при постоянном объеме и давлении. Уравнение Майера.....	133
12.5.	Адиабатный процесс. Вывод уравнения адиабаты ....	136
13.	Второе начало термодинамики. Энтропия .....	139
13.1.	Формулировки второго начала термодинамики .....	139
13.2.	КПД кругового процесса.....	140
13.3.	Цикл Карно. КПД идеальной тепловой машины. Теоремы Карно .....	142
13.4.	Энтропия. Изменение энтропии в процессах идеального газа. Энтропия и термодинамическая вероятность. Формула Больцмана .....	145
14.	Реальные газы. Агрегатные состояния и фазовые переходы.....	148
14.1.	Уравнение Ван-дер-Ваальса.....	148
14.2.	Агрегатные состояния и фазовые переходы. Изотермы Ван-дер-Ваальса.....	150
14.3.	Внутренняя энергия реального газа .....	152

<b>Часть II. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ВОЛНОВАЯ ОПТИКА.....</b>	<b>154</b>
15. Закон Кулона и электрическое поле .....	154
15.1. Закон Кулона .....	154
15.2. Электрическое поле и электрическое смещение .....	156
15.3. Принцип суперпозиции электрических полей.....	160
15.4. Электрический диполь. Поле диполя .....	161
16. Теорема Гаусса для электрического поля .....	164
16.1. Поток вектора напряженности электрического поля и электрического смещения .....	164
16.2. Теорема Гаусса в интегральной форме.....	165
16.3. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости и двух плоскостей .....	167
16.4. Поле равномерно заряженной бесконечной нити.....	169
16.5. Поле равномерно заряженной сферы .....	170
16.6. Поле равномерно заряженного шара.....	170
16.7. Теорема Гаусса в дифференциальной форме .....	172
17. Потенциал электростатического поля.....	173
17.1. Работа сил электростатического поля. Консервативность электростатических сил.....	173
17.2. Теорема о циркуляции вектора напряженности поля .	174
17.3. Определение потенциала электростатического поля..	175
17.4. Связь между потенциалом и напряженностью.....	177
17.5. Вычисление разности потенциалов для некоторых видов полей.....	179
18. Проводники в электростатическом поле. Конденсаторы и энергия электростатического поля .....	181
18.1. Проводники в электростатическом поле. Поле внутри и вне заряженного проводника.....	181
18.2. Электрическая емкость проводника.....	183
18.3. Конденсаторы .....	184
18.4. Энергия заряженного проводника и конденсатора. Плотность энергии электростатического поля .....	187

19. Диэлектрики в электрическом поле .....	190
19.1. Поляризация диэлектриков. Полярные и неполярные диэлектрики. Свободные и связанные заряды .....	190
19.2. Вектор поляризации, диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость .....	192
19.3. Теорема Гаусса для поля в диэлектрике. Явления на границе раздела двух диэлектриков. Преломление линий смещения и напряженности.....	193
19.4. Сегнетоэлектрики, пьезоэлектрики, электреты. Явления на разломах.....	196
20. Постоянный ток. Законы Ома и Джоуля-Ленца .....	198
20.1. Постоянный ток. Виды тока. Сила тока. Плотность тока .....	198
20.2. Закон Ома в дифференциальной форме .....	200
20.3. Закон Ома в интегральной форме. Сопротивление ....	201
20.4. Сторонние силы. Электродвижущая сила. Обобщенный закон Ома.....	202
20.5. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной и интегральной формах .....	203
21. Газовый разряд и плазма .....	204
21.1. Проводимость газов. Носители тока. Ионизация и рекомбинация. Несамостоятельный и самостоятельный газы и газовые разряды .....	204
21.2. Вольт-амперная характеристика газового разряда. Ударная ионизация .....	207
21.3. Типы самостоятельных газовых разрядов .....	208
21.4. Понятие о плазме .....	212
22. Магнитное поле тока .....	214
22.1. Магнитное поле тока и его проявления. Вектор магнитной индукции и напряженности поля .....	214
22.2. Закон Био-Савара-Лапласа и его применение к расчету магнитных полей .....	218

22.3.	Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля. Расчет поля соленоида и тороида...	221
22.4.	Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах .....	224
22.5.	Действие магнитного поля на токи. Закон Ампера....	226
22.6.	Действие магнитного поля на движущиеся заряды. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в однородном и неоднородном магнитном полях.....	227
23.	Магнитное поле в веществе .....	229
23.1.	Магнитный момент электронов и атомов. Намагниченность .....	229
23.2.	Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики.....	233
23.3.	Условия на границе раздела двух магнетиков .....	237
24.	Электромагнитная индукция .....	239
24.1.	Основной закон электромагнитной индукции. Правило Ленца. Вихревое электрическое поле. Генераторы переменного тока.....	239
24.2.	Самоиндукция. Индуктивность соленоида.....	241
24.3.	Взаимоиндукция .....	243
24.4.	Нестационарные процессы в цепи, содержащей индуктивность .....	245
24.5.	Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля .....	247
25.	Уравнения Максвелла.....	249
25.1.	Электромагнитное поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла в интегральной форме .....	249
25.2.	Уравнения Максвелла в дифференциальной форме ..	252
25.3.	Закон сохранения заряда. Теорема Пойнтинга. Энергия электромагнитного поля. Вектор Умова-Пойнтинга .....	256
25.4.	Волновое уравнение. Решения волнового уравнения. Интенсивность электромагнитной волны .....	259

25.5. Принцип работы радиоприемника. Шкала электромагнитных волн.....	262
26. Волновая оптика. Геометрическая оптика. Интерференция света.....	264
26.1. Волновая и геометрическая оптика. Четыре закона геометрической оптики.....	264
26.2. Интерференция света. Когерентность .....	267
26.3. Принцип Гюйгенса — Френеля. Расчет интерференционной картины двух источников.....	271
26.4. Интерференция в тонких пленках .....	274
27. Дифракция света.....	277
27.1. Метод зон Френеля. Дифракция на круглом отверстии и круглом диске.....	277
27.2. Дифракция в параллельных лучах от одной щели.....	281
27.3. Дифракционная решетка. Условия главных максимумов. Дисперсия и разрешающая способность решетки .....	283
27.4. Дифракция от объемных решеток .....	288
28. Поляризация света.....	289
28.1. Естественный и поляризованный свет. Поляризация света при отражении и преломлении. Закон Брюстера .....	289
28.2. Поляризационные приборы. Закон Малюса .....	291
28.3. Двойное лучепреломление. Поляризация света в одноосных кристаллах. Построения волновых поверхностей. Призма Николя .....	293
29. Дисперсия света .....	296
29.1. Нормальная и аномальная дисперсия.....	296
29.2. Электронная теория дисперсии.....	297
29.3. Анализ результатов электронной теории дисперсии.....	300
<b>Часть III. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА.....</b>	<b>302</b>
30. Квантовая природа света. Давление света. Фотоэффект и эффект Комптона.....	302

30.1. Квантовая природа света. Фотоны .....	302
30.2. Давление света.....	304
30.3. Фотозффект. Уравнение Эйнштейна.....	306
30.4. Эффект Комптона .....	309
31. Тепловое излучение.....	311
31.1. Равновесное излучение. Лучеиспуска- тельная и лучепоглощательная способность. Черное и серое тело .....	311
31.2. Закон Кирхгофа .....	314
31.3. Закон Стефана-Больцмана .....	316
31.4. Закон смещения Вина .....	316
31.5. Формула Рэлея-Джинса.....	318
31.6. Квантовая гипотеза и закон Планка. Связь закона Планка и законов излучения абсолютно черного тела .....	320
32. Планетарная модель атома и спектры.....	322
32.1. Опыты Резерфорда. Классическая модель атома.....	322
32.2. Постулаты Бора и их следствия .....	324
32.3. Дискретность энергетических уровней в атоме и происхождение линейчатых спектров. Опыты Франка и Герца .....	326
32.4. Спектры атома водорода и водородоподобных ионов. Недостатки теории Бора.....	328
33. Волны де Бройля и волновая функция.....	330
33.1. Гипотеза де Бройля и ее экспериментальное подтверждение .....	330
33.2. Свойства волн де Бройля: фазовая и групповая скорости, дисперсия.....	332
33.3. Волны де Бройля и квантовые условия Бора. Частицы, проявляющие волновые свойства .....	334
33.4. Вероятность местонахождения микрочастицы. Волновая функция. Нормировка и ограничения на волновые функции. Принцип суперпозиции. Средние значения координат .....	336

33.5. Соотношение неопределенностей для координаты и импульса .....	339
33.6. Соотношение неопределенностей для времени и энергии. Принцип соответствия .....	342
34. Уравнение Шредингера .....	345
34.1. Уравнение Шредингера для свободной частицы .....	345
34.2. Общее уравнение Шредингера .....	346
34.3. Стационарное уравнение Шредингера .....	347
34.4. Уравнения Шредингера в операторной форме. Оператор Гамильтона .....	349
34.5. Связь классической и квантовой механики. Теорема Эренфеста .....	350
34.6. Решение уравнения Шредингера для свободной частицы .....	352
35. Потенциальный ящик и потенциальный барьер .....	353
35.1. Потенциальный ящик: уравнение Шредингера, граничные условия, волновые функции, энергия и вероятность местонахождения частицы .....	353
35.2. Потенциальный барьер бесконечной ширины. Уравнение Шредингера и его решение для случаев $E < U$ , $E > U$ .....	357
35.3. Потенциальный барьер конечной ширины. Случаи $E > U$ , $E < U$ .....	363
35.4. Туннельный эффект. Коэффициенты прозрачности и отражения .....	365
36. Гармонический осциллятор .....	368
36.1. Потенциальная яма .....	368
36.2. Исходная классическая теория гармонического осциллятора .....	370
36.3. Квантовая теория гармонического осциллятора .....	372
36.4. Волновые функции и энергетические уровни квантового осциллятора .....	375
37. Квантовая теория водородоподобного атома .....	377

37.1. Уравнение Шредингера для электрона в водородоподобном атоме .....	377
37.2. Квантовые числа. Возбужденные состояния электрона в водородоподобном атоме и спектры .....	379
37.3. Спин электрона. Кратность вырождения уровней водородоподобных атомов .....	381
37.4. 1s-состояние атома водорода .....	382
37.5. Спин-орбитальное взаимодействие. Эффекты Зеемана и Штарка .....	384
38. Квантовая теория многоэлектронных атомов .....	386
38.1. Принцип неразличимости тождественных частиц. Фермионы и бозоны .....	386
38.2. Принцип Паули .....	388
38.3. Строение многоэлектронных атомов .....	389
38.4. Рентгеновские спектры .....	391
39. Квантовая теория молекул .....	394
39.1. Гетерополярная и гомеополярная связи. Обменное взаимодействие .....	394
39.2. Образование молекул .....	395
39.3. Колебательная и вращательная энергия молекул .....	397
40. Элементы физики твердого тела .....	400
40.1. Качественное обоснование зонной теории. Адиабатное приближение. Одноэлектронное приближение. Самосогласованное поле .....	400
40.2. Уравнение Шредингера для кристаллов. Теорема Блоха и туннелирование .....	402
40.3. Решение уравнения Шредингера в приближении слабой связи .....	403
40.4. Зоны Бриллюэна и эффективная масса электрона .....	406
40.5. Приближение сильной связи .....	409
40.6. Металлы, диэлектрики, полупроводники по зонной теории .....	410
41. Строение атомного ядра. Радиоактивность .....	412

41.1. Заряд, масса, радиус, спин, квантовый характер ядра.....	412
41.2. Удельная энергия связи ядер разных элементов. Модели ядра.....	415
41.3. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада .....	418
41.4. $\alpha$ -распад, $\beta$ -распад. Нейтрино .....	420
41.5. $\gamma$ -излучение и его свойства.....	423
41.6. Искусственная радиоактивность .....	426
41.7. Регистрация и дозы радиоактивных излучений.....	429
42. Современная физическая картина мира .....	431
42.1. Космические лучи .....	431
42.2. Четыре вида фундаментальных взаимодействий.....	433
42.3. Элементарные и фундаментальные частицы. Кварки.	435
42.4. Эволюция Вселенной.....	437
<b>Физические константы и величины .....</b>	<b>440</b>
<b>Предметный указатель .....</b>	<b>441</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика является наиболее блестящим достижением человеческой научной мысли. По стечению обстоятельств благодаря гонке вооружений XX в. эту сверхнауку создавало такое мощное сочетание сил и умов, которое не было достижимо до описываемых событий и едва ли может быть повторено в будущем. Так, концентрация сравнимых сил в технологиях начала XXI в. не сопровождается концентрацией сравнимого интеллектуального потенциала и едва ли может привести к созданию столь же красивой интеллектуальной аналитической науки. Объясняется это появлением мощных компьютеров, которые заменили изящные аналитические формулы и качественные рассуждения полуэмпирическими компьютерными расчетами. Тем не менее человек учится, чтобы понимать себя и окружающий мир. И до сих пор физика помогает этому лучше, чем менее аналитические специальные науки.

Физику принято называть *экспериментальной наукой*. И действительно, она базируется на огромном количестве замечательных опытов и экспериментов. Однако не менее важно, что физика — *наука аналитическая (теоретическая)*. Именно в физике создан уникальный аппарат, позволяющий анализировать причины, связи, механизмы и последствия самых разных явлений в самых разных жизненных сферах. На протяжении многих столетий физика была (и еще будет) локомотивом, мчавшимся впереди человечества и освещающим ему путь. Это одна из причин, почему всем надо знать физику. Поэтому в данном курсе особое внимание уделено аналитическому аппарату физики.

Данная книга разбита на 3 условные части примерно равного объема, и содержит 42 раздела. Часть I «Механика и молекулярная

физика» включает разделы, посвященные классической механике (1–4), колебаниям и волнам (5–7), специальной теории относительности (8), статистической физике (9–10), физической кинетике (11) и термодинамике (12–14). Часть II «Электродинамика и волновая оптика» содержит разделы, посвященные электрическим и магнитным явлениям (15–25), а также геометрической и волновой оптике (26–29). Часть III «Квантовая физика» включает квантовую оптику (30) и тепловое излучение (31), атомную (32–40) и ядерную (41) физику, а также дает представление о современной физической картине мира (42).

Курс является компактным, но при этом дает цельное представление об основных законах и понятиях современной физики, их взаимосвязи и происхождении. Ключевые определения и термины выделены курсивом.

С замечаниями и пожеланиями к автору можно обратиться по адресу: [nik@sea.ru](mailto:nik@sea.ru).

# Часть 1

## МЕХАНИКА

### И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

---

## 1. Кинематика материальной точки

### 1.1. Механика и ее структура. Материальная точка и твердое тело

*Физика — наука, изучающая общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы ее движения. Механика — часть физики, изучающая законы движения и равновесия тел.*

*Классическая механика Исаака Ньютона (1643–1727) изучает движение макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме. Движение макроскопических тел со скоростями, соизмеримыми со скоростью света в вакууме, изучается *релятивистской механикой*, которая основана на *специальной теории относительности*, сформулированной Альбертом Эйнштейном (1879–1955). Для описания движения микроскопических тел (например, атомов и электронов) законы классической механики не всегда применимы — они заменяются законами *квантовой механики*.*

Создание классической физики и механики по праву связывают с именем И. Ньютона, который сформулировал основополагающие законы физики практически в том виде, в каком мы сего-

дня ими пользуемся. Новая картина мира и математическое описание космических тел изложены этим величайшим ученым в трех книгах под общим названием “Математические начала натуральной философии” и опубликованы с 1679 по 1687 г. Ньютон ввел силу тяготения, определяемую массами взаимодействующих тел, и показал, что планеты движутся под действием этой силы по эллиптическим траекториям. Параллельно с Лейбницем он создал основы дифференциальной геометрии и применил их для анализа бесконечно малых величин. Помимо физики и математики, Ньютон внес свой вклад и в другие науки — в частности, в создание научных основ истории.

Механика подразделяется на три раздела: кинематику, динамику и статику. *Кинематика* изучает движение тел, не рассматривая причины этого движения. *Динамика* изучает законы движения тел и причины этого движения, *статика* — законы равновесия тела или системы тел. Зная законы движения тел, можно установить и законы равновесия.

Механика описывает движение реальных тел с помощью ряда абстракций, упрощающих решение задач. Среди них понятия материальной точки и абсолютно твердого тела. *Материальная точка* — тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Например, изучая движение планеты по орбите вокруг Солнца, можно принять ее за материальную точку. Но планету нельзя считать точкой, если мы рассматриваем перемещение по ней автомобиля.

Произвольное макроскопическое тело можно разбить на малые, взаимодействующие между собой, части, каждая из которых рассматривается как материальная точка со своей массой. Тогда изучение движения тел сводится к изучению системы материальных точек. В механике часто сначала изучают движение отдельных точек, а затем переходят к изучению движения тел.

Еще одна модель — абсолютно твердое тело. *Абсолютно твердым телом* называется тело, взаимное положение любых точек которого не изменяется, в каких бы процессах оно ни участвовало (недеформируемое тело).

## 1.2. Перемещение и пройденный путь

Любое движение абсолютно твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений. *Поступательное движение* — движение, при котором любой выделенный в теле отрезок остается параллельным самому себе. *Вращательное движение* — движение, при котором точки тела описывают окружности, расположенные в параллельных плоскостях с центрами на прямой, называемой осью вращения. При этом ось вращения в процессе движения может менять свое положение.

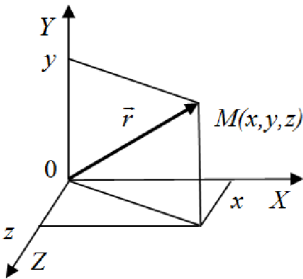


Рис. 1.1

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Для определения положения материальной точки требуется задать систему отсчета. *Система отсчета* — совокупность системы координат и часов, связанных с телом, относительно которого рассматривается движение. В прямоугольной декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки в данный момент времени определяется тремя координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  или радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из начала системы координат в данную точку (рис. 1.1). Здесь и далее стрелка означает, что символ является вектором. В общем случае координаты движения являются функцией времени:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t), \quad (1.1)$$

$$\text{или } \vec{r} = \vec{f}(t). \quad (1.2)$$

Эти уравнения называют *кинематическими уравнениями движения* точки.

При движении в пространстве точка описывает кривую, называемую *траекторией* движения. Эта кривая, очевидно, описывается уравнениями (1.1) и (1.2). В зависимости от формы траектории дви-

жение может быть прямолинейным или криволинейным. Длина отрезка траектории, пройденного материальной точкой, называется *пройденным путем*  $S$ . Вектор  $\Delta \vec{r}$ , соединяющий начальное  $\vec{r}_1$  и конечное  $\vec{r}_2$  положения движущейся точки (рис. 1.2), называется *перемещением*:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (1.3)$$

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с проходимым участком траектории, и модуль перемещения равен пройденному пути.

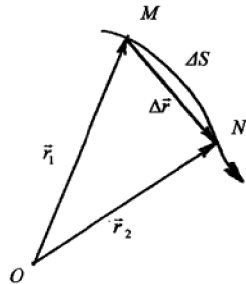


Рис. 1.2

### 1.3. Скорость, ускорение

*Скорость* — векторная величина, характеризующая быстроту движения и направление движения материальной точки. Математически она задается пределом отношения вектора перемещения к интервалу времени или производной радиус-вектора по времени:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.4)$$

Так как в пределе при малом интервале времени хорда стремится к касательной (см. рис. 1.2), то вектор скорости направлен по касательной к траектории движения. При малом интервале времени  $|d\vec{r}| = dS$ , поэтому модуль скорости можно выразить через путь:

$$v = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}. \quad (1.5)$$

Отсюда путь можно выразить через скорость интегралом:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v dt. \quad (1.6)$$

При равномерном движении скорость является константой и может быть вынесена из-под знака интеграла. Получим известную формулу  $S = v(t_2 - t_1)$ , или в более привычном виде  $S = vt$ .

Проекция уравнения (1.4) на оси координат дают проекции скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.7)$$

Быстроту изменения скорости (в частности, модуля скорости и направления движения) определяет ускорение  $\vec{a}$ . По аналогии с (1.4) *ускорение* определяется уравнениями

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.8)$$

Эти уравнения могут быть проинтегрированы в векторном виде либо скалярно. В частности, скорость в одномерном случае выражается через интеграл от ускорения:

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a dt. \quad (1.9)$$

Интегралы (1.6) и (1.9) позволяют в одномерном случае вывести известные уравнения для равноускоренного движения:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at, \\ S &= v_0 t + at^2 / 2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

## 1.4. Тангенциальное, нормальное и полное ускорения

Пусть точка движется по кривой с произвольным ускорением. В соответствии с рис. 1.3 начальная скорость  $\vec{v}_1 = MA$ , через время  $\Delta t$  она равна  $\vec{v} = CE$ . Разложим вектор приращения скорости  $\Delta\vec{v} = AD$  на две составляющие: вдоль направления скорости (тангенциальная составляющая  $\Delta\vec{v}_\tau = BD$ ) и перпендикулярно (нормальная, или центростремительная составляющая  $\Delta\vec{v}_n = AB$ ). В пределе получим, что тангенциальная составляющая ускорения  $a_\tau$  равна производной от модуля скорости:

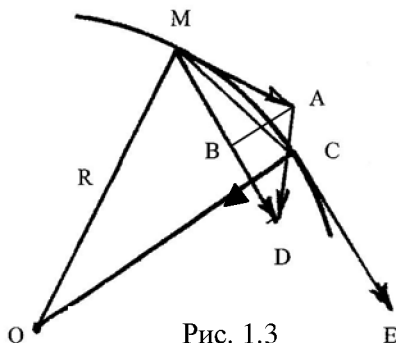


Рис. 1.3

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (1.11)$$

При малом промежутке времени траекторию можно считать дугой окружности радиуса  $R$ . Из подобия треугольников (в пределе малого времени стороны малых углов равнобедренных треугольников АВМ и МСО взаимно перпендикулярны) отношение нормальной составляющей приращения скорости  $\Delta v_n$  к начальной скорости  $v_1$  примерно равно отношению перемещения  $v\Delta t = MC$  к радиусу  $R$ :

$$\frac{\Delta v_n}{v_1} = \frac{v\Delta t}{R}. \quad (1.12)$$

При малом промежутке времени  $v_1 \approx v$  и нормальное ускорение  $a_n$  выражается из (1.12) известной изучавшим движение по окружности формулой

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}. \quad (1.13)$$

Полное ускорение тела можно определить как геометрическую сумму тангенциальной и нормальной составляющих (см. рис. 1.3), а его модуль — по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (1.14)$$

В зависимости от соотношения тангенциальной и нормальной составляющих ускорения различают прямолинейное равномерное движение; прямолинейное равнопеременное движение; прямолинейное движение с переменным ускорением; равномерное движение по окружности; равнопеременное движение по окружности; равномерное криволинейное движение; криволинейное равнопеременное движение; криволинейное движение с переменным ускорением.

В заключение следует напомнить, что в международной системе единиц (СИ) время измеряется в секундах (с), расстояние — в метрах (м), скорость — в м/с, ускорение — в м/с<sup>2</sup>.

## 2. Динамика материальной точки

### 2.1. Первый закон Ньютона

Законы Ньютона являются (как и другие физические законы) обобщением человеческого опыта.

*Первый закон Ньютона: Существуют системы отсчета, называемые инерциальными, относительно которых любая изолированная от внешних воздействий материальная точка либо покоится, либо сохраняет состояние равномерного прямолинейного движения.*

Стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется инерцией. Поэтому первый за-

кон Ньютона иногда называют законом инерции. По сути, этот закон в неявном виде указывает на инерцию, связанную с массой тел, при отсутствии воздействия (силы). Поэтому его иногда формулируют в виде: скорость тела  $v$  является константой, если приложенная сила  $F$  равна нулю ( $v = \text{const}$ , если  $F = 0$ ). Это не совсем верно, и в такой формулировке он является частным случаем второго закона Ньютона. На самом деле суть первого закона Ньютона заключается в утверждении, что *инерциальные системы отсчета существуют*.

*Очевидно: Всякая система отсчета, движущаяся относительно инерциальной системы отсчета поступательно, равномерно и прямолинейно, также является инерциальной системой отсчета.*

Ньютон считал хорошей инерциальной системой систему отсчета, связанную с «неподвижными» звездами. И хотя сегодня мы знаем, что звезды разлетаются в пространстве с неким ускорением, эта инерциальная система почти для всех задач по-прежнему весьма неплоха. Впрочем, и связанная с вращающейся вокруг Солнца Земли система отсчета не намного хуже и подходит для большинства возникающих задач.

## 2.2. Второй закон Ньютона. Масса. Сила

Второй закон Ньютона — основной закон динамики поступательного движения, да и всей физики. Он выполняется в инерциальных системах.

Второй закон Ньютона: *Ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), прямо пропорционально векторной сумме приложенных сил и обратно пропорционально массе тела:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (2.1)$$

или в более привычной форме:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.2)$$

(в системе СИ коэффициент пропорциональности равен 1).

Это уравнение можно переписать в виде

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.3)$$

или

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (2.4)$$

где введена векторная величина

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (2.5)$$

называемая *импульсом*. Формулировка (2.4) второго закона Ньютона является наиболее общей. В частности, в отличие от формулировки (2.2) она справедлива не только в классической, но и в релятивистской механике (при более общем определении импульса).

Масса первоначально определялась как количество вещества в физическом теле. Сегодня массу измеряют двумя способами. В соответствии с уравнением (2.2) масса численно равна силе, обеспечивающей единичное ускорение. Такая масса называется инертной. Второй способ измерения массы основан на законе всемирного тяготения, связывающем силу гравитационного притяжения  $F$  материальных точек с их массами  $m_1$  и  $m_2$ :

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}, \quad (2.6)$$

где  $R$  — расстояние между точками;

$\gamma$  — гравитационная постоянная.

Такая масса называется гравитационной. Сегодня нет оснований считать, что инертная и гравитационная масса как-то различаются.

Первый и второй закон Ньютона многим кажутся очевидными, но не всем. И действительно, в доньютоновой механике Аристотеля ошибочно утверждалось, что причиной всякого движения является сила. Такое заблуждение обычно связано с недооценкой роли сил

трения, препятствующих движению. Опытным путем установили, что сила трения скольжения обычно пропорциональна силе  $N$  нормального давления, с которой одно тело действует на другое:

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (2.7)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей.

В природе существует немало и других сил разного происхождения. В целом же можно дать определение, что *сила* — это векторная величина, являющаяся мерой интенсивности воздействия на тело со стороны других тел, в результате которого тело приобретает ускорение или меняет форму и размеры.

Единица массы в СИ — килограмм (кг), силы — ньютон (Н):  $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$ .

### 2.3. Третий закон Ньютона

Этот закон объясняет, что происходит с двумя взаимодействующими телами. Третий закон Ньютона: *Взаимодействующие материальные точки (тела) действуют друг на друга с силами, направленными вдоль соединяющей эти точки прямой, равными по модулю и противоположными по направлению*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (2.8)$$

где  $\vec{F}_{12}$  — сила, действующая на первую точку со стороны второй;  
 $\vec{F}_{21}$  — сила, действующая на вторую точку со стороны первой.

Существенно, что эти силы приложены к разным телам и поэтому *не компенсируются*. Третий закон Ньютона показывает, как перейти от динамики одного тела к динамике системы тел путем рассмотрения сил парного взаимодействия.

Законы Ньютона являются основными законами механики. Из них могут быть выведены все остальные законы механики.

Следует отметить, что законы Ньютона не являются самым глубоким уровнем формулирования классической механики. Так, в

рамках *Лагранжевой механики* имеется единственная формула (определение *действия*, равно интегралу по времени от разности между кинетической и потенциальной энергией) и единственный постулат: *тела движутся по той траектории, где действие минимально*. Из этого можно вывести все законы Ньютона.

Еще одно замечание касается того, почему в кинематике вводят только две производные от радиус-вектора  $\vec{r}(t)$ : первую производную — скорость, вторую — ускорение. Производные более высокого порядка обычно не нужны. Связано это с тем, что основная задача механики — предсказать положения тел в любой момент времени, т. е. определить вид функции  $\vec{r}(t)$  для каждого тела. Однако не существует фундаментального закона, что-либо утверждающего непосредственно о радиус-векторе материальной точки. Нет такого закона и для скорости. Но для ускорения он есть: это второй закон Ньютона. И последовательно интегрируя второй закон Ньютона, можно получить скорость и радиус-вектор, т. е. достаточно полно описать движение. Поэтому обычно нет необходимости дифференцировать радиус-вектор более чем дважды.

## 2.4. Закон сохранения импульса.

### Центр масс (инерции). Движение центра инерции

Из законов Ньютона следуют важные выводы. Так из второго и третьего законов Ньютона следует, что как бы тела ни взаимодействовали, они не могут изменить свой суммарный импульс, он сохраняется. Действительно, из (2.4) и (2.8) следует, что при парном взаимодействии тел изменения импульсов тел одинаковы по модулю и противоположны по знаку, т. е. суммарный импульс двух взаимодействующих тел при отсутствии внешних сил не меняется:  $\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$  или, интегрируя:  $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$ . Все это остается справедливым и для системы из любого количества материальных точек (тел).

Таким образом, в случае отсутствия внешних сил (для замкнутой системы) получаем закон сохранения импульса: суммарный импульс замкнутой системы взаимодействующих тел не меняется с течением времени:

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \overline{const}. \quad (2.9)$$

Закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике, но и в релятивистской механике (при обобщенном определении импульса) и для микрочастиц в квантовой механике. Его можно вывести из *однородности пространства*, которая заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются, иными словами, не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета. Очевидно, что импульс сохраняется и для незамкнутой системы, если геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю.

Механическую систему удобно описывать как единое целое через скорость ее центра масс. Центром масс (или центром инерции) системы материальных точек называется точка  $C$ , радиус-вектор которой

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (2.10)$$

где  $m_i$  и  $\vec{r}_i$  — соответственно масса и радиус-вектор  $i$ -й материальной точки;

$n$  — число материальных точек;

$m = \sum_{i=1}^n m_i$  — масса системы.

Скорость центра масс, получаемая при дифференцировании радиус-вектора, выражается через суммарный импульс  $\vec{p}$  тел системы:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\vec{p}}{m}. \quad (2.11)$$

Иными словами, импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс. Учитывая то, что изменение импульса механической системы равно геометрической сумме внешних сил  $\vec{F}_{\text{внешн}}$ , получим закон движения центра масс: центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена суммарная масса системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме внешних сил, приложенных к системе

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{внешн}} . \quad (2.12)$$

Из закона сохранения импульса вытекает, что центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно либо остается неподвижным.

## 3. Работа и энергия

### 3.1. Работа силы. Мощность

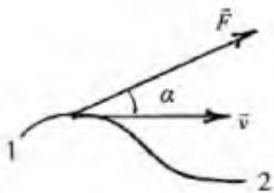


Рис. 3.1

В повседневной жизни понятие работы часто связано с усилиями по перемещению тела из одного места в другое. При этом чем больше прилагаемая сила и чем больше перемещение, тем больше работа. К тому же по опыту ясно, что работу совершает только составляющая силы, направленная вдоль перемещения.

Так, если на трамвай действует перпендикулярная рельсам сила, то перемещение и работу эта сила не создаст. Таким образом, *работа силы* — мера действия силы, зависящая от величины и направления силы и от перемещения точки ее приложения. Для малого перемещения  $dr$  с помощью силы  $F$ , на-

правленной под углом  $\alpha$  к направлению перемещения (и скорости), работа  $dA$  (рис. 3.1) равна:

$$dA = F dr \cos \alpha = F dS \cos \alpha. \quad (3.1)$$

Эту формулу можно короче записать через скалярное произведение:

$$dA = \vec{F} d\vec{r}. \quad (3.2)$$

Работа по перемещению для конечной траектории вычисляется интегрированием (3.2) или (3.1):

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F \cos \alpha dr = \int_1^2 F \cos \alpha dS = \int_1^2 F_s dS, \quad (3.3)$$

где  $F_s$  – проекция силы на направление перемещения.

Если сила и угол постоянны, то их можно вынести из-под знака интеграла, и работа определяется известной формулой

$$A = F S \cos \alpha. \quad (3.4)$$

Для вычисления интеграла (3.3) надо знать зависимость проекции силы  $F_s$  от пути  $S$  вдоль траектории 1–2. Если эта зависимость представлена графически кривой, то по свойству интеграла работа определяется на графике площадью фигуры под кривой (рис. 3.2).

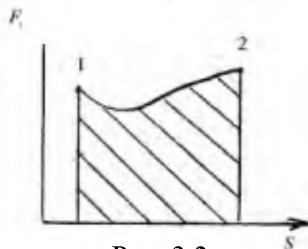


Рис. 3.2

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие мощности, характеризуемой работой, которая совершается в единицу времени. *Мощность определяется производной от работы по времени:*

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}. \quad (3.5)$$

Единица работы — джоуль (Дж): 1 Дж — работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м (1 Дж = 1 Н·м). Единица мощности — ватт (Вт): 1 Вт — мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с).

### **3.2. Энергия. Кинетическая и потенциальная энергия. Консервативные и диссипативные системы**

*Энергия — количественная мера различных видов движения материи. С разными видами движения материи связывают разные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную, химическую и др. Мерой передачи энергии от одного тела к другому может служить работа, а, например, в процессе теплообмена — количество теплоты. Энергия характеризует способность тела совершать работу.*

Кинетическая и потенциальная энергии являются двумя видами механической энергии.

*Кинетическая энергия — энергия механической системы, зависящая от скоростей движения ее точек. Сила, действующая на первоначально неподвижное тело и вызывающая его движение, совершает работу, идущую на увеличение кинетической энергии  $dT$  тела:  $dA = dT$ . Из определения работы и второго закона Ньютона:*

$$dA = Fdr = m \frac{dvdr}{dt} = mvdv = dT,$$

откуда получаем выражение для кинетической энергии

$$T = \int_0^v mvdv = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.6)$$

Видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела. В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, кинетическая энергия тела неодинакова.

*Потенциальная энергия — энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.* Понятие потенциальной энергии можно ввести, только если совершаемая силами работа не зависит от траектории движения тела и определяется только начальным и конечным положениями тела. При этом взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей, которые называются *потенциальными*, а силы, действующие в них, *консервативными*. Это, например, поля упругих, гравитационных, электростатических сил. Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то сила называется диссипативной; ее пример — сила трения.

Несложно показать, что поле является потенциальным, если работа по перемещению тела по любому замкнутому пути равна нулю

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = 0. \quad (3.7)$$

Еще более очевидно, что если работа по перемещению тела по замкнутому пути не равна нулю, то поле не может быть потенциальным, поскольку потенциальная энергия в одной и той же точке до и после перемещения принимала бы два разных значения.

### **3.3. Связь силы и потенциальной энергии. Условие равновесия**

Тело, находясь в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией  $\Pi$ . При перемещении тела в потенциальном поле работа совершается за счет убыли потенциальной энергии и поэтому имеет противоположный знак  $dA = -d\Pi$ , или

$$\vec{F} d\vec{r} = -d\Pi. \quad (3.8)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\Pi = -\int \vec{F} d\vec{r} + const, \quad (3.9)$$

где  $const$  — постоянная интегрирования.

Таким образом, потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной. Поскольку работа определяется разностью энергий начального и конечного состояний, то константа при этом взаимно уничтожается и вообще не является существенной. Поэтому эту константу, определяющую точку нуля потенциальной энергии, выбирают из соображений удобства. Например, для поля силы упругости за ноль обычно принимают энергию в положении равновесия, а для гравитационных и электростатических полей — энергию в удаленной в бесконечность точке.

Выразим силу через потенциальную энергию. Сделать это, поделив обе части (3.8) на  $d\vec{r}$ , нельзя, поскольку операция деления скаляра на вектор пока не определена. Чтобы решить проблему, воспользуемся математическим понятием *градиента*. По определению градиент скаляра  $\Pi$  ( $\text{grad } \Pi$ ) — это вектор с координатами  $(\frac{d\Pi}{dx}, \frac{d\Pi}{dy}, \frac{d\Pi}{dz})$ , или

$$\text{grad } \Pi = \frac{d\Pi}{dx} \vec{i} + \frac{d\Pi}{dy} \vec{j} + \frac{d\Pi}{dz} \vec{k}. \quad (3.10)$$

Градиент показывает направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой. Например, если взять высоту поверхности Земли над уровнем моря в двухмерном пространстве (долгота-широта), то ее градиент в каждой точке поверхности будет направлен в гору. Важно, что скалярное произведение градиента с бесконечно малым вектором перемещения дает полный дифференциал этой функции:

$$(\text{grad } \Pi, d\vec{r}) = \frac{d\Pi}{dx} dx + \frac{d\Pi}{dy} dy + \frac{d\Pi}{dz} dz. \quad (3.11)$$

Сравнивая (3.8) и (3.11), можно получить для консервативных сил

$$\vec{F} = -\text{grad } \Pi \equiv -\frac{d\Pi}{d\vec{r}} \quad (3.12)$$

или по координатам:

$$F_x = -\frac{d\Pi}{dx}, F_y = -\frac{d\Pi}{dy}, F_z = -\frac{d\Pi}{dz} \quad (3.13)$$

Вид функции  $\Pi$  зависит от характера силового поля. Так, потенциальная энергия тела массой  $m$ , поднятого на высоту  $h$ , находится из (3.8):

$$\Pi = mgh. \quad (3.14)$$

Найдем потенциальную энергию упругодеформированного тела (пружины). В соответствии с законом Гука, сила упругости  $F_{\text{упр}}$  пропорциональна деформации  $x$ :

$$F_{\text{упр}} = -kx, \quad (3.15)$$

где  $k$  — коэффициент упругости.

Таким образом, из (3.9)

$$\Pi = kx^2/2. \quad (3.16)$$

Заметим: *полная механическая энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий:*

$$E = T + \Pi. \quad (3.17)$$

Поговорим теперь о равновесии тел (когда тело сохраняет состояние покоя) и связи равновесия с потенциальной энергией. Из второго закона Ньютона следует, что *для равновесия невращающегося тела необходимо, чтобы геометрическая сумма всех приложенных внешних сил была равна нулю.*

В потенциальном поле это условие сводится к следующему (см. 3.12). Тело находится в равновесии, если оно находится в точке, в которой градиент потенциальной энергии равен нулю. Так, в одномерном случае достаточным условием равновесия является локальный экстремум в исследуемой точке (условием локального экстремума дифференцируемой функции является равенство нулю ее первой производной).

Различают три вида равновесия. *Когда функция потенциальной энергии имеет локальный максимум или перегиб, то равновесие неустойчиво.*

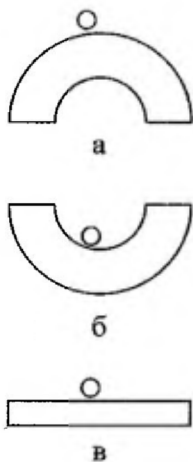


Рис. 3.3

тойчиво. В этом случае, если слегка сместить тело, то оно продолжит свое движение за счет возникшей отклоняющей силы.

Когда функция потенциальной энергии имеет локальный минимум, то равновесие устойчиво. В этом случае, если слегка сместить тело, то оно вернется назад в состояние равновесия за счет возникшей возвращающей силы.

Когда функция потенциальной энергии является константой, то положение равновесия — безразличное. В этом случае, если слегка сместить тело, то сила не возникнет, и оно останется в новом положении.

Шар в верхней точке сферической поверхности — пример неустойчивого равновесия (рис. 3.3, а). Шар на дне сферической поверхности находится в состоянии устойчивого равновесия (рис. 3.3, б).

А шар, лежащий на плоской горизонтальной поверхности, находится в состоянии безразличного равновесия (рис. 3.3, в).

Рассмотрим в качестве примера характерную зависимость потенциальной энергии, часто используемую при моделировании нанотехнологий. Это потенциал межмолекулярного взаимодействия, называемый потенциалом Леннарда-Джонса:

$$U(r) = A/r^{12} - B/r^6 = U_0[(r_0/r)^{12} - 2(r_0/r)^6], \quad (3.18)$$

где  $A$  и  $B$  — положительные постоянные;

$$A = U_0 r_0^{12}, \quad B = 2U_0 r_0^6.$$

На больших расстояниях молекулы (в соответствии с рис. 3.4) притягиваются, на малых резко вступает в силу отталкивание, в промежутке — положение равновесия. Несложно через производную определить, что  $r_0$  — равновесное расстояние между частицами, а  $U_0$  — глубина потенциальной ямы. Очевидно, что это положение устойчивого равновесия.

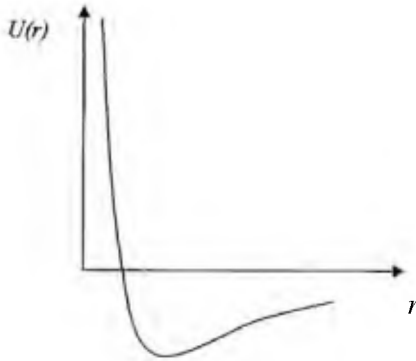


Рис. 3.4

### 3.4. Закон сохранения энергии

Идея закона сохранения энергии (материи, движения) принадлежит М. В. Ломоносову (1711–1765), причем формулировка этой идеи имеет глобальное толкование: все изменения, случающиеся в природе, происходят так, что если что-либо прибавится к чему-либо, то столько отнимется от чего-либо другого. Короче говоря, если в одном месте прибавится, то в другом убавится.

Выведем закон сохранения механической энергии из второго закона Ньютона. Используя понятие градиента (3.12), уравнение движения материальной точки в силовом поле можно представить в виде

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{d\Pi}{d\vec{r}}. \quad (3.19)$$

Умножим правую и левую части этого уравнения скалярно на вектор скорости частицы:

$$m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{d\Pi}{d\vec{r}} \vec{v} = - \frac{d\Pi}{d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} = - \frac{d\Pi}{dt}. \quad (3.20)$$

Преобразовав левую часть (3.20), получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}^2}{2} \right) = -\frac{d\Pi}{dt}, \quad (3.21)$$

или

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) = 0, \quad (3.22)$$

откуда после интегрирования следует *закон сохранения механической энергии E*:

$$E = T + \Pi = \text{const}. \quad (3.23)$$

(*полная механическая энергия консервативной системы сохраняется*). Существенно, что при выводе предполагалось, что потенциальная энергия частицы не зависит в явном виде от времени, а зависит лишь через радиус-вектор (см. 3.20).

Из закона сохранения механической энергии (3.23) следует, что  $T = E - \Pi(x)$ . Поскольку кинетическая энергия всегда неотрицательна, то уравнение

$$E - \Pi(x) \geq 0, \quad (3.24)$$

определяет доступные (с точки зрения классической механики) области движения (*границы движения*).

Закон сохранения механической энергии является частным случаем более общего *закона сохранения и превращения энергии*. И если в нашей системе действуют внешние силы и она становится неконсервативной, то изменение энергии системы равно работе внешних сил:

$$dT + d\Pi = dA. \quad (3.25)$$

Отметим в заключение, что закон сохранения и превращения энергии является следствием *однородности времени*, проявляющегося в неизменности физических законов с течением времени.

### 3.5. Упругое и неупругое соударение тел

Важным примером применения законов сохранения импульса и энергии является задача о соударении (столкновении, ударе) тел.

Такое соударение двух (или более) тел происходит за счет взаимодействия, которое обычно длится очень короткое время. Например, при соударении бильярдных шаров взаимодействие обеспечивается силами деформации шаров при соприкосновении. А соударение электронов и ионов в электрическом разряде происходит за счет кулоновского взаимодействия, которое велико лишь в мгновения наибольшего сближения частиц. Силы взаимодействия между сталкивающимися телами из-за малого времени процесса столь велики, что внешними силами в момент столкновения можно пренебречь. Поэтому систему тел при ударе можно рассматривать как замкнутую и применять к ней закон сохранения импульса.

Если суммарная кинетическая энергия тел после соударения равна их энергии до соударения (кинетическая энергия сохраняется), то соударение называют *упругим*. Если в процессе соударения происходит уменьшение суммарной кинетической энергии сталкивающихся тел, то соударение называют *неупругим*. *Абсолютно неупругим* ударом называют столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое. Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина. А, например, процесс ионизации молекулы быстрым электроном удобно рассматривать как упругое соударение с передачей энергии электрону молекулы энергии, превышающей потенциал ионизации.

Соударение называют *центральной* (лобовым), если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс. В противном случае соударение называется *боковым* (нецентральной).

Рассмотрим центральное упругое соударение быстрой частицы с неподвижной. Из соображений симметрии после центрального удара частицы по-прежнему могут двигаться только вдоль той же прямой, проходящей через их центры масс, так что задача сводится к одномерной. В этом случае справедливы скалярные законы сохранения импульса и кинетической энергии:

$$Mv = Mv_1 + mv_2; \quad (3.26)$$

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}, \quad (3.27)$$

где  $M$  — масса;

$v$  — скорость быстрой (первой) частицы до соударения;

$v_1$  — скорость быстрой частицы после соударения;

$m$  — масса;

$v_2$  — скорость второй частицы после соударения.

Поделив почленно закон сохранения энергии на закон сохранения импульса так, чтобы сократились массы (для этого члены с  $M$  надо перенести в левую часть системы), получим

$$v + v_1 = v_2. \quad (3.28)$$

Подставив скорость первой частицы после соударения в (3.26), получим

$$v_2 = \frac{2M}{M+m}v. \quad (3.29)$$

Важным параметром для электроники и новых технологий является доля энергии  $\xi$ , теряемая быстрой частицей в столкновении. Она находится как отношение потери энергии  $\Delta E$  первой частицей к первоначальной энергии  $E$ . Очевидно, что при упругом столкновении потеря энергии  $\Delta E$  первой частицы равна энергии, приобретенной второй частицей  $E_2$ :

$$\Delta E = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{2M^2mv^2}{(M+m)^2}. \quad (3.30)$$

отсюда имеем

$$\xi = \frac{2M^2mv^2}{(M+m)^2} : \frac{Mv^2}{2} = \frac{4Mm}{(M+m)^2}. \quad (3.31)$$

Рассмотрим случаи наиболее важных соотношений масс (одинаковых, различных, существенно различных). При этом разными получаются направления скоростей и доля переданной энергии.

Результат математически подтверждает наблюдение, что *наиболее эффективный обмен энергией при упругих соударениях возможен между частицами со сравнимой массой*. В частности, при центральном соударении частиц с одинаковой массой ( $M = m$ ) из (3.31) имеем  $\xi = 1$ , что означает полную передачу энергии от налетающей частицы к неподвижной и полную остановку первой частицы в результате удара.

Если же массы соударяющихся частиц существенно различны, то в знаменателе формулы (3.31) можно пренебречь легкой массой по сравнению с тяжелой. Так, если быстрая частица более массивная ( $M \gg m$ ), то

$$\xi = \frac{4m}{M} \ll 1. \quad (3.32)$$

Если быстрая частица менее массивная ( $M \ll m$ ), получим

$$\xi = \frac{4M}{m} \ll 1. \quad (3.33)$$

Результат в двух последних случаях показывает, что при центральном столкновении частиц с существенно различной массой доля передаваемой энергии невелика. Это справедливо независимо от того, какая частица тяжелее — быстрая или неподвижная. Частным случаем (3.33) является, например, столкновение шара со стеной.

Полученные зависимости играют большую роль в электронике. Так, из (3.33) следует, что ускоренный электрон при столкновении с атомами и ионами может передать им лишь тысячную долю энергии и менее. Легкие электроны быстро ускоряются в электрическом поле, но медленно передают свою энергию окружающим тяжелым частицам. В результате в разрядных и других электронных приборах часто температура электронов оказывается во много раз выше температуры атомов. Так, в газоразрядных осветительных лампах тем-

пература атомов и колбы составляет сотни, а температура электронов разряда — тысячи кельвинов. Это позволяет горячим электронам эффективно возбуждать (с последующим свечением) атомы. Здесь и в других приборах отрыв температур способствует их высокой полезной мощности и экономичности.

А, например, в соответствии с (3.32) ускоренные атомы и ионы способны отдавать лишь малую часть своей энергии на ионизацию и возбуждение молекул среды.

Знание относительной потери энергии позволяет оценить число упругих центральных столкновений  $Q$ , требуемых для практически полного торможения быстрой частицы:

$$Q \approx \frac{1}{\xi} \approx \frac{m_T}{m_n}, \quad (3.34)$$

где  $m_T$  и  $m_n$  — массы соответственно тяжелой и легкой сталкивающихся частиц.

Так, даже для соударений быстрых электронов с ядрами атомов водорода — протонами  $Q \approx 1000$ . Однако число необходимых для торможения соударений может заметно превышать даже эту большую величину. Далеко не все соударения частиц центральные. Обычно частицы при столкновении лишь слегка задевают одна другую, так что передача энергии при этом меньше, чем при центральном ударе. Такие боковые удары играют большую роль в теории столкновений. Учет их требует введения понятия “сечение столкновения”.

Из формул видно, каким становится направление движения тел после столкновения. Опыт игры в бильярд показывает, что движущийся шар остановится уже при первом упругом центральном столкновении с другим точно таким же, но неподвижным шаром (рис. 3.5, а). А легкий шар при упругом соударении просто отскакивает от тяжелого и изменяет направление своего движения (и векторную характеристику движения — импульс), почти не меняя своей энергии (рис. 3.5, б). Наоборот, тяжелый шар, придавая скорость легкому, сохраняет направление своего движения (рис. 3.5, в).

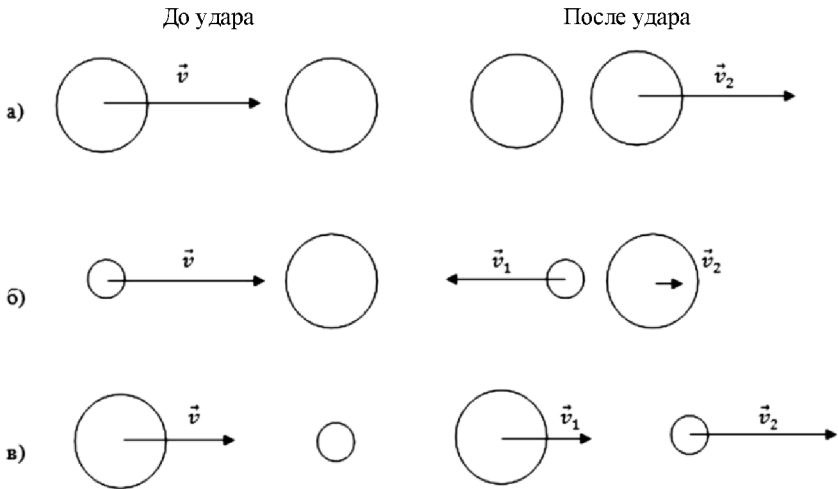


Рис. 3.5

Рассмотрим теперь центральный абсолютно неупругий удар, когда тело массы  $M$  и скорости  $V$  сталкивается с неподвижным телом массы  $m$ . Закон сохранения импульса в этом случае имеет вид

$$MV = (M+m)v, \quad (3.35)$$

где  $v$  — скорость тел после соударения.

Очевидно,

$$v = \frac{MV}{M+m}. \quad (3.36)$$

Последняя формула позволяет получить ряд достаточно очевидных выводов. При неупругом ударе тяжелого тела по легкому в тепловые потери идет малая доля кинетической энергии. Если легкое тело бьет по тяжелому, то почти вся энергия уходит в тепло. Если массы тел сравнимы, то конечная кинетическая энергия системы сравнима с тепловыми потерями.

Если соударение является нецентральной (боковым), то в общем случае необходимо учитывать векторный характер закона со-

хранения импульса, который распадается на три уравнения по координатам. Впрочем, для важного случая столкновения одинаковых по массе частиц можно получить интересный результат без координатного рассмотрения. По аналогии с (3.26) и (3.27)

$$M\vec{v} = M\vec{v}_1 + M\vec{v}_2, \quad (3.37)$$

$$\frac{M\vec{v}^2}{2} = \frac{M\vec{v}_1^2}{2} + \frac{M\vec{v}_2^2}{2}. \quad (3.38)$$

Выразив начальную скорость быстрой частицы из (3.37) и подставив ее в (3.38), получим

$$\vec{v}_1\vec{v}_2 = 0.$$

В данном случае скалярное произведение обращается в ноль в двух случаях. Во-первых, если конечная скорость быстрой частицы равна нулю — этот случай центрального удара мы рассматривали выше. А для бокового удара остается случай, когда угол между конечными скоростями частиц прямой. Таким образом, *после бокового удара налетающей частицы по неподвижной частице той же массы частицы разлетаются под прямым углом*. Этот вывод существенно упрощает рассмотрение ионизации и возбуждения атомов электронным ударом.

## **4. Кинематика и динамика вращательного движения твердого тела**

### **4.1. Кинематика твердого тела. Угловое перемещение, угловая скорость, угловое ускорение**

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Точки этого тела при вращательном движении описывают окруж-

ности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения. При этом все точки поворачиваются за время  $dt$  на одинаковый угол  $d\varphi$ . Пусть некоторая точка  $i$  движется по окружности, описываемой радиус-вектором  $\vec{r}_i(t)$  (рис. 4.1). Угол поворота  $\varphi$  во вращательном движении является аналогом пройденного пути  $S$  в поступательном движении.

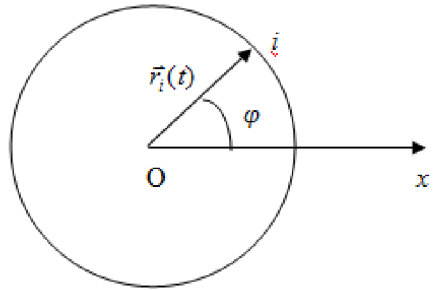


Рис. 4.1

Уравнения движения в нашем трехмерном мире наиболее информативны в векторном виде. Поэтому необходимо задать *вектор углового перемещения*  $d\vec{\varphi}$  во вращательном движении как аналог векторного перемещения  $d\vec{r}$  в поступательном движении. Этот вектор не может быть направлен по направлению движения точки, поскольку при вращении разные точки движутся в разных и меняющихся направлениях, а вектор углового перемещения должен характеризовать направление вращения тела в целом. Поэтому направление вектора  $d\vec{\varphi}$  (точнее — псевдовектора, поскольку его можно откладывать из любой точки оси) зададим направлением поступательного движения острия правого винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности. При таком определении по *правилу правого винта* вектор углового перемещения для любой точки тела направлен в одном направлении.

Введем теперь понятие угловой скорости  $\vec{\omega}$ , характеризующей быстроту вращения тела. По аналогии с поступательным движением

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (4.1)$$

причем вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  имеет то же направление, что и  $d\vec{\varphi}$ .

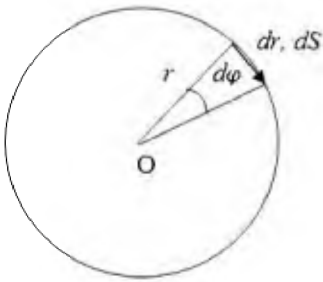


Рис. 4.2

Линейная скорость точки (рис. 4.2) связана с угловой скоростью соотношением

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\varphi}{dt} = \omega r. \quad (4.2)$$

Если уравнение (4.2) записать в векторном виде, то оно свяжет вектора скорости, угловой скорости и радиуса окружности по правилу правого винта.

В обобщенном трехмерном виде уравнения (рис. 4.3) правилу правого винта соответствует векторное произведение

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}], \quad (4.3)$$

где  $\vec{r}$  — в общем случае трехмерный (а не двумерный) радиус-вектор произвольной точки тела.

Если вектор угловой скорости постоянен, то вращение называют *равномерным* с периодом  $T$  и частотой вращения  $n$ :

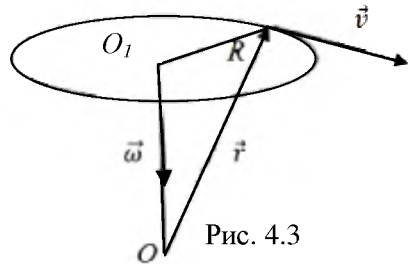


Рис. 4.3

$$T = 2\pi/\omega = 1/n. \quad (4.4)$$

Дадим теперь по аналогии с поступательным движением определение углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  как быстроты изменения угловой скорости:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (4.5)$$

Опять же по аналогии при ускоренном движении вектор углового ускорения сонаправлен вектору угловой скорости, при замедленном — противоположен ему (в обоих случаях направлен в сторону элементарного приращения угловой скорости). Угловое ускорение можно связать с тангенциальным ускорением (1.11) с помощью (4.2):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon. \quad (4.6)$$

В свою очередь, угловую скорость удобно связать с нормальным ускорением (1.13):

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \quad (4.7)$$

Если сложить с помощью теоремы Пифагора тангенциальное и нормальное ускорения, то получим для *модуля полного ускорения*:

$$a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (4.7a)$$

## 4.2. Работа при вращательном движении. Момент силы

Рассмотрим работу, совершаемую при вращении материальной точки по окружности под действием проекции действующей силы на перемещение (тангенциальной составляющей силы). В соответствии с (3.1) и рис. 4.4, перейдя от параметров поступательного движения к параметрам вращательного движения ( $dS = R d\varphi$ ),

$$\begin{aligned} dA &= F_S dS = \\ &= F_S R d\varphi = M d\varphi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь введено понятие момента силы относительно оси вращения  $OO_1$  как произведение силы  $F_S$  на плечо силы  $R$ :

$$M = F_S R. \quad (4.9)$$

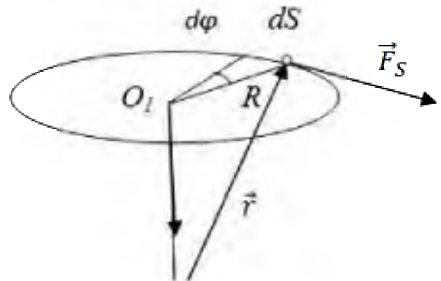


Рис. 4.4

Рис. 4.4

Как видно из соотношения (4.8), момент силы во вращательном движении является аналогом силы в поступательном движении, поскольку оба параметра при умножении на аналоги  $d\varphi$  и  $dS$  дают работу. Очевидно, момент силы тоже должен задаваться векторно, причем относительно точки  $O$  его определение дается через векторное произведение и имеет вид

$$\vec{M} = [\vec{R}\vec{F}]. \quad (4.9a)$$

Окончательно: работа при вращательном движении равна скалярному произведению момента силы на угловое перемещение:

$$dA = \vec{M} d\vec{\varphi}. \quad (4.10)$$

### 4.3. Кинетическая энергия при вращательном движении. Момент инерции

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся относительно неподвижной оси. Мысленно разобьем это тело на бесконечно малые кусочки с бесконечно малыми размерами и массами  $m_1, m_2, m_3 \dots$ , находящиеся на расстоянии  $R_1, R_2, R_3 \dots$  от оси. Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его малых частей:

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} m_i R_i^2 = \frac{J \omega^2}{2}; \quad (4.11)$$

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} m_i R_i^2, \quad (4.12)$$

где  $J$  — момент инерции твердого тела, относительно данной оси  $OO_1$ .

Из сопоставления формул кинетической энергии поступательного и вращательного движений видно, что момент инерции во вращательном движении является аналогом массы в поступательном движении. Формула (4.12) удобна для расчета момента инерции систем, состоящих из отдельных материальных точек. Для расчета

момента инерции сплошных тел, воспользовавшись определением интеграла, можно преобразовать (4.12) к виду

$$J = \int R^2 dm. \quad (4.13)$$

Несложно заметить, что момент инерции зависит от выбора оси и меняется при ее параллельном переносе и повороте. Приведем значения моментов инерции для некоторых однородных тел.

Из (4.12) видно, что момент инерции материальной точки равен

$$J_T = mR^2, \quad (4.14)$$

где  $m$  — масса точки;

$R$  — расстояние до оси вращения.

Несложно вычислить момент инерции и для *полого тонкостенного цилиндра* (или частного случая цилиндра с малой высотой — *тонкого кольца*) радиуса  $R$  относительно оси симметрии. Расстояние до оси вращения всех точек для такого тела одинаково, равно радиусу и может быть вынесено из-под знака суммы (4.12):

$$J_{\text{тц}} = \sum_{i=1}^{\infty} m_i R_i^2 = R^2 \sum_{i=1}^{\infty} m_i = mR^2. \quad (4.15)$$

*Сплошной цилиндр* (или частный случай цилиндра с малой высотой — *диск*) радиуса  $R$  для расчета момента инерции относительно оси симметрии требует вычисления интеграла (4.13). Масса в этом случае в среднем сосредоточена несколько ближе к оси, чем в случае полого цилиндра, и формула будет похожа на (4.15), но в ней появится коэффициент, меньший единицы. Найдем этот коэффициент.

Пусть сплошной цилиндр имеет плотность  $\rho$  и высоту  $h$ . Разобьем его на полые цилиндры (тонкие цилиндрические поверхности) толщиной  $dr$  (на рис. 4.5 показана проекция, перпендикулярная оси симметрии). Объем такого полого цилиндра радиуса  $r$  равен площади поверхности, умноженной на толщину:  $dV = 2\pi rh dr$ , масса:  $dm = 2\pi\rho hr dr$ , а момент инерции в соответствии с (4.15):  $dJ = r^2 dm = 2\pi\rho hr^3 dr$ .

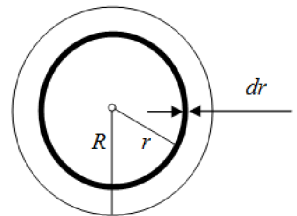


Рис. 4.5

Полный момент инерции сплошного цилиндра получается интегрированием (суммированием) моментов инерции полых цилиндров:

$$J = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \rho h R^4.$$

С учетом того, что масса сплошного цилиндра связана с плотностью формулой  $m = \pi R^2 h \rho$  имеем окончательно момент инерции сплошного цилиндра:

$$J_{\text{цл}} = \frac{mR^2}{2}. \quad (4.16)$$

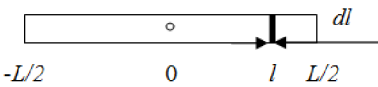


Рис. 4.6

Аналогично ищется *момент инерции тонкого стержня* длины  $L$  и массы  $m$ , если ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его середину. Разобьем такой стержень в соответствии с рис. 4.6 на кусочки толщиной  $dl$ . Масса такого кусочка равна  $dm = m dl/L$ , а момент инерции в соответствии с (4.15)  $dJ = l^2 dm = l^2 m dl/L$ . Полный момент инерции тонкого стержня получается интегрированием (суммированием) моментов инерции кусочков:  $J = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} l^2 dl$ . Взятие элементарного интеграла дает момент инерции тонкого стержня длины  $L$  и массы  $m$ :

$$J_c = \frac{mL^2}{12}. \quad (4.17)$$

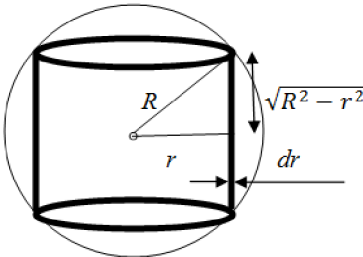


Рис. 4.7

Несколько сложнее берется интеграл при поиске *момента инерции однородного шара* радиуса  $R$  и массы  $m$  относительно оси симметрии. Пусть сплошной шар имеет плотность  $\rho$ . Разобьем его в соответствии с рис. 4.7 на полые тонкие цилиндры толщиной  $dr$ , ось симметрии которых совпадает с осью вращения шара. Объем такого полого цилиндра радиуса  $r$  равен площади поверхности, умноженной на толщину:

$$dV = 2\pi r h dr = 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2} dr,$$

где высота цилиндра  $h$  найдена с использованием теоремы Пифагора:

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Тогда несложно найти массу полого цилиндра:

$$dm = 4\pi\rho r \sqrt{R^2 - r^2} dr,$$

а также момент инерции в соответствии с (4.15):

$$dJ = r^2 dm = 4\pi\rho r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr.$$

Полный момент инерции сплошного шара получается интегрированием (суммированием) моментов инерции полых цилиндров:

$$\begin{aligned} J &= 4\pi\rho \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr = 2\pi\rho \int_0^R r^2 \sqrt{R^2 - r^2} d(r^2) = \\ &= -2\pi\rho \int_0^R r^2 \sqrt{R^2 - r^2} d(R^2 - r^2) = \frac{8}{15} \pi\rho R^5. \end{aligned}$$

С учетом того, что масса сплошного шара связана с плотностью формулой  $m = \frac{4}{3} \pi\rho R^3$ , имеем окончательно момент инерции относительно оси симметрии однородного шара радиуса  $R$  массы  $m$ :

$$J_{\text{ш}} = \frac{2mR^2}{5}. \quad (4.18)$$

## 4.4. Теорема Штейнера

Понять то, как меняется момент инерции при параллельном переносе оси, помогает теорема Штейнера. Для ее доказательства рассмотрим произвольное твердое тело массы  $m$  в проекции, перпендикулярной оси вращения  $O$ , проходящей через центр масс тела (рис. 4.8). Рассмотрим другую произвольную ось вращения  $O_1$ , параллельную оси  $O$  и расположенную на расстоянии  $a$  от нее.

Момент инерции относительно оси  $O$  равен:

$$J_0 = \sum_{i=1}^{\infty} m_i R_i^2. \quad (4.19)$$

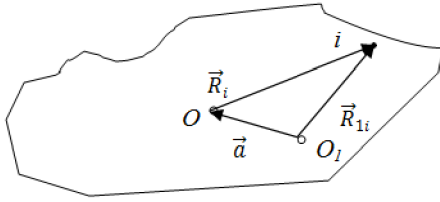


Рис. 4.8

Аналогично момент инерции относительно оси  $O_1$

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} m_i R_{1i}^2. \quad (4.20)$$

Воспользовавшись тем, что квадрат вектора равен квадрату его модуля и  $\vec{R}_{1i} = \vec{R}_i + \vec{a}$ , получим

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} m_i R_{1i}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} m_i (\vec{R}_i + \vec{a})^2 = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{R}_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{a}^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{R}_i \vec{a} = J_0 + \vec{a}^2 \sum_{i=1}^{\infty} m_i + 2\vec{a} \sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{R}_i. \quad (4.21)$$

По определению центра масс последняя сумма равна нулю, откуда следует:

$$J = J_0 + ma^2. \quad (4.22)$$

Это и есть теорема Штейнера: *Момент инерции тела относительно произвольной оси вращения равен сумме момента инерции этого тела, взятого относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.*

Из теоремы Штейнера следует, что *момент инерции минимален относительно оси, проходящей через центр масс тела.*

Теорема позволяет, например, из (4.17) вычислить момент инерции для *тонкого стержня* длины  $L$ , если ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его конец:

$$J_c = \frac{mL^2}{3}. \quad (4.23)$$

## 4.5. Уравнение динамики вращательного движения

Если на тело действует момент силы  $M$ , то оно начинает вращаться. При этом работа приложенной силы  $dA$  идет на увеличение кинетической энергии вращения  $dT$ :  $dA=dT$  или  $Md\varphi = d\frac{J\omega^2}{2}$ ;  $M\omega dt = J\omega d\omega$ .

После преобразований имеем основное уравнение динамики вращательного движения:

$$M=J\varepsilon, \quad (4.24)$$

или в векторном виде:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}. \quad (4.25)$$

Оно является аналогом второго закона Ньютона, причем вместо силы, массы и ускорения фигурируют их аналоги: момент силы, момент инерции, угловое ускорение.

Сформулируем теперь окончательно два условия равновесия тел (когда тело сохраняет состояние покоя). Из второго закона Ньютона, как показано выше, следует, что *для равновесия тела необходимо, чтобы геометрическая сумма всех приложенных внешних сил была равна нулю*. Из основного уравнения динамики вращательного движения следует, что *для равновесия тела необходимо, чтобы геометрическая сумма всех приложенных внешних моментов сил была равна нулю*.

## 4.6. Закон сохранения момента импульса

Основное уравнение динамики вращательного движения (4.25) можно переписать в более общем виде:

$$\vec{M} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (4.26)$$

где введено понятие *момента импульса* (аналога импульса):

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (4.27)$$

Для материальной точки из (4.14):

$$L = mr^2\omega = rmv = rp,$$

или в векторном виде

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]. \quad (4.28)$$

Таким образом, в соответствии с (4.26): производная от момента импульса тела по времени равна моменту внешних сил.

В частном случае, когда момент внешних сил равен нулю, из (4.26) следует:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \text{ или } \vec{L} = \overline{const}. \quad (4.29)$$

Это и есть *закон сохранения момента импульса*: Если момент внешних сил, действующих на тело относительно некоторой оси, равен нулю, то момент импульса тела относительно этой оси сохраняется.

Закон сохранения момента импульса является следствием *изотропии пространства* — предположения о том, что все направления в пространстве равноправны. Следует отметить, что он может соблюдаться и для незамкнутой системы, в случае действия внешних *центральных сил*. Сила называется центральной, если направление действующей на тело силы при любом положении тела проходит через фиксированную точку. Тогда момент силы относительно проходящей через эту точку оси равен нулю, и момент импульса сохраняется. Такая ситуация имеет место для вращения Земли вокруг Солнца и электрона вокруг ядра атома.

Закон сохранения момента импульса разнообразно проявляется в жизни. Именно благодаря ему двухколесный велосипед не падает, пока крутятся (и имеют заметный момент импульса) колеса. То же можно сказать о вращающемся волчке.

Из технических применений закона можно отметить гироскоп — быстро вращающееся тело, ось вращения которого способна менять ориентацию в пространстве. Он способен сохранять в пространстве

неизменное направление оси вращения. Гироскопы используются в навигации, в частности в системах ориентации и стабилизации космических аппаратов.

Упомянем здесь еще известный в механике волчок Томсона (рис. 4.9), представляющий собой шарик со срезанной макушкой, к которой прикреплена ручка волчка. Если раскрутить такой волчок, то он может перевернуться и продолжить крутиться, стоя на ручке. Такой неожиданный эффект можно объяснить с помощью основного уравнения динамики вращательного движения. Существенно, что наша планета Земля не является абсолютно стабильным и идеальным механическим и магнитным объектом и ее механический и магнитный моменты меняются со временем. Поэтому высказываются гипотезы о том, что механический и магнитный моменты могут поменять свое направление на противоположное (или какое-то иное).

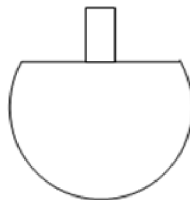


Рис. 4.9

## 4.7. Аналогия между поступательным и вращательным движением

Эта аналогия обсуждалась выше и следует из подобия основных уравнений поступательного и вращательного движения. Как ускорение дается производной по времени скорости и второй производной перемещения, так угловое ускорение дается производной по времени угловой скорости и второй производной углового перемещения. Аналогии мгновенных характеристик поступательного и вращательного движения приведены ниже.

*Поступательное движение*

Перемещение  $d\vec{r}$

Скорость  $\vec{v}$

Ускорение  $\vec{a}$

Сила  $\vec{F}$

*Вращательное движение*

Угловое перемещение  $d\vec{\varphi}$

Угловая скорость  $\vec{\omega}$

Угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}$

Момент силы  $\vec{M}$

Масса $m$	Момент инерции $J$
Импульс $\vec{p}$	Момент импульса $\vec{L}$
Поступательная энергия $\frac{mv^2}{2}$	Вращательная энергия $\frac{J\omega^2}{2}$
Работа $\vec{F}d\vec{r}$	Работа $\vec{M}d\vec{\varphi}$
Основной закон $\vec{F} = m\vec{a}$	Основной закон $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$
Время $t$	Время $t$

Рассмотрим, как можно вывести формулу по аналогии. Например, в поступательном движении известная формула (3.5) для мощности имеет вид:  $N = \vec{F}\vec{v}$ . Получим менее известную формулу для мощности при вращательном движении, заменив правую часть формулы на аналог:

$$N = \vec{M}\vec{\omega}. \quad (4.30)$$

## 5. Гармонические и затухающие колебания

### 5.1. Гармонические колебания. Свободные колебания системы

*Колебаниями называются движения или процессы, обладающие той или иной повторяемостью во времени.* Примеры колебаний: колебания маятника, колебания закрепленного на пружине грузика, колебание величины заряда конденсатора в колебательном контуре. *Колебания называются свободными, если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на систему.* Свободные колебания могут быть, например, гармоническими и затухающими.

*Гармонические колебания* — это колебания, при которых колеблющаяся величина  $x$  изменяется со временем по закону косинуса (либо синуса):

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (5.1)$$

где  $A$  — амплитуда;

$\omega$  — циклическая частота;

$\alpha$  — начальная фаза;

$(\omega t + \alpha)$  — фаза.

Начальная фаза  $\alpha$  — это значение фазы в начальный момент времени. Амплитуда колебания  $A$  — это наибольшее значение колеблющейся величины. При изменении фазы на  $2\pi$  косинус возвращается к прежнему значению. Время  $T$  одного полного колебания называется периодом колебания. Поскольку  $\omega T = 2\pi$ , то

$$T = 2\pi/\omega. \quad (5.2)$$

Частотой  $\nu$  называют величину, обратную периоду. Единица измерения частоты — герц (Гц),  $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$ .

График гармонического колебания представлен на рис. 5.1.

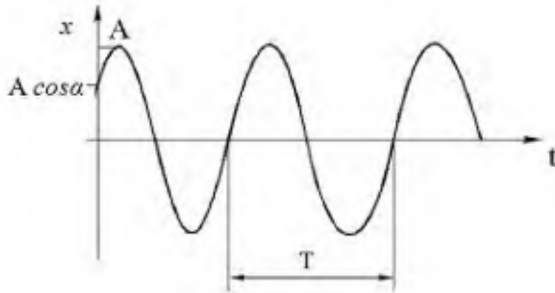


Рис. 5.1

## 5.2. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение

Рассмотрим колебания *физического маятника* — любого тела, совершающего колебания относительно горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс.

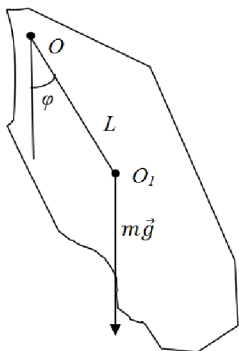


Рис. 5.2

Пример физического маятника изображен на рис. 5.2 (здесь  $O$  — ось вращения тела,  $O_1$  — центр масс тела,  $L$  — расстояние между центром масс и осью вращения). Из основного уравнения динамики вращательного движения (4.24):

$$M = J\varphi'',$$

где момент силы  $M = -mgL \sin\varphi$  (знак минус отражает то, что при положительном угловом перемещении момент силы отрицателен);

$\varphi''$  — вторая производная углового перемещения по времени.

Для малых колебаний и малых углов  $\sin\varphi \approx \varphi$ . После преобразований получим

$$\varphi'' + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (5.3)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{mgL}{J}$ .

Из теории известно, что дифференциальное уравнение гармонических колебаний (5.3) имеет решение вида (5.1):

$$\varphi(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (5.4)$$

В этом несложно убедиться, подставив решение (5.4) в уравнение (5.3), обращаящее его в тождество. Период колебаний (5.2) физического маятника равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgL}}. \quad (5.5)$$

Частным случаем физического маятника является *математический маятник*, в котором вся масса колеблющегося тела сосредоточена в центре масс  $O_1$  (рис. 5.2). При этом из (4.14)  $J = mL^2$  и

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (5.6)$$

Коротко рассмотрим еще два примера гармонических колебаний. Начнем с колебаний грузика массы  $m$ , прикрепленного к пружине жесткостью  $k$  (рис. 5.3). Подставив силу упругости пружины

$$F = -kx \quad (5.7)$$

во второй закон Ньютона, получим  $mx'' = -kx$  или по аналогии с (5.3)

$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad (5.8)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

Аналогично (5.4) координата грузика колеблется по гармоническому закону

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (5.9)$$

с периодом колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (5.10)$$

В заключение рассмотрим колебания заряда в колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью  $L$  и конденсатора емкостью  $C$  (рис. 5.4). В такой системе, как известно, разность потенциалов  $U_C$  на конденсаторе связана с зарядом  $q$  конденсатора формулой  $U_C = q/C$ , а разность потенциалов на катушке (эдс самоиндукции) определяется производной тока  $I$  по времени (и второй производной заряда по времени):

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}.$$

Из схемы видно, что эти разности потенциалов равны, откуда получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}$$

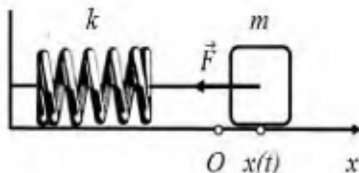


Рис. 5.3

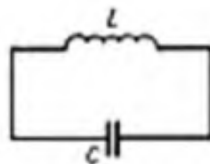


Рис. 5.4

или по аналогии с (5.3)

$$q'' + \omega_0^2 q = 0, \quad (5.11)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Аналогично (5.4) заряд колеблется по гармоническому закону:

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (5.12)$$

с периодом колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (5.13)$$

*Система, способная совершать гармонические колебания, называется гармоническим осциллятором.*

### **5.3. Затухающие колебания. Коэффициент затухания, декремент, логарифмический декремент, время релаксации**

В реальных случаях колебательная система всегда теряет энергию колебаний — имеет место затухание колебаний. В механических колебаниях при небольших амплитудах диссипативная сила (сила сопротивления) часто пропорциональна скорости  $\vec{v}$  колеблющегося тела. Чем больше скорость, тем больше сила. Это может быть справедливо, например, для тела, совершающего колебания в вязком воздухе или жидкости. А в колебательном контуре потеря энергии колебаний идет на выделение тепла на активном сопротивлении  $R$  (например, проводов). Такие процессы подобны и описываются уравнением затухающих колебаний.

Рассмотрим затухающие колебания, происходящие в физическом маятнике. Пусть сила сопротивления

$$F_c = -rv = -rL\omega = -rL\dot{\varphi}, \quad (5.14)$$

где  $r$  — коэффициент сопротивления, зависящий от свойств среды и формы маятника (знак “минус” отражает то, что сила направлена в сторону, противоположную скорости).

Из основного уравнения динамики вращательного движения (4.24)  $M = J\varphi''$ , где суммарный момент сил  $M = -mgL\varphi - rL^2\varphi'$ .

После преобразований получим

$$\varphi'' + 2\beta\varphi' + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (5.15)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{mgL}{J}$ ;

$\beta = \frac{rL^2}{2J}$  — коэффициент затухания.

Из теории известно, что решение уравнения (5.15) зависит от знака параметра:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (5.16)$$

Если этот параметр положителен, то решение имеет вид

$$\varphi(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (5.17)$$

В этом несложно убедиться, подставив (5.17) в (5.15). Именно в наложении задающей скорость затухания экспоненты на синус (рис. 5.5) математический смысл затухающих колебаний.

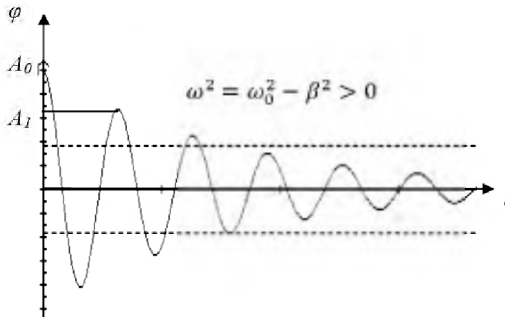


Рис. 5.5

Экспоненциальную функцию при косинусе

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \quad (5.18)$$

называют амплитудой затухающих колебаний. Из (5.16) следует, что для затухающего физического маятника частота колебаний несколько меньше, чем для незатухающего. При увеличении коэффициента затухания  $\beta$  период затухающих колебаний растет, причем при  $\beta \rightarrow \omega_0$  период  $T \rightarrow \infty$ . При  $\beta = \omega_0$  решение (5.17) перестает быть периодическим и вырождается в экспоненциальное затухание. При  $\beta > \omega_0$  в аргументе косинуса (5.17) оказывается мнимая величина, и движение опять оказывается аperiodическим.

Коэффициент затухания  $\beta$  показывает, насколько быстро затухают колебания. Часто более наглядным оказывается *декремент затухания, показывающий, во сколько раз уменьшается амплитуда за одно колебание*:

$$\gamma = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}. \quad (5.19)$$

Быстроту затухания на практике также характеризуют *логарифмическим декрементом затухания, который показывает количество колебаний  $N_e$ , приводящих к уменьшению амплитуды в  $e$  раз*:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \quad (5.20)$$

Приведем еще один полезный временной параметр. *Время релаксации — это время  $\tau$ , за которое амплитуда уменьшилась в  $e$  раз*, т. е.  $A(\tau) = A_0 e^{-1}$ . Очевидно, что  $\tau = TN_e$ .

Рассмотрим теперь *затухающие колебания грузика на пружинке*. По аналогии с (5.8) получим

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0, \quad (5.21)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ;

$\beta = \frac{r}{2m}$  — коэффициент затухания.

Аналогично (5.17) координата грузика колеблется по гармоническому закону:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (5.22)$$

где  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ .

Наконец, рассмотрим *затухающие колебания заряда в колебательном контуре*, состоящем из катушки индуктивностью  $L$ , конденсатора емкостью  $C$  и резистора сопротивлением  $R$ . Из закона Ома имеем  $R \frac{dq}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q}{C}$  или по аналогии с (5.11)

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0, \quad (5.23)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  
 $\beta = \frac{R}{2L}$ .

Аналогично (5.17) заряд колеблется по закону

$$q(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (5.24)$$

## 6. Сложение колебаний. Вынужденные колебания

### 6.1. Представления колебаний

Часто тело участвует одновременно в двух или нескольких колебательных движениях, причудливо складывающихся друг с другом. Для того чтобы описать такую систему, надо иметь математический аппарат для сложения колебаний. Начнем с представлений колебаний. Колебательное движение может быть задано в аналитическом виде (формулой) и в графическом виде (в виде векторной диаграммы). Пример аналитического задания колебательного движения:  $\varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ . Векторная диаграмма — это способ графического задания колебательного движения в виде вектора. При графическом задании (рис. 6.1) колебательного движения вдоль гори-

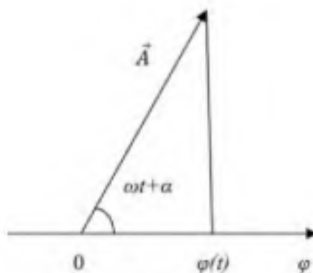


Рис. 6.1

графическом задании (рис. 6.1) колебательного движения вдоль гори-

горизонтальной оси откладывается колеблющаяся величина, например,  $\varphi$  ( $x$ ,  $q$  и т. д.). Вектор  $\vec{A}$ , отложенный из точки  $O$ , равен по модулю амплитуде колебания  $A$  и первоначально направлен под углом  $\alpha$ , равным начальной фазе колебания, к оси  $\varphi$ . Если вращать этот вектор с угловой скоростью  $\omega$ , равной циклической частоте колебаний, то проекция этого вектора на ось  $\varphi$  (косинус) дает значение колеблющейся величины в произвольный момент времени. Векторная диаграмма помогает наглядно складывать колебания в достаточно сложных случаях.

## 6.2. Сложение колебаний одинаковой частоты и одинакового направления

Пусть складываются два колебания:  $\varphi_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$  и  $\varphi_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ , так что получается результирующее искомое колебание

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (6.1)$$

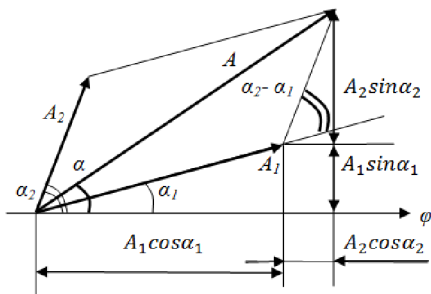


Рис. 6.2

Чтобы понять точнее, как будет выглядеть результирующее колебание, сложим колебания с помощью векторной диаграммы в начальный момент времени (рис. 6.2). Так как исходные векторы в последующее время вращаются с одинаковой угловой частотой, то и результирующий вектор имеет ту же частоту. Разность фаз между векторами остается постоянной. Действительно, по теореме косинусов из рис. 6.2 получим

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (6.2)$$

Из рис. 6.2 также видно, что для начальной фазы результирующего колебания  $\alpha$ :

$$\operatorname{tga} = \frac{A_1 \sin a_1 + A_2 \sin a_2}{A_1 \cos a_1 + A_2 \cos a_2}. \quad (6.3)$$

Рассмотрим теперь несколько других примеров сложения колебаний.

### 6.3. Сложение колебаний близких частот. Биения

Пусть частоты складываемых колебаний близки, а амплитуды равны. Для простоты выберем начальный момент, когда обе начальные фазы равны нулю. Тогда имеем для колебаний

$$\varphi_1(t) = A \cos(\omega t) \text{ и } \varphi_2(t) = A \cos((\omega + \Delta\omega)t), \quad \Delta\omega \ll \omega. \quad (6.4)$$

Поскольку сумма косинусов равна удвоенному произведению косинуса полуразности углов на косинус полусуммы, имеем для результирующего колебания:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) \approx \\ &\approx 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Произведение косинусов с существенно различной частотой дает характерную картину результирующего колебания — картину *биений* (рис. 6.3). Это картина почти гармонических колебаний с высокой частотой  $\omega$ , амплитуда которых медленно меняется с частотой  $\Delta\omega$ . Эта переменная амплитуда равна  $\left|2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right|$ .

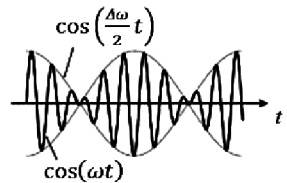


Рис. 6.3

Знак модуля возник из-за того, что амплитуда

по определению больше нуля. Благодаря этому модулю частота изменения амплитуды увеличивается вдвое и равна не  $\Delta\omega/2$ , а  $\Delta\omega$ .

Физический смысл биений в том, что близкие по частоте колебания то усиливают друг друга (находясь в одинаковой фазе), то ослабляют (находясь в противофазе). Таким образом, если имеются два источника звука с близкими частотами, то результирующее колебание будет иметь периодически меняющуюся громкость. Частота же звука в соответствии с (6.5) почти не меняется. Эффект можно реально наблюдать, если взять два камертона с близкими частотами. В технике метод биений используется для обнаружения разницы частот.

## 6.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу

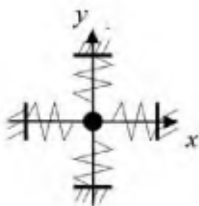


Рис. 6.4

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний траектория колеблющейся точки имеет разнообразный вид. Точка, совершающая гармонические колебания одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях, выписывает *фигуры Лиссажу*.

Пусть малое тело колеблется на взаимно перпендикулярных пружинках одинаковой жесткости (рис. 6.4). В этом случае очевидно, что частота обоих колебаний одинакова. При этом в общем случае амплитуды  $A$  и  $B$  разные и имеется сдвиг по фазе  $\alpha$ :

$$x(t)=A \cos(\omega t), y(t)=B \cos(\omega t+\alpha). \quad (6.6)$$

Найдем траекторию движения тела. Для получения зависимости между координатами надо из уравнений (6.6) исключить время. Воспользуемся формулой косинуса суммы:  $\cos(\omega t+\alpha) = \cos(\omega t) \times \cos\alpha - \sin(\omega t) \times \sin\alpha$ , подставив из выражения (6.6)  $\cos(\omega t) = \frac{x}{A}$  и

$$\sin(\omega t) = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \text{ получим}$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \alpha \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \alpha. \quad (6.7)$$

Избавимся от корня, возведя уравнение в квадрат. После преобразований получим

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2\cos\alpha}{AB}xy = \sin^2\alpha. \quad (6.8)$$

Из линейной алгебры известно, что это уравнение эллипса.

Рассмотрим частные случаи.

1) Сдвиг по фазе между колебаниями равен нулю  $\alpha = 0$ . В этом случае в (6.8) имеем квадрат разности, и эллипс вырождается в прямую  $y = \frac{A}{B}x$ . Учитывая, что в соответствии с (6.6), (6.7)  $x$  и  $y$  ограничены косинусом, получим, что тело колеблется по отрезку, расположенному в 1-й и 3-й координатных четвертях.

2) Сдвиг по фазе между колебаниями  $\alpha = \pm\pi$ . Аналогично, тело колеблется по отрезку, расположенному во 2-й и 4-й координатных четвертях.

3) Сдвиг по фазе между колебаниями  $\alpha = \pm\pi/2$ . Из (6.8) траекторией является эллипс  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ . При этом, если  $\alpha = \pi/2$ , то тело движется по часовой стрелке, а если  $\alpha = -\pi/2$ , то — против.

Интересен случай, когда частоты исходных колебаний относятся как целые числа. Простейший пример:  $x(t)=A \sin(\omega t)$ ,  $y(t)=B \sin(2\omega t)$ . При построении по точкам получим фигуру Лиссажу типа восьмерки. Таким образом, по виду фигур Лиссажу можно определить соотношение частот и фаз складываемых колебаний.

## **6.5. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Период и амплитуда вынужденных колебаний**

*Вынужденные колебания — это колебания, происходящие под действием периодического внешнего воздействия. Рассмотрим ко-*

лебания грузика на пружине (рис. 6.5), если к нему (наряду с силой упругости  $F_{\text{уп}} = -kx$  и силой сопротивления  $F_c = -rv$ ) приложена внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону:

$$F_{\text{ен}} = F_0 \cos(\omega_{\text{ен}} t). \quad (6.9)$$

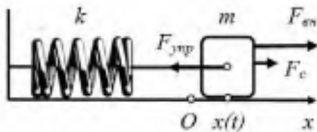


Рис. 6.5

По аналогии с (5.21)

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_{\text{вн}} t), \quad (6.10)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ;

$$\beta = \frac{r}{2m};$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

В соответствии с теорией решение неоднородного (с ненулевой правой частью) дифференциального уравнения вынужденных колебаний (6.10) состоит из двух частей:  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ , где  $x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$  — общее решение (5.22) однородного (с нулевой правой частью) уравнения (5.21);  $x_2(t)$  — частное решение неоднородного уравнения. Общее решение  $x_1(t)$  может быть важным в начальный момент, но резко (экспоненциально) убывает со временем. Поэтому установившееся значение  $x(t)$  определяется, в основном частным решением  $x_2(t)$ . Покажем это и будем искать  $x_2(t)$  в виде гармонической функции, изменяющейся с частотой внешнего воздействия:

$$x(t) = x_2(t) = A \cos(\omega_{\text{вн}} t - \varphi). \quad (6.11)$$

При подстановке (6.11) в (6.10) получим, что сумма трех гармонических колебаний левой части уравнения равна четвертому гармоническому колебанию правой части уравнения. Существенно упрощает задачу то, что все колебания имеют одинаковую частоту.

Сложим колебания методом векторных диаграмм. Продифференцировав (6.11) и воспользовавшись формулами приведения для удобства поиска сдвига фаз, получим

$$x' = -A\omega_{\text{ВН}} \sin(\omega_{\text{ВН}} t - \varphi) = A\omega_{\text{ВН}} \cos\left(\omega_{\text{ВН}} t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \quad (6.12)$$

$$x'' = -A\omega_{\text{ВН}}^2 \cos(\omega_{\text{ВН}} t - \varphi). \quad (6.13)$$

Изобразим на диаграмме вектора колебаний левой части уравнения (6.10)  $x''$ ,  $2\beta x'$  и  $\omega_0^2 x$ . Начальная фаза не является существенной, поэтому направим вправо вектор амплитуды  $\omega_0^2 A$  колебания  $\omega_0^2 x$  ( $\omega_0^2 A \cos(\omega_{\text{ВН}} t - \varphi)$ ), начальная фаза которого равна  $-\varphi$ . Тогда вектор амплитуды  $\omega_{\text{ВН}}^2 A$  колебания  $x''$  ( $\omega_{\text{ВН}}^2 A \cos(\omega_{\text{ВН}} t - \varphi + \pi)$ ), начальная фаза которого равна  $-\varphi + \pi$  (опережает на  $\pi$ ), будет направлен влево. Эти два вектора при вычитании дают вектор амплитуды  $(\omega_0^2 - \omega_{\text{ВН}}^2)A$ . А вектор амплитуды  $2\beta\omega_{\text{ВН}} A$  колебания  $2\beta x'$  ( $2\beta A \omega_{\text{ВН}} \cos\left(\omega_{\text{ВН}} t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ ), начальная фаза которого равна  $-\varphi + \frac{\pi}{2}$  (опережает на  $\frac{\pi}{2}$ ), будет направлен вверх. Сложение векторов левой части уравнения (6.10), очевидно, должно давать вектор правой части уравнения, который имеет амплитуду  $f_0$  и сдвиг фазы  $\varphi$  (рис 6.6).

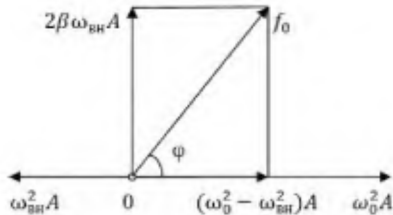


Рис. 6.6

Это условие позволяет найти из геометрических соображений сдвиг фазы  $\varphi$  (по определению тангенса) и амплитуду  $A$  (по теореме Пифагора) для вынужденных колебаний:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega_{\text{ВН}}}{\omega_0^2 - \omega_{\text{ВН}}^2}, \quad (6.14)$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{ВН}}^2)^2 + 4\beta^2\omega_{\text{ВН}}^2}}. \quad (6.15)$$

Напомним, что частота вынужденных колебаний в соответствии с (6.11) совпадает с частотой внешней силы  $\omega_{\text{вн}}$ . Кроме того, как и предполагалось, полученное решение  $x(t)=x_2(t)$  не является затухающим и доминирует в устоявшемся режиме по сравнению с быстро затухающей составляющей  $x_1(t)$ .

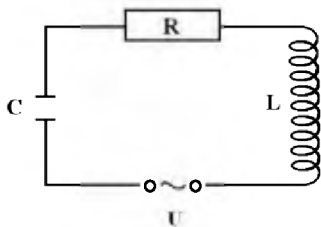


Рис. 6.7

По аналогии коротко рассмотрим вынужденные колебания величины заряда в колебательном контуре (рис. 6.7), состоящем из последовательно соединенных катушки индуктивностью  $L$ , конденсатора емкостью  $C$ , резистора сопротивлением  $R$  и источника напряжения переменного тока, изменяющегося по гармоническому закону:

$$U = U_0 \cos(\omega_{\text{вн}} t). \quad (6.16)$$

Из закона Ома имеем

$$R \frac{dq}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2} - \frac{q}{C} + U_0 \cos(\omega_{\text{вн}} t) \quad (6.17)$$

или по аналогии с (5.23)

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = f_0 \cos(\omega_{\text{вн}} t), \quad (6.18)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ;

$$\beta = \frac{R}{2L};$$

$$f_0 = \frac{U_0}{L}.$$

Это уравнение по сути не отличается от (6.10). Поэтому решением его будет

$$q(t) = A \cos(\omega_{\text{вн}} t - \varphi), \quad (6.19)$$

где сдвиг фазы  $\varphi$  и амплитуда  $A$  определяются формулами (6.14) и (6.15), а частота вынужденных колебаний по-прежнему совпадает с частотой внешней силы  $\omega_{\text{вн}}$ .

## 6.6. Резонанс. Семейство резонансных кривых

Рассмотрим подробнее зависимость (6.15) амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешнего воздействия. Очень часто амплитуда вынужденных колебаний имеет отчетливый максимум, называемый *резонансом*. Таким образом, при некоторой частоте внешнего воздействия колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие этого воздействия. Найдем частоту  $\omega_p$ , соответствующую резонансу. Для этого исследуем функцию (6.15) на максимум. Исследование упрощается, если учесть, что максимум дроби с постоянным числителем соответствует минимуму знаменателя. А минимум корня знаменателя соответствует минимуму подкоренного выражения. В экстремуме производная подкоренного выражения  $(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)^2 + 4\beta^2\omega_{\text{вн}}^2$  равна нулю:

$$-4(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)2\omega_{\text{вн}} + 8\beta^2\omega_{\text{вн}} = 0, \quad (6.20)$$

откуда несложно найти *резонансную частоту внешнего воздействия*:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (6.21)$$

(сравните с частотой затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}). \quad (6.22)$$

С ростом коэффициента затухания резонансная частота падает, при  $2\beta^2 = \omega_0^2$  доходит до нуля, а при  $2\beta^2 > \omega_0^2$  резонанс пропадает.

Резонансная амплитуда находится подстановкой резонансной частоты в амплитуду:

$$A_p = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (6.23)$$

В случае малого затухания  $\beta \ll \omega_0$

$$A_p = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}. \quad (6.24)$$

В случае бесконечно малого затухания резонансная амплитуда стремится к бесконечности.

Если  $\omega_{\text{вн}} = 0$  и внешнее воздействие не зависит от времени, то для  $\beta = 0$  из (6.15) отклонение системы от равновесия равно:

$$A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2}. \quad (6.25)$$

Графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешнего воздействия при различных коэффициентах поглощения  $\beta$  называются резонансными кривыми (рис. 6.8). При этом  $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ . Для последнего случая  $2\beta^2_3 > \omega_0^2$ , и резонанс отсутствует.

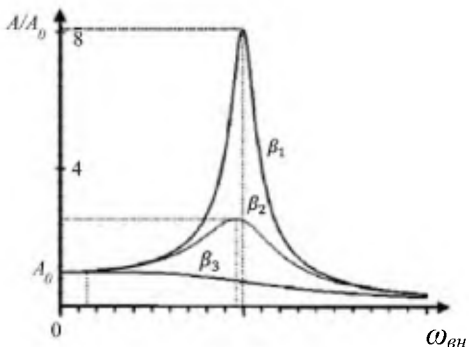


Рис. 6.8

Не следует путать вынужденные колебания с автоколебаниями. Отличие в том, что вынужденные колебания вызваны *периодическим* внешним воздействием, в то время как возникновение автоколебаний и их частота определяются внутренними свойствами самой автоколебательной системы. Примеры автоколебаний: колебания маятника часов за счет постоянного действия тяжести заводной гири, колебания скрипичной струны под воздействием равномерно движущегося смычка.

В технике явление резонанса может быть как полезным, так и вредным. Например, случайные резонансные механические вибрации могут привести к разрушению строительных конструкций. Так, разрушение висячего Такомакского моста длиной 1600 м в штате Вашингтон США в 1940 г. связывают с резонансными явлениями. При

помощи явления резонанса можно выделить и усилить даже слабые периодические колебания. Резонаторы и резонансные системы широко используются во многих областях науки, техники и вообще в любых видах деятельности человека.

## 7. Волны

### 7.1. Упругие волны.

#### Продольные и поперечные волны

Каждый человек видел волны на воде и знает о существовании многих других видов волн, например звуковых и электромагнитных.

*Волны (волновой процесс) — это процесс распространения колебаний. Упругая волна — процесс распространения колебаний в упругой среде. Характерное свойство волны — перенос энергии колебаний без переноса вещества.*

*Волны называют поперечными, если частицы среды колеблются перпендикулярно распространению волны.* Примером волны такого рода могут служить волны, бегущие по струне. Обычно они возникают благодаря силе упругости при деформации сдвига, характерной для твердых сред. Кроме того, следует отметить поперечные волны на поверхности воды, где колеблется граница сред.

*Волны называют продольными, если частицы среды колеблются вдоль распространения волны.* Они возникают благодаря сжатию, поэтому существуют во всех средах. Пример: звуковые волны в газе. Если ударить молотком по металлическому стержню в торец, то пойдут продольные волны, если сбоку — поперечные.

*Волновой фронт — множество точек, до которых дошло колебание в данный момент.* Наиболее часто рассматривают волны с плоским и сферическим волновым фронтом. Плоский фронт имеет источником колебаний колеблющуюся плоскость, а сферический — исходит от точечного источника колебаний. При этом из геометрических соображений понятно, что если рассматривается малый

фрагмент сферического фронта, удаленного от источника, его приближенно можно считать плоским.

*Волновая поверхность* – это поверхность, точки которой совершают колебания в одинаковой фазе. Они обычно имеют вид своего волнового фронта, например, плоского или сферического.

Волновой процесс периодичен во времени (характеризуется периодом) и пространстве (характеризуется длиной волны).

Принципы распространения волн были сформулированы Гюйгенсом: 1) каждая точка, до которой дошло колебание, становится источником вторичных волн; 2) волновой фронт является огибающей вторичных волн. Френель внес уточнение в 2): волновой фронт является результатом интерференции вторичных волн.

Для описания волны надо ввести векторную функцию, задающую для данной точки временную зависимость смещения от положения равновесия частиц упругой среды  $\vec{s}(x, y, z, t)$ .

## 7.2. Уравнение плоской волны. Фазовая скорость

Плоская волна может быть создана в упругой среде с помощью колебательного движения твердой плоскости. Колебания плоскости по гармоническому закону создают периодические уплотнения среды и вынуждают колебаться соседние частицы, передавая колебания более удаленным частицам. Таким образом возникнет плоская продольная волна. Расположим начало координат на плоскости и направим ось  $x$  перпендикулярно плоскости. Пусть в начале координат имеем для смещения от положения равновесия частиц упругой среды

$$s(0,t) = A \cos \omega t. \quad (7.1)$$

До точки с координатой  $x$  такое возмущение, распространяющееся со скоростью  $v$ , дойдет через время  $\frac{x}{v}$ . Это опоздание отразится в формуле для смещения со знаком «минус»:

$$s(x,t) = A \cos(\omega(t - \frac{x}{v})), \quad (7.2)$$

где выражение под косинусом  $\varphi = \omega(t - \frac{x}{v})$  — фаза волны.

Полученное уравнение называется *уравнением плоской волны*. Для плоской волны, распространяющейся в направлении, противоположном оси  $x$ ,

$$s(x,t) = A \cos(\omega(t + \frac{x}{v})). \quad (7.3)$$

Скорость распространения фиксированной фазы колебаний называют фазовой. Если двигаться с фазовой скоростью, то

$$\varphi = \omega(t - \frac{x}{v}) = \text{const.}$$

Продифференцируем это выражение по времени  $\omega(1 - \frac{dx}{dt} \frac{1}{v}) = 0$ , откуда следует, что фазовая скорость равна скорости распространения волны:

$$v_{\varphi} \equiv \frac{dx}{dt} = v. \quad (7.4)$$

Найдем расстояние  $\lambda$  между волновыми поверхностями, колебания на которых происходят с разностью фаз  $2\pi$  и смещения синхронны ( $\frac{\omega\lambda}{v} = 2\pi$ ). Длина волны  $\lambda$  — путь, пройденный волной за период  $T$ :

$$\lambda = vT. \quad (7.5)$$

Введем понятие волнового вектора  $\vec{k}$ , направленного вдоль распространения волны, модуль которого

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}. \quad (7.6)$$

Уравнение плоской волны (7.2) с учетом (7.6) имеет вид

$$s(x,t) = A \cos(\omega t - kx). \quad (7.7)$$

Можно геометрически показать, что для плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении в трехмерном пространстве, уравнение плоской волны имеет вид

$$s(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \quad (7.8)$$

где скалярное произведение  $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ .

### 7.3. Волновое уравнение упругой волны и его решение

Выведем дифференциальное волновое уравнение, решением которого является уравнение плоской упругой волны. Запишем закон Гука (3.15) для деформированного тела. Ранее мы формулировали этот закон для пружинки, к которой приложена сила. Деформированное тело можно представить как набор пружинок, каждая из которых в каждый момент времени взаимодействует с соседними.

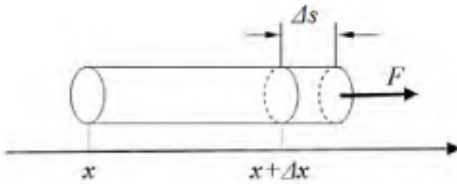


Рис. 7.1

Выделим элемент упругого стержня длиной  $\Delta x$ . Закрепив левую часть элемента, правую сместим на величину  $\Delta s$  вдоль оси  $x$  (рис. 7.1). По закону Гука сила упругости  $F_{упр}$  пропорциональна деформации  $F_{упр} = -k \Delta s$ . Коэффициент упругости  $k$  зависит от материала стержня, его длины и площади сечения.

Введем понятия нормального напряжения  $\sigma = \frac{F}{S}$  ( $S$  — площадь сечения элемента) и относительной деформации  $\varepsilon = \frac{\Delta s}{\Delta x} \approx \frac{ds}{dx}$  (для элемента малой длины). Запишем закон Гука для упругого тела через эти понятия:

$$\sigma S = k \varepsilon \Delta x, \text{ или } \sigma = E \varepsilon, \quad (7.9)$$

где  $E = \frac{k \Delta x}{S}$  — модуль Юнга.

Модуль Юнга зависит только от свойств материала и не зависит от размеров и формы тела. Это несложно показать, рассматривая

упругое тело как набор последовательно и параллельно соединенных пружинок. Модуль Юнга меняется в широких пределах. Так для стали этот коэффициент равен  $2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, а для резины — в сто тысяч раз меньше.

Рассмотрим теперь волну, распространяющуюся вдоль упругого стержня. По-прежнему будем рассматривать элемент стержня площадью сечения  $S$  и длиной  $\Delta x$  в невозмущенном состоянии. Применим второй закон Ньютона для описания колебаний этого элемента как целого (рис. 7.2):

$$\rho S \Delta x \frac{d^2 s}{dt^2} = S \sigma(x + \Delta x) - S \sigma(x). \quad (7.10)$$

Здесь в левой части произведение массы элемента  $\rho S \Delta x$  на вторую производную смещения центра масс элемента,  $\rho$  — плотность стержня. В правой части алгебраическая сумма внешних сил, действующих на элемент с торцов.

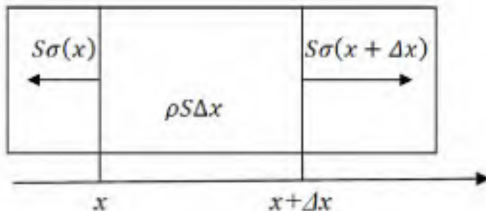


Рис. 7.2

Разделим обе части уравнения на  $S \Delta x$  и, устремив  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим с учетом определения производной

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (7.11)$$

Преобразуем это уравнение с учетом закона Гука для упругого тела (7.9):

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \quad (7.12)$$

Наконец, воспользовавшись определением относительной деформации  $\varepsilon$ , получим *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (7.13)$$

Убедимся, что уравнение плоской волны (7.7) с произвольной начальной фазой  $s(x,t)=A \cos(\omega t - kx + \alpha)$  является его решением:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(\omega t - kx + \alpha);$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

Подставив эти выражения в (7.13), получим для фазовой скорости упругой продольной волны

$$\frac{\omega}{k} = v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (7.14)$$

В результате волновое уравнение (7.13) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (7.15)$$

Можно геометрически показать, что для плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении в трехмерном пространстве, волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (7.16)$$

или в сокращенном виде с помощью скалярного *оператора Лапласа*

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (7.17)$$

$$\nabla^2 s = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (7.18)$$

Волны вида  $s(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$ , все точки которых перемещаются с одной и той же скоростью, принято называть *бегущими*. Временной график такой волны представляет синусоиду, перемещающуюся со временем вдоль оси  $x$ .

## 7.4. Плотность энергии упругой волны

Найдем полную механическую энергию  $\Delta W$  для малого элемента упругой среды, в которой распространяется упругая продольная волна. Она состоит из кинетической  $\Delta W_k$  и потенциальной  $\Delta W_n$  энергий:

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_n. \quad (7.19)$$

Кинетическая энергия колебаний определяется скоростью колебаний  $u = \frac{ds}{dt}$  и массой элемента  $\rho S \Delta x$ :

$$\Delta W_k = \frac{\rho S \Delta x}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (7.20)$$

Плотность кинетической энергии  $w_k$  получается делением (7.20) на объем элемента  $S \Delta x$ :

$$w_k = \frac{\rho u^2}{2}. \quad (7.21)$$

Потенциальная энергия упругого деформированного стержня находится по аналогии с потенциальной энергией пружины и с использованием определения относительной деформации:

$$\Delta W_n = \frac{k \Delta s^2}{2} = \frac{ES \Delta s^2}{2 \Delta x} = \frac{ES \Delta x}{2} \left( \frac{\Delta s}{\Delta x} \right)^2 = \frac{ES \Delta x \varepsilon^2}{2}. \quad (7.22)$$

Плотность потенциальной энергии  $w_n$  получается делением (7.22) на объем элемента  $S \Delta x$ :

$$w_n = \frac{E \varepsilon^2}{2}. \quad (7.23)$$

Таким образом, плотность полной энергии упругой волны равна

$$w = w_k + w_n = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{E \varepsilon^2}{2}. \quad (7.24)$$

Или с учетом (7.14)

$$w = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho v^2 \varepsilon^2}{2}. \quad (7.25)$$

В соответствии с (7.2) и (7.3) фаза смещения остается постоянной при  $x = \pm vt$ . Таким образом, смещение распространяется в среде в виде волн

$$s = s(x \pm vt). \quad (7.26)$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получим ( $s'$  — производная по аргументу  $(x \pm vt)$ )

$$u = \frac{ds}{dt} = \pm v s'(x \pm vt); \quad (7.27)$$

$$\varepsilon = \frac{ds}{dx} = s'(x \pm vt). \quad (7.28)$$

Таким образом, плотность энергии волны максимальна там, где и скорость  $u$ , и деформация  $\varepsilon$  максимальны. В этом волновой процесс отличается от колебаний отдельной точки, для которой полная механическая энергия постоянна и лишь переходит из кинетической в потенциальную и наоборот.

Если волна задана в виде  $s(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ ,

то  $u = \frac{ds}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - kx)$  и  $\varepsilon = \frac{ds}{dx} = Ak \sin(\omega t - kx)$ .

Тогда из (7.24)

$$\begin{aligned} w &= \frac{\rho A^2}{2} (\omega^2 \sin^2(\omega t - kx) + \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx)) = \\ &= \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Из формулы видно, что кинетическая и потенциальная энергии волны равны. При достаточно больших временах или расстояниях можно усреднить квадрат синуса по периоду (средний квадрат синуса равен 0,5):

$$w = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}. \quad (7.30)$$

## 7.5. Перенос энергии бегущей волной. Вектор Умова

Распространение волны приводит к переносу энергии, характеризуемому потоком энергии. *Поток энергии* — это энергия, переносимая волной через некоторую поверхность в единицу времени. Измеряется он в ваттах. При определении потока энергии его обычно усредняют по периоду колебаний волны, поскольку практически всегда время определения потока существенно больше периода колебаний. Рассмотрим элемент среды, длина которого численно равна скорости волны  $v$  и направлена вдоль распространения волны. Очевидно, что за 1 секунду вся усредненная волновая энергия  $w_{cp}$  элемента пройдет через его торец. Таким образом, поток энергии

$$\Phi = w_{cp}Sv. \quad (7.31)$$

Отношение потока энергии волны к площади, перпендикулярной распространению волны поверхности, называют плотностью потока энергии, или интенсивностью волны:

$$I \equiv \frac{\Phi}{S} = w_{cp}v. \quad (7.32)$$

Плотность потока энергии является вектором, причем этот вектор направлен по направлению распространения волны:

$$\vec{I} = w_{cp}\vec{v}. \quad (7.33)$$

Иногда полезно знать мгновенное значение плотности потока энергии, которое определяется *вектором Умова*:

$$\vec{I}_y = w\vec{v}. \quad (7.34)$$

Для гармонической волны из (7.30) интенсивность волны

$$I = \frac{\rho A^2 \omega^2 v}{2}. \quad (7.35)$$

## 7.6. Принцип суперпозиции при сложении волн. Стоячая волна. Колебания струны

Принцип суперпозиции волн гласит, что волны от различных источников не влияют друг на друга, и что сложное колебание от двух или большего числа источников находится путем геометрического сложения волн от отдельных источников. Рассмотрим наложение двух встречных плоских волн с одинаковой частотой и амплитудой. В такой ситуации возникает колебательный процесс, называемый *стоячей волной*. Сложим бегущую по оси  $x$  волну  $s_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$  и бегущую против оси  $x$  волну  $s_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx)$  и получим *уравнение стоячей волны*:

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = A (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) = 2A \cos kx \cos \omega t. \quad (7.36)$$

Здесь использованы формула для суммы косинусов и свойство четности косинуса. Поскольку каждая из составляющих стоячей волны является решением волнового уравнения, то и их сумма тоже является его решением. В стоячей волне все точки совершают колебания с одинаковой частотой  $\omega$ , а амплитуда в каждой точке определяется выражением

$$B = 2A \cos kx. \quad (7.37)$$

Точки нулевой амплитуды называют *узлами стоячей волны*. Для узлов

$$2A \cos kx = 0, \quad kx = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{(2n+1)\lambda}{4} \quad (\text{где } n - \text{целое}). \quad (7.38)$$

Расстояние между узлами равно половине длины волны. Наибольшее значение амплитуды колебаний (7.36) достигается в *пучностях стоячей волны*, где

$$\cos kx = \pm 1, \quad kx = \pi n, \quad x = \frac{n\lambda}{2} \quad (\text{где } n - \text{целое}). \quad (7.39)$$

В стоячей волне, в отличие от бегущей, нет переноса энергии. (Перенос энергии одной составляющей волны влево уравновешива-

ется переносом другой составляющей волны вправо.) По сути, она является не волной, а колебательным процессом, в котором кинетическая энергия переходит в потенциальную и наоборот.

Рассмотрим в качестве примера *колебания струны, закрепленной с двух концов*. Такое закрепление задает граничные условия на концах струны ( $x = 0$  и  $x = l$ ). По аналогии с (7.36) выберем для упрощения записи граничных условий стоячую волну в виде произведения синусов:

$$s(x,t) = 2A \sin kx \sin \omega t. \quad (7.40)$$

Граничные условия связаны с тем, что струна на закрепленных концах не может колебаться:  $\sin kx = 0$  (в (7.40) в отличие от (7.37) выполняется автоматически) и  $\sin kx = l$ . Из последнего условия следует *квантование* (возможность принимать лишь дискретные значения) волнового числа и длины волны:

$$kl = n\pi, \text{ или } \lambda = \frac{2l}{n} \text{ (где } n \text{ — целое)}. \quad (7.41)$$

Таким образом, в результате квантования вдоль струны должно укладываться целое число полуволн (рис. 7.3). Из связи длины волны с частотой  $\nu = \frac{v}{\lambda}$  несложно получить набор частот колебаний струны:

$$\nu = \frac{vn}{2l}. \quad (7.42)$$

Частота, соответствующая  $n = 1$ , называется основным тоном;  $n = 2$  — первым обертоном и т. д.

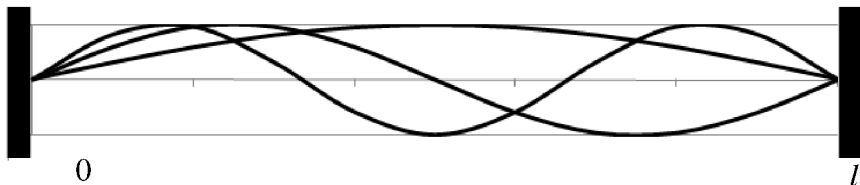


Рис. 7.3

# 8. Специальная теория относительности

## 8.1. Преобразования Галилея и постулаты специальной теории относительности

Рассмотрим описание движения материальной точки  $m$  в двух инерциальных системах отсчета, одна из которых движется относительно другой со скоростью  $V$  (рис. 8.1). Пусть точка в системе отсчета  $K$  в момент времени  $t$  имела координаты  $x, y, z$ . Найдём связь этих координат с координатами  $x', y', z'$  точки в системе отсчета  $K'$ , которая движется относительно системы  $K$  равномерно и прямолинейно вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ . Оси  $x$  и  $x'$  направлены в любой момент времени вдоль одной прямой, а оси  $y$  и  $y', z$  и  $z'$  — параллельны. В механике Ньютона из опыта изучения движущихся систем при скоростях, намного меньших скорости света, предполагается, что время в системах течёт одинаково, т. е.  $t = t'$ .

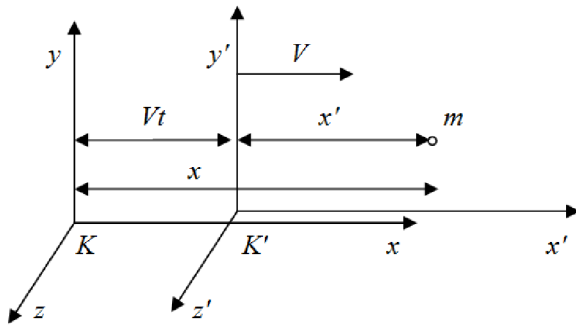


Рис. 8.1

Если в начальный момент времени  $t = 0$  начала координат двух систем отсчета совпадали, то можно получить соотношения для перехода из одной системы координат в другую:

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (8.1)$$

Эти соотношения называются *преобразованиями Галилея* (1564–1642). Аналогичным образом можно перейти из системы  $K$  в  $K'$ . В векторном виде преобразование координат (8.1) можно записать следующим образом:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t. \quad (8.2)$$

Продифференцировав преобразование координат (8.2) два раза по времени, получим сначала закон сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad (8.3)$$

и затем связь ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (8.4)$$

Поскольку ускорение материальной точки одинаково в обеих системах отсчета, то одинаков и основной закон механики — второй закон Ньютона. В результате следует вывод: *законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета*. А раз законы одинаковы, то нельзя выделить какую-то систему отсчета, считая ее покоящейся. Таким образом, преобразования Галилея согласуются с *принципом относительности Галилея: Никакими механическими опытами нельзя установить, покоится ли данная система отсчета или движется равномерно и прямолинейно*.

Столетиями преобразования Галилея демонстрировали свою непогрешимость. Однако в конце XIX в. при исследовании скорости света была показана их ошибочность в релятивистской механике. (*Релятивистская механика изучает движение со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме*.) В опыте Майкельсона было показано, что скорость света в вакууме ( $c$ ) одинакова в разных системах отсчета (скорость света была постоянной и не складывалась со скоростью движения Земли). Это противоречит закону сложения скоростей (8.3). Для решения этого противоречия французский математик, физик и философ А. Пуанкаре (1854–1912) высказал гипотезу о том, что время в разных системах отсчета протекает по-разному ( $t \neq t'$ ). Основы специальной теории относительности (реля-

тивистской механики) сформулированы в 1905 г. в работах А. Эйнштейна и А. Пуанкаре.

Специальная теория относительности (СТО) базируется на двух постулатах:

1. Принцип относительности: *Никакими физическими опытами нельзя установить, покоится ли данная система отсчета либо движется равномерно и прямолинейно.* Другая формулировка: *Все законы природы одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета.*

2. Принцип постоянства скорости света: *Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источника и приемника света.*

Первый постулат является обобщением принципа относительности Галилея на все явления природы. Противоречие второго постулата преобразованиям Галилея требует их модифицирования и модифицирования правил перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой.

## 8.2. Преобразования Лоренца

Преобразования Лоренца — это уравнения, связывающие координаты и время в инерциальных системах отсчета с учетом постулатов СТО. При скорости движения системы отсчета  $V \ll c$  преобразования Лоренца должны переходить в преобразования Галилея.

Для вывода преобразований Лоренца рассмотрим в наших двух системах отсчета опыт. Пусть в момент времени  $t = t' = 0$ , когда начала систем координат совпадали, в этом начале произошла вспышка света и стала распространяться сферическая световая волна. В соответствии с первым постулатом фронт этой волны будет сферой в обеих системах отсчета, сфера эта будет в соответствии со вторым постулатом увеличивать свой радиус со скоростью света и в той, и в другой системе отсчета.

Опираясь на эти постулаты, найдем вид преобразований координат и времени. Фронт световой волны в системе  $K$  — это сфера радиуса  $ct$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (8.5)$$

В системе  $K'$  уравнение фронта волны, в соответствии с постулатами

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2 (t')^2. \quad (8.6)$$

Попробуем в качестве нулевого приближения преобразования Галилея, а затем его подправим:

$$(x')^2 = (x - Vt)^2, (y')^2 = y^2, (z')^2 = z^2, (t')^2 = t^2. \quad (8.7)$$

Для такого пути есть основания, поскольку при невысоких скоростях искомые преобразования должны переходить в преобразования Галилея. Подставим (8.7) в (8.6):

$$x^2 - 2Vxt + V^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (8.8)$$

Сравнение с (8.5) предполагает, что надо подправить преобразования так, чтобы исчезли лишние (подчеркнутые) члены. Из однородности пространства и времени следует, что преобразования должны остаться линейными.

Попробуем преобразования:  $x' = x - Vt$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ ,  $t' = t - bx$ , которые позволят убрать из уравнения (8.8) линейный по времени член  $2Vxt$ :

$$x^2 - 2Vxt + V^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 - 2c^2 bxt + c^2 b^2 x^2. \quad (8.9)$$

Приравнявая линейные по времени члены, получаем

$$b = \frac{V}{c^2}; \quad (8.10)$$

$$t' = t - \frac{Vx}{c^2}. \quad (8.11)$$

При таком  $b$  уравнение (8.9) после приведения подобных приобретает вид

$$x^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right). \quad (8.12)$$

Теперь уравнение отличается от сферы только выражениями в скобках в правой и левой частях. От них можно избавиться, включив их в преобразования координаты и времени:

$$x' = \frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, y' = y, z' = z; \quad (8.13)$$

$$t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \quad (8.14)$$

Это и есть *преобразования Лоренца*. Можно проверить, что при подстановке (8.13), (8.14) в (8.6) сфера преобразуется в сферу. Кроме того, при нерелятивистских скоростях  $V \ll c$  преобразования Лоренца (8.13), (8.14) переходят в преобразования Галилея (8.1). Введем для краткости записи обозначение

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad (8.15)$$

Тогда преобразования Лоренца имеют вид

$$x' = (x-Vt)\gamma, y' = y, z' = z, t' = (t - \frac{Vx}{c^2})\gamma. \quad (8.16)$$

Обратные преобразования Лоренца получаются, например, при изменении знака скорости на противоположный

$$x = (x'+Vt')\gamma, y = y', z = z', t = (t' + \frac{Vx'}{c^2})\gamma. \quad (8.17)$$

В преобразованиях Лоренца (в отличие от преобразований Галилея) координаты и время перемешаны: время определяется координатами, а координаты — временем. В этом проявляется взаимосвязь координат и времени. Поэтому в теоретической физике используют *четырёхмерное пространство*, где четвертая координата пропорциональна времени.

При  $V > c$  выражения (8.16), (8.17) для  $t, t', x, x'$  являются мнимыми. Это означает, что движение тела со сверхсветовыми скоростями невозможно. Невозможно и движение системы со скоростью света, поскольку в формулах (8.13), (8.14) знаменатель равен нулю.

*Релятивистская механика должна быть построена таким образом, чтобы уравнения движения не менялись при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, т. е. были инвариантны относительно преобразований Лоренца.*

### **8.3. Следствия СТО: замедление времени и сокращение длины**

Относительность отсчета времени приводит к тому, что длительность одного и того же события в разных системах оказывается разной. Предположим, что в системе  $K'$  в точке с координатой  $x'$  некое событие длится с момента  $t'_1$  до момента  $t'_2$ :

$$\tau' = t'_2 - t'_1. \quad (8.18)$$

Тогда в соответствии с (8.17) в системе  $K$  длительность этого события составляет

$$\tau = t_2 - t_1 = \left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}\right)\gamma - \left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2}\right)\gamma = (t'_2 - t'_1)\gamma = \tau'\gamma. \quad (8.19)$$

Поскольку  $\gamma$  всегда больше единицы, то  $\tau > \tau'$ : собственное время всегда меньше отсчитанного по движущимся часам времени.

Более того нарушается понятие абсолютной одновременности событий в разных системах отсчета. Так, пусть в системе  $K'$  одновременно (в момент времени  $t'$ ), но в разных местах ( $x'_1$  и  $x'_2$ ) произошли два события. При переходе в систему  $K$  получим время первого события:

$$t_1 = \left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2}\right)\gamma \quad (8.20)$$

и второго события:

$$t_2 = \left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}\right)\gamma. \quad (8.21)$$

Таким образом, *одновременные в одной системе отсчета события могут оказаться неодновременными в другой системе. При этом если  $x'_2 > x'_1$ , то  $t_2 > t_1$ .*

Рассмотрим теперь, что происходит с расстояниями (размерами тел) в разных системах. Пусть стержень длины  $l'$  положен вдоль оси  $x'$  в системе  $K'$  (рис. 8.2). Если в системе  $K$  в один и тот же момент времени  $t$  изменить координаты начала и конца стержня, то их разница будет длиной движущегося стержня  $l$ . Имеем

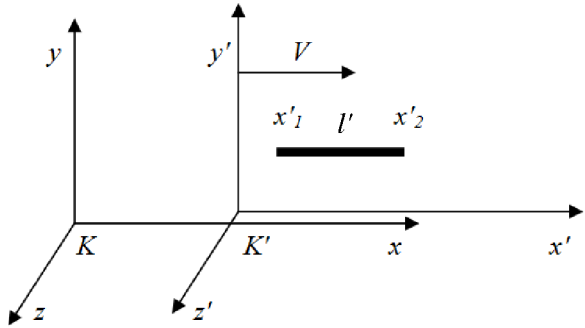


Рис. 8.2

$$l' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - Vt) - \gamma(x_1 - Vt) = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l. \quad (8.22)$$

Таким образом, *длина движущегося стержня меньше собственной длины стержня*. Заметим, что *поперечные размеры стержня, перпендикулярные скорости относительного движения систем, не меняются*.

Следствия СТО к настоящему времени получили многочисленные экспериментальные подтверждения. В первую очередь эти подтверждения получены для элементарных частиц, которые несложно ускорить до релятивистских скоростей. Например, даже электроны в обычной электронно-лучевой трубке с ускоряющим напряжением 25 кВ имеют скорость, равную трети скорости света, и отчетливо проявляют релятивистские свойства.

Отметим, что в механике Ньютона координаты произвольных точек  $A$  и  $B$  зависят от системы отсчета, но расстояние  $l$  между точками не зависит от системы — является инвариантом:

$$l^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = \text{const}. \quad (8.23)$$

В этом можно убедиться, воспользовавшись преобразованиями Галилея (8.1). Также можно убедиться, что расстояние между точками зависит от системы и не является инвариантом — относительно преоб-

разований Лоренца (8.17). Тем не менее в СТО можно найти инвариант  $S$ , называемый *релятивистским интервалом между событиями*

$$S^2 = (ct_A - ct_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2 = \text{const.} \quad (8.23a)$$

Этот инвариант можно считать неким расстоянием в четырехмерном пространстве

$$(x, y, z, ict) \quad (8.24)$$

с четвертой координатой  $ict$ . Здесь мнимая величина  $i$  ( $i^2 = -1$ ) введена для того, чтобы нейтрализовать знак “минус” перед последней скобкой в (8.23).

## 8.4. Импульс тела и основное уравнение релятивистской динамики

Получим сначала выражения для *преобразования скоростей*. Возьмем дифференциалы от (8.17)  $x = (x' + Vt')$   $\gamma$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$ ,  $t = (t' + \frac{Vx'}{c^2})\gamma$ , выразим через них компоненты скорости и поделим числители и знаменатели дробей на  $dt'$ :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{(dx' + Vdt')\gamma}{(dt' + \frac{Vdx'}{c^2})\gamma} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}; \quad (8.25)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{(dt' + \frac{Vdx'}{c^2})\gamma} = \frac{v'_y}{(1 + \frac{Vv'_x}{c^2})\gamma}; \quad (8.26)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{(dt' + \frac{Vdx'}{c^2})\gamma} = \frac{v'_z}{(1 + \frac{Vv'_x}{c^2})\gamma}. \quad (8.27)$$

Теперь мы вплотную подошли к обсуждению понятия импульса и закона сохранения импульса в СТО. Как уже отмечалось, закон сохранения импульса следует из фундаментальных соображений однородности пространства, которая предполагает, что параллельный перенос системы отсчета не влияет на результат измерений. Нет оснований полагать, что в четырехмерном пространстве (8.24) эта однородность нарушается. Тем не менее можно показать, что

классический импульс с учетом релятивистских преобразований (8.25)–(8.27) не сохраняется.

В качестве поддающегося простому расчету рассмотрим центральное абсолютно неупругое столкновение частиц одинаковой массы  $m$ . Пусть в системе  $K'$  их скорости одинаковы, равны относительной скорости  $V$  систем, направлены вдоль оси  $x'$  и противоположны по направлению:

$$v'_1 = V, v'_2 = -V. \quad (8.28)$$

Тогда суммарный импульс частиц до и после столкновения в системе  $K'$ , равен нулю. А вот в системе  $K$ , как несложно показать с помощью преобразований (8.25)–(8.27), классический закон сохранения импульса не соблюдается. Таким образом, классическое определение импульса

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (8.29)$$

требует модификации. Инвариантной (не зависящей от внешних систем отсчета) характеристикой является собственное время частицы  $t_c$  (время в связанной с частицей системе). Поэтому для получения инвариантного закона сохранения импульса есть основания использовать его в определении импульса. Полагая, что скорость движения частицы  $v$ , с учетом (8.19) получаем

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt_c} = m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (8.30)$$

Определение *релятивистского импульса тела* (8.30) позволяет сохранить закон сохранения импульса для релятивистского случая. Однако для этого надо уточнить связь импульса и массы с энергией, что будет сделано ниже. Очевидно, что при  $v \ll c$  формула релятивистского импульса дает классическое выражение для импульса. Из определения релятивистского импульса (8.30) видно, что никакое тело не может двигаться со скоростью, большей скорости света в вакууме. При этом импульс может неограниченно расти.

Перейдем теперь к формулировке основного уравнения релятивистской динамики, являющегося обобщением второго закона Ньютона. Формально сила связана с импульсом тем же уравнением, однако импульс теперь релятивистский:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt}. \quad (8.31)$$

В одномерном случае имеем

$$F = \frac{ma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{mv^2a}{c^2\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})^3}} = \frac{ma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2-v^2}\right) = ma\gamma^3. \quad (8.32)$$

Решить *основное уравнение релятивистской динамики* (8.31) сложнее, чем второй закон Ньютона. При этом сила не является инвариантной и в разных инерциальных системах отсчета имеет разные модули и направления. Кроме того, ускорение часто не совпадает по направлению с силой. Масса перестает быть важным коэффициентом пропорциональности между ускорением и силой. Роль массы в уравнениях движения падает, и эти уравнения предпочитают формулировать через импульс и энергию.

## 8.5. Кинетическая и полная энергии в СТО. Энергия покоя. Релятивистский инвариант

Основное уравнение релятивистской динамики (8.32) позволяет получить выражение для кинетической энергии. Пусть на тело действует сила  $F$  и совершается работа  $dA$ , приводящая к изменению кинетической энергии  $dT$ :

$$dA = dT = Fdr = ma\gamma^3 dr = m\gamma^3 v dv. \quad (8.33)$$

Интегрируя, получим для *релятивистской кинетической энергии*

$$T = \int_0^v \frac{mvdv}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} = \int_0^v \frac{md(v^2)}{2(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2. \quad (8.34)$$

При разложении в ряд Тейлора квадратного корня (8.34) при  $v \ll c$  можно получить формулу для классической кинетической энергии.

Из формулы (8.34) видно, что кинетическая энергия тела равна разности, зависящей от скорости *полной энергии*

$$E = \gamma mc^2 \quad (8.35)$$

и не зависящей от скорости *энергии покоя*

$$E_0 = mc^2. \quad (8.36)$$

Последнее соотношение выражает *принцип эквивалентности массы и энергии Эйнштейна*.

Многочисленные физические эксперименты (например, в области ядерной физики) показывают, что *закон сохранения энергии выполняется именно для полной энергии системы тел*. При этом кинетическая энергия может переходить в массу и наоборот. Так, при неупругом столкновении шаров часть кинетической энергии переходит в тепловую, что ведет к небольшому увеличению массы шаров. С учетом этого замечания можно показать, что для неупругого столкновения тел (8.28) и для более сложных процессов выполняются как закон сохранения импульса, так и закон сохранения полной энергии.

Найдем связь между полной энергией и импульсом. Из (8.35) и (8.30)

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 + m^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{m^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= m^2 c^4 + p^2 c^2, \end{aligned} \quad (8.37)$$

получаем соотношение

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (8.38)$$

Выражение  $E^2 - p^2 c^2$  не зависит от выбора системы отсчета и называется *релятивистским инвариантом*. Этот инвариант сохраняется не только для одной частицы, но и для системы частиц. В реля-

тивистской механике часто используется система единиц, в которой скорость света равна 1. В этой системе инвариант имеет простой вид

$$E^2 - p^2 = m^2. \quad (8.39)$$

Из (8.35) и (8.30) несложно вывести еще одну (наряду с (8.38)) ключевую формулу релятивистской динамики:

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2}. \quad (8.40)$$

Итак, из экспериментально установленного факта о неизменности скорости света при переходе из одной системы в другую следует, что скорость любого тела не может превышать скорость света  $c$ . При этом некоторые частицы (фотон, нейтрино) двигаются со скоростью  $c$ . Однако из формул (8.35) и (8.30) следует, что их масса должна быть равна нулю, а двигаться они могут только со скоростью света.

В заключение подчеркнем, что из всех релятивистских формул в пределе  $v \ll c$  получаются классические аналоги. По этому поводу в науке сформулирован *принцип соответствия*: *Любая новая физическая теория должна в некотором пределе воспроизводить результаты старой проверенной теории.*

## **9. Молекулярно-кинетическая теория. Принципы классической статистической физики**

### **9.1. Физические основы молекулярно-кинетической теории. Уравнение состояния идеального газа**

Перейдем теперь к *молекулярной физике*, которая изучает физические свойства тел на основе рассмотрения их молекулярного (микроскопического) строения. Она исследует движение и взаимодействие частиц (атомов, молекул, ионов), составляющих физи-

ческие тела, методами статистической физики, термодинамики и физической кинетики. *Статистическая физика* методами теории вероятностей изучает поведение систем частиц в равновесном или неравновесном состоянии, *термодинамика* — соотношения и превращения теплоты и других форм энергии, *физическая кинетика* (микроскопическая теория процессов в неравновесных средах) — процессы столкновений, а также переноса энергии, импульса и вещества в различных средах.

В предыдущих разделах при решении задач механики обычно описывалось движение одного или двух тел. С ростом количества тел в описываемой системе решение набора дифференциальных уравнений резко усложняется, и уже для трех тел оно обычно перестает быть аналитическим. Что же тогда говорить об описании движения молекул, количество которых в системе может составлять  $10^{20}$ – $10^{25}$ ! Поэтому для такой задачи нужен особый подход — *молекулярно-кинетическая теория (МКТ)*. Основное положение МКТ заключается в том, что вещество состоит из молекул, которые находятся в постоянном беспорядочном тепловом движении и обмениваются при столкновениях импульсами и энергией. Простейшей моделью вещества является *идеальный газ*, молекулы которого могут быть приняты за материальные точки, взаимодействующие между собой и со стенками сосуда посредством упругих столкновений. При этом считается, что молекулы идеального газа гораздо чаще сталкиваются между собой, чем со стенками сосуда. Очевидно, что для идеального газа расстояния между молекулами должны намного превосходить размеры молекул.

Для описания сложной системы из большого числа молекул (термодинамической системы) удобно использовать усредненные параметры: *давление*  $p$ , характеризующее среднюю силу на единицу площади, и *температуру*  $T$ , характеризующую среднюю кинетическую энергию молекул. Наряду с объемом  $V$  давление  $p$  и температура  $T$  являются основными параметрами термодинамической системы. На практике часто достаточно знать два параметра данной массы вещества, чтобы найти третий параметр. Делается это с по-

мощью уравнения состояния термодинамической системы — формулы, связывающей параметры состояния системы. Приведем общий вид уравнения состояния термодинамической системы:

$$F(p, V, T) = 0. \quad (9.1)$$

Конкретный вид уравнения зависит от физических свойств рассматриваемой системы. Многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют, что большинство газов (особенно, легкие — водород и гелий) при нормальных условиях с достаточной точностью могут быть описаны уравнением состояния идеального газа, называемым *уравнением Менделеева–Клапейрона*:

$$pV = \frac{M}{\mu} RT, \quad (9.2)$$

где  $\frac{M}{\mu}$  — количество молей газа;

$M$  — масса газа;

$\mu$  — молярная масса;

$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  — газовая постоянная.

В системе СИ давление измеряется в паскалях ( $1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ ), объем — в кубических метрах, температура — в кельвинах (связана с температурой по шкале Цельсия  $t$  формулой  $T = t + 273,15$ ).

## 9.2. Вывод основного уравнения молекулярно-кинетической теории

Покажем, что МКТ позволяет получить для идеального газа уравнение Менделеева-Клапейрона и связать энергию поступательного движения его молекул  $\varepsilon_{\text{пост}}$  с температурой газа. Пусть концентрация молекул (число молекул в единице объема) равна  $n$ . Рассмотрим взаимодействие молекул со стенкой сосуда, выбрав ось  $x$  перпендикулярно этой стенке. В среднем половина молекул летит к стенке, а половина — от стенки, так что за время  $\tau$  на единицу площади стенки попадут молекулы, удаленные на расстояние не более

$v_x \tau$  количеством  $v_x t n / 2$  (статистический разброс нормальной составляющей скорости  $v_x$  учтем позже). То, что молекулы могут при этом столкнуться между собой, не меняет среднего соотношения. При упругом ударе о стенку молекула меняет нормальную составляющую скорости  $v_x$  на противоположную  $-v_x$ , так что изменение импульса молекулы массой  $m$  равно по модулю  $2mv_x$ . Поэтому давление, определяемое силой на единицу площади или переданным в единицу времени единице площади импульсом, равно:

$$p = \frac{v_x t n}{2} \frac{2mv_x}{\tau} = nmv_x^2. \quad (9.3)$$

Поскольку каждая молекула имеет свою скорость и соответственно квадрат скорости, то в (9.3) необходимо использовать среднее значение  $\langle v_x^2 \rangle$ . Кроме того, учтем, что  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  и средние значения квадрата скорости, очевидно, равны для разных координат. Отсюда получаем *основное уравнение молекулярно-кинетической теории*:

$$p = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle, \quad (9.4)$$

которое связывает макроскопические и микроскопические параметры идеального газа. Поскольку количество молей газа  $\frac{M}{\mu} = \frac{N}{N_A}$  (где  $N$  — полное число молекул, а  $N_A$  — число Авогадро) и  $n = N/V$ , то уравнение Менделеева–Клапейрона (9.2) можно переписать в виде

$$p = nkT, \quad (9.5)$$

где  $k = R/N_A$  — *постоянная Больцмана*.

Сравнение выражений (9.3) и (9.4) позволяет сделать вывод, что для идеального газа средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул пропорциональна температуре газа:

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (9.6)$$

Из выражений (9.4) и (9.6) можно получить выражение для среднего значения квадрата скорости:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m} \quad (9.7)$$

и для среднеквадратичной скорости:

$$v_{\text{кв}} \equiv \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (9.8)$$

Молекулярно-кинетическая теория позволяет определить давление смеси газов. Из вышеприведенных рассуждений следует, что разные молекулы оказывают давление, независимо друг от друга. Отсюда следует *закон Дальтона*: давление смеси химически не взаимодействующих идеальных газов равно сумме давлений отдельных компонент смеси (парциальных давлений):

$$p = \sum p_i. \quad (9.9)$$

### 9.3. Элементы классической статистической физики. Функции распределения и их роль

*Классическая статистическая физика* описывает макросистемы, состоящие из микрочастиц, с помощью законов классической механики (механики Ньютона). Примером системы, подчиняющейся законам классической статистической физики, является идеальный газ. Отметим, что в ряде случаев такой подход не пригоден для описания движения микрочастиц, и необходимо применять законы квантовой механики и квантовую статистическую физику.

Одним из основных понятий статистической физики является *вероятность*.

Допустим, что система может находиться в различных физических состояниях. Предположим, что эти состояния *дискретны*, характеризующие их физические величины меняются скачками и каждое состояние характеризуется определенным значением  $A_i$  некоторой физической величины  $A$ . (В частном примере это может быть модуль скорости молекул.) В некоторых состояниях система будет проводить большее время, в некоторых — меньше. Будем

измерять величину  $A$  некоторое число раз  $N$ . Допустим,  $N_i$  — число измерений, каждое из которых дает значение измеряемой величины  $A$ , равное  $A_i$ . Вероятностью  $w_i$  того, что величина  $A$  имеет значение  $A_i$ , является предел отношения числа  $N_i$  к полному числу измерений  $N$  при бесконечно большом  $N$ :

$$w_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}. \quad (9.10)$$

В классической физике физические величины обычно принимают не дискретные (квантованные), а непрерывные значения. Пример непрерывных классических величин — координата, скорость, импульс, энергия и т. д. Редкое исключение — дискретность длин волн стоячей волны струны. Впрочем, для многих задач классическая механика оказывается недостаточно верной, а квантовая механика — слишком сложной, тогда применяются комбинированные, квазиклассические методы. Так, энергию поступательного движения молекул газа при нормальных условиях обычно можно считать непрерывной, а энергию колебательного и вращательного движения сложных молекул — дискретной.

Описание непрерывных физических величин выполняется аналогично дискретным, но вероятности выражаются в дифференциальной форме (а суммы заменяются интегралами). Так например, для скорости молекул вероятность  $dw(v)$  того, что скорость молекулы  $v$  принимает значения в интервале от  $v$  до  $v + dv$  дается аналогичным (9.10) выражением:

$$dw(v) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dN(v)}{N}, \quad (9.11)$$

где  $dN(v)$  — число измерений, в которых скорости молекул попали в интервал от  $v$  до  $v + dv$ .

Очевидно, что суммарная вероятность всех допустимых состояний системы равна единице. Для дискретной величины это означает, что

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (9.12)$$

а для непрерывной —

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw(v) = 1. \quad (9.13)$$

Пусть в результате измерений установлено, что величина  $A$  с вероятностью  $dw(A)$  попадает в интервал значений от  $A$  до  $A+dA$ . Тогда можно ввести *функцию распределения*  $f(A)$ , характеризующую *плотность распределения вероятностей*  $\frac{dw(A)}{dA}$ :

$$f(A) = \frac{dw(A)}{dA}. \quad (9.14)$$

Функция распределения показывает вероятность, приходящуюся на единицу измерения физической величины  $A$ . Рассмотрим некоторые ее свойства. Во-первых, функция распределения не может быть отрицательной величиной, так как вероятность является неотрицательной:

$$f(A) \geq 0. \quad (9.15)$$

Несложно интегрированием в нужных пределах (9.14) найти вероятность того, что измеренное значение попадет в пределы ( $A_1 \leq A \leq A_2$ ):

$$w(A_1 \leq A \leq A_2) = \int_{A_1}^{A_2} f(A)dA. \quad (9.16)$$

Интегрированием в допустимых пределах (9.14) от  $A_{\min}$  до  $A_{\max}$  получим *условие нормировки функции распределения*:

$$\int_{A_{\min}}^{A_{\max}} f(A)dA = 1, \quad (9.17)$$

которое показывает, что вероятность попадания измеренного значения в весь допустимый интервал возможных значений  $A_{\min} \leq A \leq A_{\max}$  равна единице.

Существенно, что функция распределения позволяет определить среднее значение любой функции  $\varphi(A)$ :

$$\langle \varphi(A) \rangle = \int_{A_{\min}}^{A_{\max}} \varphi(A)f(A)dA. \quad (9.18)$$

Так, если  $\varphi(A) = A$ , то получим среднее значение  $A_{cp}$ ; если  $\varphi(A) = A^2$ , то получим средний квадрат  $A_{кв}^2$  и т. д. Отметим, что обычно в физических распределениях  $A_{cp} \neq A_{кв}$ , причем различаются они на множитель порядка (но не равный) единицы.

Нередко помимо физической величины  $A$  состояние системы характеризуется физической величиной  $B$ . Например, это могут быть скорость и координата или две проекции скорости. В этом случае для двумерной функции распределения по аналогии с (9.14) имеем

$$f(A, B) = \frac{dw(A, B)}{dAdB}, \quad (9.19)$$

а вероятность нахождения системы в состоянии со значениями этих величин в пределах  $(A_1 \leq A \leq A_2)$  и  $(B_1 \leq B \leq B_2)$  по аналогии с (9.16) определяется двумерным интегралом:

$$w(A_1 \leq A \leq A_2, B_1 \leq B \leq B_2) = \iint_{A_2, B_2}^{A_1, B_1} f(A, B) dAdB. \quad (9.20)$$

В соответствии с теорией вероятности для независимых событий справедлива теорема умножения вероятностей. Поэтому для случая статистической независимости значений параметров  $A$  и  $B$  друг от друга двумерная функция распределения  $f(A, B)$  равна произведению одномерных функций распределения:

$$f(A, B) = f_1(A)f_2(B). \quad (9.21)$$

Такая статистическая независимость часто имеет место в статистической физике, что позволяет рассчитывать сложные многомерные распределения.

Широкие возможности нахождения различных вероятностей, усреднений и т. д. делает функцию распределения одним из ключевых понятий статистической физики. Поэтому необходимо вывести характерные функции распределения и проанализировать их свойства.

# 10. Распределение Максвелла и характерные скорости молекул. Барометрическая формула. Распределение Больцмана.

## 10.1. Распределение Максвелла по составляющим скорости

Характерные функции распределения частиц можно вывести из общих и частных соображений, а также одну функцию распределения из другой. Ниже будут продемонстрированы эти разные методы. Выведем распределение Максвелла по составляющим скорости, используя общие соображения изотропии пространства и статистической независимости значений составляющих скорости друг от друга. Этот вывод был выполнен Максвеллом в 1859 г. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из упруго соударяющихся между собой частиц массы  $m$ . По прохождении некоего достаточно большого времени, независимо от начального распределения, функцию распределения можно считать не зависящей от времени (стационарной) и от координат (однородной). В реальной системе такое установившееся распределение может сформироваться уже за время нескольких столкновений частиц.

Из изотропии пространства (одинаковости свойств пространства по разным направлениям) следует независимость такой функции распределения от направления скорости:

$$f(\vec{v}) = f(v) = f(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}). \quad (10.1)$$

Поскольку значения проекций скорости молекул на ортогональные оси считаются статистически независимыми величинами, то распределения по координатным осям независимы друг от друга (а из изотропии пространства одинаковы), и в соответствии с (9.21)

$$f(v) = \Psi(v_x)\Psi(v_y)\Psi(v_z). \quad (10.2)$$

Прологарифмируем это уравнение:

$$\ln f \left( \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \right) = \ln \Psi(v_x) + \ln \Psi(v_y) + \ln \Psi(v_z) \quad (10.3)$$

и возьмем от результата производную по  $v_x$ :

$$\frac{f'(v) v_x}{f(v) v} = \frac{\Psi'(v_x)}{\Psi(v_x)}. \quad (10.4)$$

Аналогично при дифференцировании по  $v_y$  и  $v_z$  получим

$$\frac{f'(v) v_y}{f(v) v} = \frac{\Psi'(v_y)}{\Psi(v_y)}, \quad (10.5)$$

$$\frac{f'(v) v_z}{f(v) v} = \frac{\Psi'(v_z)}{\Psi(v_z)}. \quad (10.6)$$

Отсюда следует цепочка равенств:

$$\frac{f'(v)}{vf(v)} = \frac{\Psi'(v_x)}{v_x\Psi(v_x)} = \frac{\Psi'(v_y)}{v_y\Psi(v_y)} = \frac{\Psi'(v_z)}{v_z\Psi(v_z)}, \quad (10.7)$$

в которой второе звено может зависеть лишь от  $v_x$ , третье — только от  $v_y$ , четвертое — только от  $v_z$ , а поскольку они равны, то могут быть только константами:

$$\frac{\Psi'(v_x)}{v_x\Psi(v_x)} = \frac{\Psi'(v_y)}{v_y\Psi(v_y)} = \frac{\Psi'(v_z)}{v_z\Psi(v_z)} = \text{const} = -2\gamma. \quad (10.8)$$

Смысл постоянной  $\gamma$  выясним позднее. В результате из (10.8) можно получить дифференциальное уравнение

$$\frac{d \ln \Psi(v_x)}{dv_x} = -2\gamma v_x, \quad (10.9)$$

имеющее решение

$$\Psi(v_x) = C \cdot \exp(-\gamma v_x^2), \quad (10.10)$$

где  $C$  — константа нормировки (9.17):

$$C \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma v_x^2) dv_x = 1. \quad (10.11)$$

В пределах интегрирования учтено, что проекция скорости теоретически может принимать любые значения. Интеграл (10.11) называется интегралом Пуассона, он равен  $\sqrt{\pi/\gamma}$ , откуда

$$C = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}. \quad (10.12)$$

Постоянная  $\gamma$  характеризует скорость экспоненциального убывания функции распределения, связана со средней энергией поступательного движения молекул и пропорциональна температуре газа (9.6)  $\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT$ . При этом на каждую координату (или, как говорят, на каждую степень свободы) приходится треть, так что по определению среднего значения (9.18)

$$\left\langle \frac{mv_x^2}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{mv_x^2}{2} \exp(-\gamma v_x^2) dv_x = \frac{kT}{2}, \quad (10.13)$$

откуда с использованием значения  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma^3}}$  табличного интеграла

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma^3}} = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp(-\gamma v_x^2) dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \frac{kT}{m}. \quad (10.14)$$

Таким образом,  $\gamma = \frac{m}{2kT}$  и (с учетом (10.12))  $C = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$ . В результате окончательно получаем *распределение Максвелла по составляющей скорости*:

$$\Psi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right). \quad (10.15)$$

Из (10.1) теперь несложно получить *распределение Максвелла по скорости*:

$$f(\vec{v}) = f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right). \quad (10.16)$$

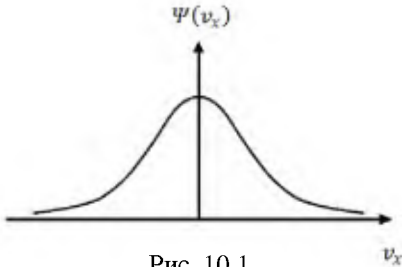


Рис. 10.1

В соответствии с (9.14) распределение  $f(v_x, v_y, v_z)$  определяет вероятность  $dw(v_x, v_y, v_z)$  того, что величина скорости попадает в интервал значений от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ , от  $v_y$  до  $v_y + dv_y$ , от  $v_z$  до  $v_z + dv_z$ :

$$dw(v_x, v_y, v_z) = f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z. \quad (10.17)$$

Колоколообразный вид распределения Максвелла (рис. 10.1) совпадает с нормальным законом распределения Гаусса для распределения ошибок измерений случайной величины. Следует подчеркнуть, что распределение Максвелла выведено в предположении произвольного характера взаимодействия частиц в процессе упругого столкновения. Например, это может быть столкновение твердых шаров или заряженных частиц. Но вывод перестает быть справедливым, если столкновения неупругие, поскольку частицы в этом случае теряют энергию, и система перестает быть замкнутой и равновесной.

## 10.2. Распределение Максвелла по модулю скорости. Нахождение наиболее вероятной, средней, среднеквадратичной скоростей

При проведении расчетов часто используют распределение по модулю скорости. В отличие от распределения Максвелла по скорости (10.16) это распределение рассматривает все направления скорости при фиксированном модуле. Для распределения Максвелла по скорости рассматривалась вероятность, что скорость имеет значение в пределах от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ , от  $v_y$  до  $v_y + dv_y$ , от  $v_z$  до  $v_z + dv_z$ . Таким образом, конец вектора должен находиться в пределах прямоугольного параллелепипеда объемом  $dv_x dv_y dv_z$ . В свою очередь, для распреде-

ления по модулю скорости скорость имеет значение от  $v$  до  $v+dv$ , и конец вектора должен находиться в слое в пределах между сферами радиуса  $v$  и  $v+dv$ . Объем такого бесконечно тонкого слоя определяется площадью поверхности сферы и равен  $4\pi v^2 dv$ . Очевидно, что отношение вероятностей равно отношению этих объемов. Используя (10.16) и (10.17), получаем

$$dW(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv, \quad (10.18)$$

откуда получаем *распределение Максвелла по модулю скорости*:

$$\varphi(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right). \quad (10.19)$$

Это распределение позволяет сделать ряд интересных оценок для молекул газа. Несложно понять, как выглядит полученное распределение. При малых скоростях в (10.19) квадратичная зависимость доминирует

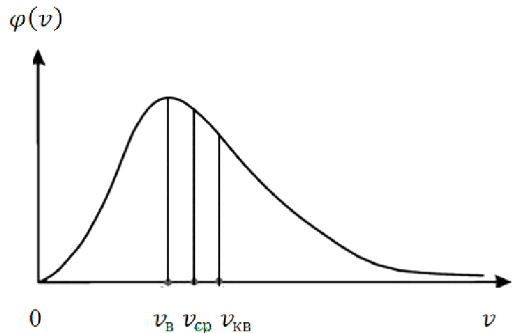


Рис. 10.2

над экспонентой, которая близка к единице (рис. 10.2). При больших скоростях доминирует резко спадающая экспонента. В промежуточной области имеется максимум этой функции, который соответствует наиболее вероятному модулю скорости. Этот модуль для краткости и не совсем точно по традиции называют *наиболее вероятной скоростью*  $v_e$ . Ее можно определить, приравняв к нулю производную от функции  $\varphi(v)$ :

$$\varphi'(v) = 8\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \left(1 - \frac{mv^2}{2kT}\right) = 0. \quad (10.20)$$

Отсюда имеем для наиболее вероятной скорости

$$v_g = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (10.21)$$

Кроме того, в соответствии с формулой (9.18) можно вычислить ряд характерных усреднений. Найдем *среднюю скорость* (точнее, средний модуль скорости):

$$v_{cp} = \int_0^{\infty} v \varphi(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (10.22)$$

Интеграл взят по частям с предварительной заменой переменной на  $v^2$ .

Наконец, найдем с помощью табличного интеграла средний квадрат скорости:

$$v_{кв}^2 = \int_0^{\infty} v^2 \varphi(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^4 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) = \frac{3kT}{m}. \quad (10.23)$$

Это выражение дает *среднеквадратичную скорость*

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (10.24)$$

Последняя формула, естественно, совпадает с формулой (9.8), полученной исходя из молекулярно-кинетической теории. Полученные характерные скорости различаются на 10–20%, причем  $v_g < v_{cp} < v_{кв}$ .

Отметим, что уже при скоростях, на порядок больших средней скорости, существенную роль могут играть неупругие столкновения, и система оказывается не вполне равновесной. Однако благодаря быстрому экспоненциальному спаду распределения в этом диапазоне скоростей при нормальных условиях сосредоточено небольшое количество частиц. Поэтому нарушение распределения в целом обычно оказывается несущественным.

Распределение Максвелла можно интерпретировать как распределение по кинетической энергии, поскольку кинетическая энергия легко выражается через скорость.

### 10.3. Барометрическая формула

Рассмотрим распределение по потенциальной энергии. Допустим, что молекулы находятся в потенциальном поле, например в гравитационном поле Земли. Молекулы атмосферы притягиваются к Земле, и концентрация их убывает с увеличением высоты. Если высота подъема не слишком велика, то силу притяжения и температуру газа можно считать постоянной. Молекула газа в соответствии с (3.14) имеет потенциальную энергию

$$П=mgh, \quad (10.25)$$

где  $h$  — высота подъема над поверхностью Земли.

Сформулируем условие равновесия для тонкого слоя газа (рис. 10.3) высотой  $dh$ . Разность давлений газа на верхней границе слоя  $p(h+dh)$  на высоте  $h+dh$  и на нижней границе слоя  $p(h)$  на высоте  $h$  в условиях равновесия обеспечивается весом слоя газа единичной площади:

$$dp = -\rho g dh. \quad (10.26)$$

Знак “минус” учитывает то, что с увеличением высоты давление падает. Из уравнения Менделеева-Клапейрона (9.2)  $\rho = \frac{M}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ , что позволяет преобразовать (10.26) к виду

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh. \quad (10.27)$$

Последнее уравнение несложно проинтегрировать, причем высота меняется от 0 до  $h$ , а давление меняется соответственно от  $p_0$  (давления на поверхности Земли) до  $p$ :

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} \int_0^h dh, \quad (10.28)$$

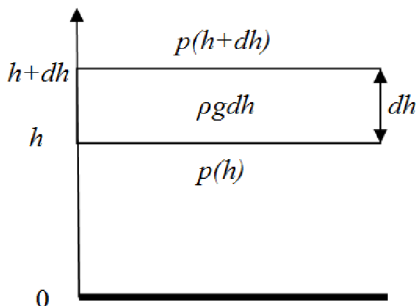


Рис. 10.3

так что имеем  $\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\mu gh}{RT}$ . После потенцирования получаем *барометрическую формулу*:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right). \quad (10.29)$$

Выразив молярную массу и газовую постоянную через число Авогадро  $N_A$  ( $\mu = mN_A$  и  $R = kN_A$ ), получим барометрическую формулу в виде зависимости от потенциальной энергии  $\Pi$  молекулы:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{\Pi}{kT}\right). \quad (10.30)$$

Барометрическую формулу для оценки можно использовать и в случае, когда температура не является постоянной, а слабо зависит от высоты. Такая ситуация имеет место в атмосфере до высоты примерно 100 км, когда давление падает на несколько порядков. На таких высотах выделяют несколько слоев атмосферы. Нижний слой — тропосфера — простирается до высоты примерно 12 км, содержит 80% массы атмосферы Земли и характеризуется почти линейным спадом температуры от 300 до 200 К. Далее следуют стратосфера и мезосфера, в которых на высоте 50 км имеется максимум температуры 270 К (связанный с поглощением ультрафиолетового излучения Солнца озоном), а на высоте 80 км — минимум температуры 200 К. Наконец, с высоты 90 км начинается термосфера, в которой повышение температуры с высотой объясняется ионизацией молекул жестким излучением Солнца.

## 10.4. Распределение Больцмана

Барометрическая формула, представляющая распределение давления по высоте, позволяет получить обобщенную функцию распределения молекул в потенциальном поле. Воспользовавшись связью давления с концентрацией частиц  $p = nkT$ , из (10.30) можно получить

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{\Pi}{kT}\right). \quad (10.31)$$

Число молекул в малом прямоугольном параллелепипеде пространства объемом  $dV = dx dy dz$ , расположенном вблизи точки  $(x, y, z)$ , равно  $dN = n dV = n_0 \exp\left(-\frac{\Pi}{kT}\right) dx dy dz$ . Соответствующая вероятность нахождения в этом объеме имеет вид

$$dw = \frac{dN}{N} = \frac{n_0}{N} \exp\left(-\frac{\Pi}{kT}\right) dx dy dz, \quad (10.32)$$

Полученное соотношение называется распределением Больцмана. В обобщенном виде

$$dw(x, y, z) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{\Pi(x, y, z)}{kT}\right) dx dy dz, \quad (10.33)$$

*распределение Больцмана* устанавливается в любом потенциальном поле, в частности в неоднородном (меняющемся в пространстве) поле. При этом в соответствии с (9.14) *функция распределения Больцмана* имеет вид

$$f(x, y, z) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{\Pi(x, y, z)}{kT}\right), \quad (10.34)$$

где константа находится из условий нормировки:

$$\text{const} \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\Pi(x, y, z)}{kT}\right) dx dy dz = 1. \quad (10.35)$$

Таким образом, наиболее важные равновесные распределения частиц по кинетической и потенциальной энергии задаются экспоненциальной функцией (*имеют экспоненциальный вид*). Такой экспоненциальный вид связан с изотропией пространства. Можно показать, что экспоненциальный вид имеют также распределения в условиях слабой неравновесности, например, распределения в электрическом разряде или распределения с учетом поправки на неупругие столкновения при высоких энергиях. Однако в условиях сильной неравновесности характерным является *степенной вид распределения*, и функция распределения может убывать с ростом энергии по квадратичной или кубической зависимости. Это обычно имеет место при торможении быстрых час-

тиц, например, при торможении пучков ускоренных электронов в различных средах. При этом степенной вид убывания распределения определяется степенными вероятностями потери энергии и связан с трехмерностью пространства. Здесь стоит отметить еще аналогичный степенной вид на протяжении многих порядков энергетического распределения космических лучей.

## **11. Элементы физической кинетики. Явления переноса в газах**

### **11.1. Средняя длина пробега и частота столкновений молекул**

Постоянное движение молекул приводит к их частым столкновениям. Это движение и столкновения могут приводить к передаче (переносу) вещества, энергии, импульса и др. в различных средах. Особенно существенен этот перенос для неравновесных систем, в которых сильно различаются отдельные части системы. Именно изучением таких процессов занимается физическая кинетика. Явления переноса могут быть связаны с выравниванием неоднородностей плотности, температуры или скорости упорядоченного перемещения слоев вещества. *Явления переноса состоят в том, что в среде возникает направленный перенос массы (диффузия), внутренней энергии (теплопроводность), импульса (внутреннее трение, или вязкость).*

Ключевую роль в физической кинетике играют столкновения, их частота и пробеги молекул. Начнем с оценки *средней длины пробега* молекул газа. Эта величина равна *среднему расстоянию, которое пролетает молекула между очередными ее столкновениями с другими молекулами газа*. Условие, что молекулы газа должны чаще претерпевать взаимные столкновения по сравнению со столкновениями со стенками, соответствует случаю, когда размеры сосуда существенно превышают длину свободного пробега молекул.

Рассмотрим сначала процесс столкновений движущейся со скоростью  $v$  (быстрой) частицы диаметра  $d$  с неподвижными частицами среды диаметра  $D$ . Быстрая частица столкнется с неподвижной, если центр неподвижной частицы попадет внутрь цилиндра диаметром  $d+D$ , причем ось цилиндра определяется вектором скорости быстрой частицы (рис. 11.1). Чтобы движущаяся частица претерпела в среднем одно столкновение, пройдя путь  $\lambda$ , внутрь цилиндра с основанием площадью  $\pi \frac{(d+D)^2}{4}$  и длиной  $\lambda$ , должен попасть центр одной молекулы среды. Таким образом, средняя длина пробега быстрой частицы  $\lambda$  оказывается связанной через объем цилиндра  $V = \pi \frac{(d+D)^2}{4} \lambda$  с концентрацией частиц среды  $n = \frac{1}{V} = \frac{4}{\pi(d+D)^2 \lambda}$ . Отсюда средняя длина пробега быстрой частицы

$$\lambda = \frac{4}{\pi(d+D)^2 n}. \quad (11.1)$$

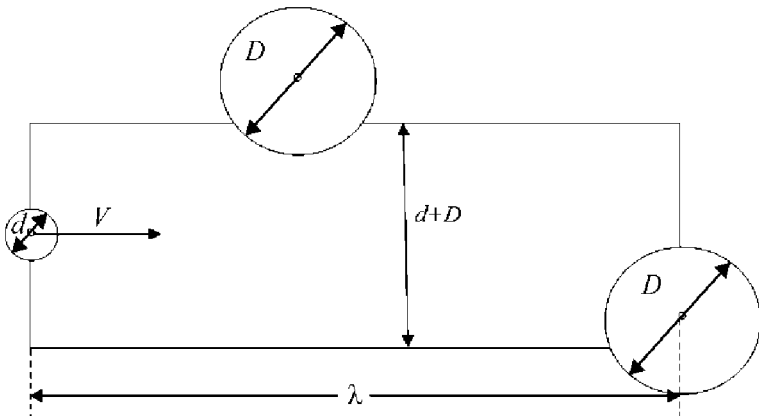


Рис. 11.1

Эта формула справедлива для оценки пробегов, например, электронов и фотонов в различных средах. Частота столкновений (количество столкновений в единицу времени) выражается через скорость быстрой частицы:

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{\pi(d+D)^2 nv}{4}. \quad (11.2)$$

Если диаметры сталкивающихся частиц равны  $d = D$ , то

$$\lambda = \frac{1}{\pi d^2 n}; \quad (11.3)$$

$$v = \pi d^2 nv. \quad (11.4)$$

Если диаметр одной из сталкивающихся частиц мал по сравнению с другим, то из (11.1) и (11.2) следует

$$\lambda = \frac{1}{\pi r^2 n} = \frac{1}{\sigma n}; \quad (11.5)$$

$$v = \pi r^2 nv = \sigma nv, \quad (11.6)$$

где  $r$  — радиус большой частицы;

$\sigma$  — площадь ее сечения.

Остальные формулы теории столкновений часто тоже выражаются через площадь сечения (или просто сечение) столкновения, равную площади сечения цилиндра (рис. 11.1). Из рисунка видно, что *при столкновении одинаковых частиц сечение молекулы вчетверо меньше сечения столкновения*. Таким образом, *вероятность столкновения определяется площадью сечения (сечением) частиц*.

Получим теперь выражение для длины пробега молекул идеального газа. Задача несколько усложняется тем, что при столкновении обе молекулы движутся. Поэтому перейдем в систему отсчета, связанную с одной из молекул. Вторая молекула в этой системе будет двигаться с относительной скоростью  $\vec{v}_{\text{отн}}$ . В соответствии с (11.2) частота столкновений изменится пропорционально отношению относительной и лабораторной скоростей. Найдем связь относительной скорости со скоростью молекул в лабораторной системе отсчета. Предположим, сталкивающиеся молекулы имеют в лабораторной системе скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  (рис. 11.2). В соответствии с рис. 11.2 по правилу сложения векторов

$$v_{\text{отн}}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi. \quad (11.7)$$

Усредняя это выражение, получим, что каждое положительное значение косинуса компенсируется отрицательным, так что последний член (11.7) равен нулю. Таким образом, получим выражение среднеквадратичной относительной скорости

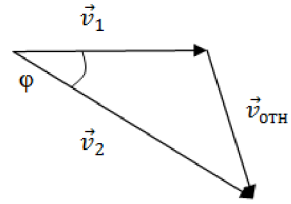


Рис. 11.2

через среднеквадратичную:  $v_{\text{кво}}^2 = 2v_{\text{кв}}^2$  или  $v_{\text{кво}} = \sqrt{2}v_{\text{кв}}$ . Полагая, что отношение среднеквадратичных и средних скоростей одинаково, получим, что относительная скорость в  $\sqrt{2}$  раз больше лабораторной, что из (11.4) дает формулу для *средней частоты столкновений молекул*:

$$v = \sqrt{2}\pi d^2 n v = \sqrt{2}\sigma n v, \quad (11.8)$$

где  $\sigma = \pi d^2$  — сечение столкновения одинаковых молекул.

Тогда в лабораторной системе несложно найти *среднюю длину пробега молекул*:

$$\lambda = \frac{v}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}. \quad (11.9)$$

Отметим, что в полученных формулах предполагалось, что форма молекул близка к шарообразной, что не совсем верно. Однако введение понятия эффективного сечения улучшает ситуацию, поскольку эффективное сечение можно оценить не только у шара. Впрочем экспериментальные значения сечений отличаются при использовании разных способов измерения.

## 11.2. Общий вид уравнения переноса

Теория явлений переноса утверждает, что перенос осуществляется при хаотическом движении молекул и столкновениях. При этом можно считать, что перенос происходит послойно, причем толщина такого слоя мала и равна средней длине пробега молекул. Такое

описание дает достаточно точные выражения для уравнений переноса и приближенные (с точностью до коэффициента порядка единицы) значения для коэффициентов переноса в газах. Эти значения для коэффициентов переноса несколько занижены по отношению к точным расчетам.

Вероятность движения молекулы при тепловом движении во всех направлениях одинакова. Таких направлений шесть, и они соответствуют движению в положительном и отрицательном направлении вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Плотность  $j$  потока частиц (количество частиц в единицу времени на единицу площади) в любом из этих направлений может быть определена по аналогии с (7.32) по формуле

$$j = \frac{1}{6} n v_{\text{ср}}, \quad (11.10)$$

где  $n$  — концентрация молекул газа;  
 $v_{\text{ср}}$  — средняя скорость молекул.

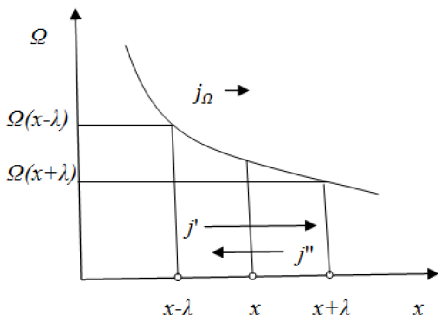


Рис. 11.3

Рисунок 11.3 иллюстрирует перенос вдоль координаты  $x$  любой рассматриваемой физической величины  $\Omega$  через площадь  $S$ , перпендикулярную координате  $x$ . В качестве переносимой величины может выступать масса, энергия, импульс и т. д. При этом переносимую величину будем относить к одной молекуле. Через площадь  $S$  в направлении

оси  $x$  проходит поток молекул  $J' = j'S$ , а в противоположном направлении — соответственно поток  $J'' = j''S$ . В равновесном случае плотности потоков молекул и величины  $\Omega$  в противоположных направлениях одинаковы. Однако в неравновесных условиях, необходимых для осуществления явлений переноса, потоки величины  $\Omega$  вдоль и против оси  $x$  различаются. При этом в направлении оси  $x$  проходят молекулы, характеризуемые величиной  $\Omega(x - \lambda)$ , а в проти-

воположном — величиной  $\Omega(x+\lambda)$ , где  $\lambda$  — средняя длина пробега молекул газа.

Тогда суммарная плотность потока величины  $\Omega$  определяется разностью встречных потоков:

$$j_{\Omega} = j'_{\Omega}(x - \lambda) - j''_{\Omega}(x + \lambda) = \frac{1}{6}nv_{cp}(\Omega(x - \lambda) - \Omega(x + \lambda)). \quad (11.11)$$

Считая длину пробега  $\lambda$  малой величиной (по сравнению с рассматриваемыми расстояниями, на которые происходит перенос, она обычно мала), разложим в ряд:

$$\Omega(x \pm \lambda) = \Omega(x) \pm \frac{d\Omega}{dx} \lambda. \quad (11.12)$$

В результате плотность потока величины  $\Omega$  (11.11) можно преобразовать к общему виду уравнения переноса:

$$j_{\Omega} = -\frac{1}{3}nv_{cp}\lambda \frac{d\Omega}{dx}. \quad (11.13)$$

Поток величины  $\Omega$  через площадь  $S$  соответственно выражается формулой

$$J_{\Omega} = j_{\Omega}S = -\frac{1}{3}nv_{cp}\lambda S \frac{d\Omega}{dx}. \quad (11.14)$$

Знак “минус” в последних формулах означает, что поток направлен в сторону убывания величины  $\Omega$ .

Полученное уравнение переноса применимо для описания явлений диффузии, теплопроводности и вязкости в газах. Эти уравнения описывают явления на микроскопическом уровне и дают правильный результат при отсутствии в среде макроскопического перемешивания. Изложенная здесь теория переноса качественно применима и к описанию жидкостей, а иногда и твердых тел. Однако в конденсированных средах диффузия обычно сильно затруднена из-за постоянного взаимодействия близко расположенных молекул. Теплопроводность и вязкость в конденсированных средах по той же причине обычно выше, чем в газах.

### 11.3. Диффузия и коэффициент диффузии

*Диффузией* называется взаимное проникновение соприкасающихся веществ друг в друга вследствие теплового движения частиц. Диффузия сопровождается более равномерным распределением вещества по занимаемому объему.

Опишем диффузию примеси одного газа в другом. Для простоты предположим, что оба газа имеют примерно одинаковые молекулы. Суммарную концентрацию газов будем считать постоянной:

$$n = n_1 + n_2 = \text{const.} \quad (11.15)$$

За физическую величину, определяющую диффузию в уравнениях переноса, примем относительную концентрацию диффундирующего примесного газа:

$$\Omega(x) = \frac{n_1(x)}{n}. \quad (11.16)$$

Подстановка этого выражения в уравнение переноса (11.13) дает для плотности потока частиц диффундирующего газа *уравнение диффузии*:

$$j_{N1} = -\frac{1}{3} v_{\text{cp}} \lambda \frac{dn_1}{dx} = -D \frac{dn_1}{dx}, \quad (11.17)$$

где  $D = \frac{1}{3} v_{\text{cp}} \lambda$  — *коэффициент диффузии*. (11.18)

Из формулы видно, что диффузия тем интенсивней, чем больше градиент концентрации газа, чем больше скорость теплового движения молекул и чем больше средняя длина пробега молекул. Для потока частиц диффундирующего газа из (11.14) следует

$$J_{N1} = -DS \frac{dn_1}{dx}. \quad (11.19)$$

Аналогичные (11.16) — (11.19) выражения можно записать и для второго газа. Часто удобно оперировать не потоком частиц диффундирующего газа, а потоком массы. Для этого домножим обе части уравнения (11.19) на массу молекулы газа  $m$ . В результате в

левой части уравнения вместо потока частиц, измеряемого количеством частиц в единицу времени, получим поток массы  $J_{M1}$ , измеряемый массой в единицу времени. В правой части уравнения с учетом равенства  $\rho_1 = m n_1$  вместо градиента концентрации получим градиент плотности:

$$J_{M1} = \frac{dM}{dt} = -DS \frac{d\rho_1}{dx}, \quad (11.20)$$

где  $M$  — масса переносимого посредством диффузии вещества.

При интегрировании по времени (11.20) получим *закон Фика*:

$$M = -DS \frac{d\rho_1}{dx} t. \quad (11.21)$$

С учетом формул для средней длины пробега молекул (11.9)  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}$  и (10.22) для средней скорости  $v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$  имеем для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{1}{3 \sigma n} \sqrt{\frac{4kT}{\pi m}}. \quad (11.22)$$

Таким образом, коэффициент диффузии пропорционален корню из температуры, так как рост скорости молекул ведет к росту диффузии. Кроме того, коэффициент диффузии обратно пропорционален концентрации молекул среды, поскольку увеличение концентрации молекул уменьшает длину пробега молекул, что затрудняет диффузию.

## **11.4. Теплопроводность и коэффициент теплопроводности**

*Теплопроводность* имеет место при наличии разности температур, поддерживаемой внешними источниками. В этом случае моле-

кулы газа в разных точках обладают разной средней кинетической энергией. В результате хаотическое тепловое движение молекул приводит к направленному переносу энергии. Молекулы из более теплых частей объема газа несут энергию в более холодные части объема. При описании теплопроводности, переносимой величиной  $\Omega$ , используется энергия теплового движения молекулы газа:

$$\Omega(x) = \frac{i}{2} kT(x). \quad (11.23)$$

Воспользуемся термодинамическими понятиями эффективного числа степеней свободы молекулы  $i$  и удельной теплоемкости газа при постоянном объеме  $c_V$ . В соответствии с формулами термодинамики (12.11), (12.12), (12.14):  $c_V = \frac{C_V}{\mu} = \frac{iR}{2\mu} = \frac{ikN_A}{2\mu} = \frac{ikn}{2\rho}$ . Тогда из (11.13) для плотности потока тепловой энергии получим *уравнение теплопроводности*:

$$j_Q = -\frac{1}{3} n v_{\text{ср}} \lambda \frac{i}{2} k \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{3} v_{\text{ср}} \lambda c_V \rho \frac{dT}{dx} = -\chi \frac{dT}{dx} \quad (11.24)$$

где  $\chi = \frac{1}{3} v_{\text{ср}} \lambda c_V \rho$  — коэффициент теплопроводности. (11.25)

Для потока тепловой энергии (Дж/с) из (11.14)

$$J_Q = \frac{dQ}{dt} = -\chi S \frac{dT}{dx}. \quad (11.26)$$

Интегрирование потока тепловой энергии по времени дает *закон теплопроводности Фурье*:

$$Q = -\chi S \frac{dT}{dx} t, \quad (11.27)$$

где  $Q$  — количество переносимой посредством теплопроводности теплоты.

При подстановке в коэффициент теплопроводности выражений для длины пробега и средней скорости получим

$$\chi = \frac{c_V}{3\sigma} \sqrt{\frac{4kTm}{\pi}}. \quad (11.28)$$

Таким образом, коэффициент теплопроводности (как и коэффициент диффузии) пропорционален корню из температуры. Но в отличие от коэффициента диффузии он не зависит от концентрации молекул. Это связано с тем, что в более плотном газе в теплопроводности участвует большее количество молекул. Но при этом вследствие меньшей длины пробега энергия передается на меньшие расстояния.

## 11.5. Вязкость и коэффициент вязкости

*Внутренним трением (вязкостью)* называется трение между движущимися слоями газа или жидкости. Возникающие при этом силы внутреннего трения направлены по касательной к поверхности соприкосновения движущихся слоев. Явление вязкости газа может быть описано с помощью уравнения переноса при подстановке в него в качестве переносимой величины  $\Omega$  импульса молекулы при упорядоченном движении газа в направлении, перпендикулярном оси  $x$ :

$$\Omega(x) = \tau u(x), \quad (11.29)$$

где  $u(x)$  — скорость течения газа в направлении, перпендикулярном оси  $x$ .

Так, если газ течет по трубе, то перенос импульса происходит вдоль оси  $x$  — перпендикулярно скорости течения и вдоль радиуса сечения трубы. Из (11.13) для плотности потока получим *уравнение вязкости*:

$$j_p = -\frac{1}{3} v_{cp} \lambda \rho \frac{du}{dx} = -\eta \frac{du}{dx}, \quad (11.30)$$

где  $\eta = \frac{1}{3} v_{cp} \lambda \rho$  — *коэффициент вязкости*  $\eta$ . (11.31)

Тогда закон Ньютона для внутреннего трения для расчета потока импульса (силы внутреннего трения) имеет вид

$$J_p = -\eta S \frac{du}{dx}. \quad (11.32)$$

Поток импульса имеет размерность импульса в единицу времени и несет физический смысл силы, с которой слои газа действуют друг на друга. После подстановки в (11.31) выражений для средней скорости и длины пробега имеем

$$\eta = \frac{1}{3\sigma} \sqrt{\frac{4kTm}{\pi}}. \quad (11.33)$$

Зависимости от температуры и концентрации и их объяснения — такие же, как в случае теплопроводности. Независимость коэффициента вязкости от плотности газа имеет то же объяснение, что и для теплопроводности.

Экспериментальные исследования показывают, что все три коэффициента переноса с увеличением температуры растут несколько быстрее, чем дают формулы. Это объясняется тем, что с увеличением температуры происходит некоторое уменьшение эффективного сечения  $\sigma$  взаимодействия молекул газа, а эта величина стоит в знаменателях формул. То есть молекула сильнее прогибается, если по ней ударяет молекула с большей энергией, и эффективный диаметр шара становится меньше.

Несложно убедиться, что между полученными коэффициентами переноса существует связь:

$$\chi = c_V \eta = c_V \rho D. \quad (11.34)$$

Эта связь позволяет, измерив один из коэффициентов переноса, вычислить остальные. Кроме того, соотношения дают возможность по измеренным коэффициентам переноса найти среднюю длину пробега молекул газов и их эффективное сечение, это, в свою очередь, позволяет находить диаметр молекулы.

## 11.6. Броуновское движение и диффузия

Рассмотрим движение малой частицы, например пылинки, в жидкости или газе. Молекулы среды вследствие теплового движе-

ния постоянно наносят удары с разных сторон по такой частице, оказывая на нее давление. И если размеры частицы ненамного превосходят размеры молекул, то давление с разных сторон в отдельные моменты времени оказывается некомпенсированным. А поскольку масса частицы мала, то случайные удары молекул могут приводить к хаотическому движению частиц. Иными словами, постоянные микроскопические флуктуации давления приводят к случайным перемещениям малых частиц. Такой процесс может, в частности, приводить к диффузии частиц. *Хаотическое движение малых частиц в жидкости или газе называется броуновским движением.* Такое движение микрочастиц пыльцы растений впервые заметил в 1827 г. английский ботаник Р. Броун (1773–1858). Масса броуновских частиц может составлять порядка  $10^{-16}$  кг, а скорость хаотического движения — 1 см/с.

Запишем второй закон Ньютона для частицы массы  $m$  вдоль оси  $x$  в предположении действия на нее силы  $F$  и силы вязкого трения  $\frac{xx'}{B}$ , пропорциональной скорости частицы:

$$mx'' = -\frac{xx'}{B} + F. \quad (11.35)$$

Смысл коэффициента  $B$ , называемого подвижностью частиц, определяется стационарным случаем, когда  $F = \text{const}$ , и дрейфовое движение под действием силы становится равномерным. Тогда из уравнения следует

$$x' = BF. \quad (11.36)$$

Таким образом, *подвижность частиц является коэффициентом пропорциональности между вызывающей дрейф частиц силой и скоростью дрейфа.*

Предположим, что причиной броуновского движения является случайная сила  $F$ , среднее по времени значение которой равно нулю  $F_{\text{ср}} = 0$ . Уединим случайную силу в правой части уравнения (11.35) и умножим обе части уравнения на  $x$ :

$$mxx'' + \frac{xx'}{B} = xF. \quad (11.37)$$

Уравнение движения может быть преобразовано с учетом соотношения  $xx'' = (xx')' - x'^2$ :

$$m(xx')' - mx'^2 + \frac{xx'}{B} = xF. \quad (11.38)$$

Усредним полученное уравнение по большому числу броуновских частиц:

$$m\langle (xx')' \rangle - m\langle x'^2 \rangle + \frac{\langle xx' \rangle}{B} = \langle xF \rangle. \quad (11.39)$$

Благодаря хаотичности движения частиц можно считать, что координата  $x$  и сила  $F$  являются статистически независимыми и среднее значение их произведения равно произведению средних и равно нулю  $\langle xF \rangle = 0$ . Из (9.6) несложно получить:  $m\langle x'^2 \rangle = kT$ . Тогда усредненное уравнение движения приобретает вид несложного дифференциального уравнения относительно  $(xx')$ :

$$m\langle xx' \rangle' + \frac{\langle xx' \rangle}{B} = kT. \quad (11.40)$$

Решение такого уравнения имеет экспоненциальный вид. Если в начальный момент времени частица находилась в начале координат и  $\langle xx' \rangle(t=0) = 0$ , то это решение имеет вид

$$\langle xx' \rangle = kTB(1 - \exp(-\frac{t}{\tau})), \quad (11.41)$$

где характерное время  $\tau=1/(Bm)$  мало по сравнению со временем наблюдения броуновской частицы.

Поэтому при установившемся движении экспонентой можно пренебречь. Тогда имеем

$$2\langle xx' \rangle = \langle x^2 \rangle' = 2kTB. \quad (11.42)$$

Интегрирование этого выражения относительно  $\langle x^2 \rangle$  с учетом начального условия  $\langle x^2 \rangle(t=0) = 0$  дает формулу Эйнштейна:

$$\langle x^2 \rangle = 2kTBt. \quad (11.43)$$

Таким образом, случайное дрейфовое смещение частицы вдоль координаты пропорционально не времени (как это имеет место при равномерном движении), а квадратному корню из времени.

Броуновское движение можно интерпретировать как процесс диффузии. Для установления связи параметров этих процессов рассмотрим, как ведут себя броуновские частицы в однородном силовом поле, например, силы тяжести. В такой системе в стационарном состоянии устанавливается распределение Больцмана (10.31)  $n = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)$ . При этом поток частиц, движущихся под действием силы с дрейфовой скоростью (11.36)  $V_{mg}$ , уравнивается диффузионным потоком (11.17):

$$nV_{mg} = -D \frac{dn}{dx}. \quad (11.44)$$

Подставляя в это уравнение выражение для концентрации броуновских частиц и ее производной, получим соотношение Эйнштейна:

$$D = kTB. \quad (11.45)$$

Теперь из (11.43) имеем для описывающей дрейф частиц формулы Эйнштейна

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt. \quad (11.46)$$

## **11.7. Поглощение и рассеяние частиц. Закон Бугера-Ламберта. Транспортировка частиц через среды**

Рассмотрим теперь задачу о транспортировке частиц через различные среды. Задача сводится к определению слоя вещества, способного поглотить существенную часть падающих на этот слой частиц. Рассмотрим сначала задачу о транспортировке фотонов. При взаимодействии с молекулами среды фотоны могут испытывать поглощение и рассеяние. *Поглощение* фотона средой ведет к его исчезновению и ха-

рактируется сечением поглощения  $\sigma_{\text{п}}$ . Сечение поглощения по аналогии с (11.5) определяет среднюю длину поглощения:

$$L_{\text{п}} = \frac{1}{\sigma_{\text{п}}n}, \quad (11.47)$$

где  $n$  — концентрация молекул среды.

*Рассеяние* фотона ведет к изменению направления его движения и характеризуется сечением рассеяния  $\sigma_{\text{р}}$  и средней длиной рассеяния  $L_{\text{р}}$ :

$$L_{\text{р}} = \frac{1}{\sigma_{\text{р}}n}. \quad (11.48)$$

Существенно, что сечение рассеяния и средняя длина рассеяния соответствуют эффективному рассеянию на угол  $90^\circ$ .

Рассмотрим сначала процесс поглощения при распространении параллельного пучка света в поглощающей среде. Поглощение проявляется в том, что количество фотонов и пропорциональная этому количеству интенсивность света  $I$  уменьшаются по мере прохождения вещества. При этом уменьшение интенсивности  $dI$  пропорционально толщине пройденной среды  $dx$  и интенсивности  $I$ :

$$dI = -\mu I dx, \quad (11.49)$$

где коэффициент поглощения  $\mu$  зависит от свойств вещества и от энергии фотонов, знак минус указывает на то, что с увеличением толщины вещества интенсивность света падает.

Это уравнение после разделения переменных и интегрирования дает

$$I = \text{const} \exp(-\mu x). \quad (11.50)$$

Значение константы находится из начальных условий (при  $x=0$ ,  $I=I_0$ ):

$$I=I_0 \exp(-\mu x). \quad (11.51)$$

Полученное выражение носит название *закона Бугера-Ламберта* (он экспериментально открыт французским ученым П. Бугера).

гером в 1729 г. и теоретически получен немецким ученым И. Ламбертом в 1760 г.). Во многих случаях этот закон применим не только для фотонов, но и для пучков ускоренных электронов и других частиц.

Найдем с помощью закона Бугера-Ламберта среднюю длину поглощения. Запишем закон для числа поглощаемых частиц:

$$N = N_0 \exp(-\mu x). \quad (11.52)$$

Суммарная длина пробега всех частиц определяется интегралом:

$$L_{\Sigma} = \int_0^{\infty} N dx = N_0 \int_0^{\infty} \exp(-\mu x) dx = \frac{N_0}{\mu}, \quad (11.53)$$

откуда делением на начальное количество частиц получим среднюю длину поглощения частиц:

$$L_{\Pi} = \frac{L_{\Sigma}}{N_0} = \frac{1}{\mu}. \quad (11.54)$$

Таким образом, по физическому смыслу коэффициент поглощения равен обратному значению средней длины поглощения:

$$\mu = \frac{1}{L_{\Pi}} = \sigma_{\Pi} n. \quad (11.55)$$

Проанализируем вид траектории распространения частиц при различных соотношениях интенсивностей процессов поглощения и рассеяния.

Если  $L_{\Pi} \ll L_p$ , то такая оптическая среда называется прозрачной, траектория фотона близка к прямолинейной и длина транспортировки (толщина тормозящего слоя среды)

$$L = L_{\Pi}. \quad (11.56)$$

Если  $L_{\Pi} \gg L_p$ , то такая оптическая среда называется мутной, а траектория фотона близка к траектории броуновской частицы. В этом случае длина транспортировки (толщина тормозящего слоя среды) определяется дрейфовым смещением (11.46):

$$L = \sqrt{2Dt}. \quad (11.57)$$

При этом коэффициент диффузии в соответствии с (11.18) определяется средней скоростью частицы и средней длиной рассеяния:  $D = \frac{1}{3} v_{\text{cp}} L_p$ , а время диффузии — средней длиной поглощения и средней скоростью частицы:  $t = L_{\text{п}}/v_{\text{cp}}$ , так что

$$L = \sqrt{\frac{2}{3} L_p L_{\text{п}}}. \quad (11.58)$$

В промежуточном случае  $L_{\text{п}} \approx L_p$  — обе предельные оценки прямолинейного (11.56) и диффузионного (11.58) приближений — дают примерно одинаковый ответ.

Формулы обобщенной диффузии на основе комбинации прямолинейного (11.56) и диффузионного (11.58) приближений применимы также для описания транспортировки ускоренных электронов широкого диапазона энергий в различных средах. При этом необходимо помнить, что в процессе торможения электроны теряют свою энергию порциями по несколько потенциалов ионизации, а средняя длина поглощения соответствует практически полной потере энергии ускоренным электроном.

Для электронов в диапазоне энергий от сотен до миллионов электронвольт ( $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ) справедливо отношение

$$\frac{L_p}{L_{\text{п}}} = \text{const} \frac{\gamma}{z+1}, \quad (11.59)$$

где  $\text{const}$  — константа, примерно равная 1;

$\gamma$  — релятивистский фактор;

$z$  — заряд ядра атомов среды.

Это означает, что диффузионный транспорт имеет место в средах с  $z \gg 1$ , в то время как прямолинейное приближение может применяться при  $z \approx 1$  (в особенности для релятивистских электронов).

Модель обобщенной диффузии позволяет сделать оценки коэффициента отражения частиц от различных сред. Так, при диффузионном транспорте доминирующее рассеяние приводит к большим коэффициентам отражения, близким к единице. Напротив, при пря-

молинейном транспорте малая вероятность рассеяния приводит к коэффициентам отражения, много меньшим единицы. Метод диаграмм позволяет получить коэффициент отражения в прямолинейном приближении:

$$k_{\text{отр}} = 0,15 \frac{L_{\text{п}}}{L_{\text{р}}}. \quad (11.60)$$

Для ускоренных электронов в широком диапазоне энергий из (11.59) следует, что для небольших  $z$  коэффициент отражения пропорционален  $z + 1$ .

## 12. Первое начало термодинамики

### 12.1. Первое начало термодинамики и закон сохранения энергии

Рассмотрим произвольную термодинамическую систему. Ее энергию можно изменить двумя способами: совершая над системой работу и подводя к ней теплоту. Например, при сжатии газа поршнем в цилиндре совершается работа, за счет которой повышается температура газа и таким образом увеличивается внутренняя энергия газа. Другим способом повысить температуру газа и его внутреннюю энергию можно путем сообщения ему теплоты. *Теплота — это энергия хаотического движения молекул, форма проявления внутренней энергии тела.* Сообщить теплоту можно за счет обмена внутренними энергиями при контакте тела с другим телом, имеющим отличную температуру.

В результате макроскопическая энергия механического движения может превращаться в микроскопическую энергию теплового движения и наоборот. При таких превращениях соблюдается закон сохранения энергии. Именно этот закон и выражает применительно к термодинамическим процессам первое начало термодинамики. Будем считать положительной величиной количество теплоты  $Q$ , если оно подводится

к системе, а работу  $A$  — если система совершает ее против внешних сил. Тогда в соответствии с законом сохранения энергии изменение внутренней энергии системы будет равно  $\Delta U = Q - A$ , или

$$Q = \Delta U + A. \quad (12.1)$$

Это и есть *первое начало термодинамики*: *Теплота, сообщаемая системе, идет на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил*. Первое начало термодинамики можно записать и в дифференциальной форме:

$$dQ = dU + dA. \quad (12.2)$$

Из формулы видно, что в системе СИ количество теплоты, работа и энергия измеряются в одинаковых единицах — джоулях (Дж).

Первое начало термодинамики постулирует эквивалентность теплоты и работы. Если рассматривать систему, периодически возвращающуюся в первоначальное состояние, например тепловой двигатель, то изменение ее внутренней энергии в цикле  $\Delta U = 0$ . Тогда, согласно первому началу термодинамики,  $A = Q$ . Это свидетельствует о *невозможности построения вечного двигателя первого рода*, работа которого больше, чем сообщенная ему извне энергия. (Это еще одна формулировка первого начала термодинамики.)

## 12.2. Работа и теплота. Работа, совершаемая газом в различных изопроцессах

Работа в термодинамике имеет тот же смысл, что и в механике. Найдем выражение для работы в терминах термодинамических параметров. При перемещении поршня сечением  $S$  в цилиндре газ совершает работу, равную произведению силы  $F$  на перемещение  $dl$  (рис. 12.1):

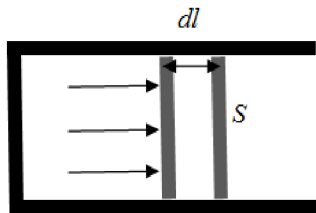


Рис. 12.1

$$dA = p S dl = p dV, \quad (12.3)$$

где  $dV = S dl$  — изменение объема газа.

Сила связана с давлением  $p$  известным соотношением  $F = pS$ . Интегрирование (12.3) даст работу при переходе из начального состояния с объемом  $V_1$  в конечное состояние с объемом  $V_2$ :

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (12.4)$$

Выражение для работы при изменении объема справедливо как для газообразных, так и для твердых и жидких тел. По геометрическому смыслу интеграла работа, совершаемая газом при расширении от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ , равна площади под участком кривой  $p = f(V)$  (рис. 12.2). При расширении газ совершает положительную работу ( $A > 0$ ), так как направле-

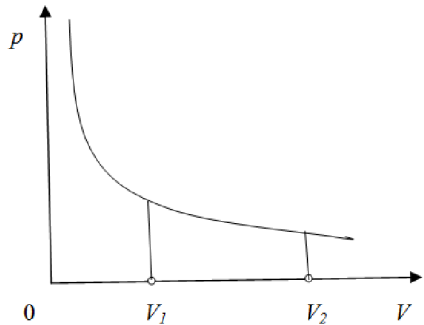


Рис. 12.2

ния силы и перемещения поршня совпадают. При сжатии работа газа отрицательна ( $A < 0$ ). Работа  $A'$ , совершаемая внешними телами над газом, отличается от работы газа  $A$  знаком:  $A' = -A$ . Работа газа зависит не только от начального и конечного состояния, но и от пути изменения состояния, поскольку при другом пути и другой зависимости  $p = f(V)$  на рис. 12.2 может измениться площадь под кривой. Поэтому работа (12.4) является функцией не начального и конечного состояний, а функцией процесса.

Процесс, при котором термодинамическая система отдает или получает энергию только за счет совершения работы, называется *адиабатным* ( $dQ = 0$ ). Процесс, при котором термодинамическая система отдает или получает энергию только за счет разности температур тел, называется *тепловым* ( $dA = 0$ ).

При рассмотрении идеального газа выделяют *изопроцессы*: *изотермические* (когда  $T = const$ ), *изобарные* (когда  $p = const$ ) и *изо-*

*хорные* (когда  $V = const$ ). Найдем работу, совершаемую газом в этих случаях.

Для изотермического процесса подставим выражение для давления из уравнения Менделеева-Клапейрона в формулу работы (12.4):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{MRT}{\mu V} dV = \frac{MRT}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.5)$$

Для изобарного процесса можно вынести константу из-под интеграла работы:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1). \quad (12.6)$$

Для изохорного процесса работа газа равна нулю:

$$dA = p dV = 0, \quad (12.7)$$

поскольку  $dV=0$ .

### **12.3. Внутренняя энергия идеального газа. Степени свободы молекул. Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы**

Перейдем теперь к детальному рассмотрению понятия внутренней энергии идеального газа и связи этой энергии с количеством степеней свободы молекул. Ранее в модели идеального газа мы учитывали только энергию поступательного движения молекул. Такой подход хорошо описывает одноатомный газ. В соответствии с классической механикой, число *степеней свободы одноатомной молекулы* равно количеству координат, необходимому для задания их положения в пространстве. В нашем трехмерном пространстве число координат и число степеней свободы одноатомного газа равно трем. В соответствии с (9.6) средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул, определяемая через средний квадрат скорости  $v_{\text{КБ}}^2$ , пропорциональна температуре газа:

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{mv_{\text{КБ}}^2}{2} = \frac{mv_{x\text{КБ}}^2}{2} + \frac{mv_{y\text{КБ}}^2}{2} + \frac{mv_{z\text{КБ}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (12.8)$$

При этом из изотропии пространства (равноправности всех направлений) средние квадраты компонент скорости равны  $v_{x_{\text{КВ}}}^2 = v_{y_{\text{КВ}}}^2 = v_{z_{\text{КВ}}}^2$ , что позволяет сопоставить каждой из координат и каждой степени свободы треть средней кинетической энергии поступательного движения молекул. Таким образом, можно считать, что на каждую степень свободы приходится в среднем энергия  $\frac{1}{2}kT$ .

Если молекула газа не одноатомная, а состоит из  $N$  атомов, то для задания их положения в пространстве необходимо  $3N$  координат. Таким образом, молекула из  $N$  атомов имеет  $3N$  степеней свободы. Поскольку многоатомная молекула является единым целым, то удобно рассматривать движение ее центра масс с тремя поступательными степенями свободы. При этом оставшиеся степени свободы приходятся на вращательное и колебательное движения молекулы. Теоретическая механика утверждает, что нелинейная молекула, состоящая из трех и более атомов, способна участвовать в трех независимых вращательных движениях относительно трех осей координат. Любое другое вращение можно представить как их комбинацию. Поэтому число вращательных степеней свободы нелинейной молекулы равно трем. Для линейной молекулы из двух и более атомов (выстроенных вдоль одной линии) учет вращения вокруг оси, соединяющей атомы, считающиеся материальными точками, не дает вклада в энергию. Поэтому число вращательных степеней свободы линейной молекулы равно двум. Оставшиеся степени свободы приходятся на колебательное движение. Несложно посчитать, что число колебательных степеней свободы для нелинейной молекулы равно  $3N-6$ , а для линейной молекулы —  $3N-5$ .

В случае многоатомного газа (как и для одноатомного) действует закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы: средняя кинетическая энергия, приходящаяся при тепловом равновесии на одну степень свободы молекулы, равна  $\frac{1}{2}kT$ .

Особо следует учитывать энергию колебательных степеней свободы. При нормальной и низкой температурах колебательное движение молекул обычно описывается законами квантовой механики. Эти законы обосновывают жесткость молекул и отсутствие

колебательной энергии — в этом случае считают, что колебательные степени свободы *выморожены* (отсутствуют). При высоких же температурах на колебательную степень свободы помимо кинетической энергии  $\frac{1}{2}kT$  приходится такая же потенциальная энергия, так что в сумме получается  $kT$ . (Из модели гармонического осциллятора следует, что средняя потенциальная энергия колебательного движения равна средней кинетической энергии.)

Таким образом, в общем случае средняя внутренняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon_{\text{внутр}} \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (12.8a)$$

а внутренняя энергия моля идеального газа

$$U_{\text{моля}} = \frac{i}{2} RT, \quad (12.9)$$

где  $i$  — эффективное число степеней свободы молекулы.

Как следует из вышеприведенных рассуждений, для одноатомной молекулы  $i=3$ , для линейной молекулы при нормальной и низкой температурах  $i=5$ , для нелинейной молекулы при нормальной и низкой температурах  $i=6$ . При высоких температурах порядка  $10^3$  К для линейной молекулы  $i=6N-5$ , для нелинейной молекулы  $i=6N-6$ .

Отметим, что при очень низких температурах (порядка 10 К) обычно вымораживаются и вращательные степени свободы. Это связано с тем, что законы классической статистической механики (для вращения молекул), на которых основан закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы, перестают работать, и необходимо применение квантовомеханических законов.

## 12.4. Теплоемкость идеального газа при постоянном объеме и давлении. Уравнение Майера

Характеристикой теплообмена является *теплоемкость*, определяемая как количество теплоты, которое необходимо подвести к телу в данном процессе, чтобы его температура возросла на 1 К:

$$C_{\text{тела}} = \frac{dQ}{dT}. \quad (12.10)$$

Во многих важных случаях приращение температуры тела прямо пропорционально сообщенному ему количеству теплоты, и теплоемкость тела является константой. В общем случае теплоемкость тела может зависеть от параметров состояния этого тела, например от его температуры или объема. Очевидно, что чем больше масса тела, тем сложнее его нагреть, и теплоемкость тела пропорциональна количеству содержащегося в нем вещества. Количество вещества может характеризоваться массой или количеством молей. Поэтому удобно пользоваться понятиями *удельной теплоемкости* (теплоемкости единицы массы тела):

$$c = \frac{C_{\text{тела}}}{M} \quad (12.11)$$

и *молярной теплоемкости* (теплоемкости одного моля тела):

$$C = \frac{C_{\text{тела}}}{\nu}, \quad (12.12)$$

где  $M$  — масса тела;

$\nu = M/\mu$  — количество вещества в нем;

$\mu$  — молярная масса.

Удельная и молярная теплоемкости связаны очевидным соотношением:  $c = C/\mu$ . Из (12.10) и (12.12) следует, что  $dQ = \nu C dT$ , откуда в случае постоянной теплоемкости количество теплоты  $Q$  линейно связано с изменением температуры тела  $\Delta T$ :

$$Q = \nu C \Delta T. \quad (12.13)$$

Найдем теплоемкость идеального газа в изохорном процессе, при котором его объем остается неизменным. При этом работа равна нулю, так как нет изменения объема газа. Поэтому первое начало термодинамики имеет вид  $dQ = dU$ . Отсюда с учетом (12.9) *молярная теплоемкость при постоянном объеме* равна:

$$C_V = \frac{dU_{\text{моля}}}{dT} = \frac{i}{2} R. \quad (12.14)$$

Интегрированием можно получить связь внутренней энергии идеального газа с теплоемкостью:

$$U = \nu U_{\text{моля}} = \nu C_V T. \quad (12.15)$$

Соответственно *удельная теплоемкость при постоянном объеме* равна  $C_V = \frac{i}{2\mu} R$ . Таким образом, при нормальной температуре молярная теплоемкость равна для одноатомного газа

$$C_V = \frac{3}{2} R, \quad (12.16)$$

для газа с линейными молекулами из двух и более атомов

$$C_V = \frac{5}{2} R, \quad (12.17)$$

для газа с нелинейными молекулами из трех и более атомов

$$C_V = 3R. \quad (12.18)$$

Необходимо учитывать, что эти выражения являются приближенными, так как эффективное количество степеней свободы зависит от температуры и от вида молекул. Например, для самых легких молекул водорода уже при температуре 50 К вращательные степени свободы вымерзают и его молярная теплоемкость  $C_V$  близка к  $\frac{3}{2} R$ . При температуре 300 К вращательные степени свободы начинают подчиняться закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы и его теплоемкость  $C_V$  приближается к  $\frac{5}{2} R$ . При высоких температурах включается колебательная степень свободы, и теплоемкость  $C_V$  стремится к  $\frac{7}{2} R$ .

Рассмотрим изобарный процесс, для которого первое начало термодинамики для одного моля газа объемом  $V_{\text{моля}}$  имеет вид

$$dQ = dU_{\text{моля}} + p dV_{\text{моля}}. \quad (12.19)$$

Тогда по аналогии с (12.14) для *молярной теплоемкости при постоянном давлении* имеем

$$C_p = \frac{dU_{\text{моля}}}{dT} + p \frac{dV_{\text{моля}}}{dT} = \frac{i}{2} R + R = \frac{(i+2)}{2} R. \quad (12.20)$$

Здесь использована связь  $dV_{\text{моля}}$  и  $dT$  при постоянном давлении, полученная при взятии дифференциала от уравнения Менделеева-Клапейрона:  $pdV_{\text{моля}} = RdT$ . Соответственно *удельная теплоемкость при постоянном давлении*

$$C_p = \frac{(i+2)}{2\mu} R. \quad (12.21)$$

Выражение (12.20) с учетом (12.14) можно переписать в виде *уравнения Майера*:

$$C_p = C_v + R. \quad (12.22)$$

Теплоемкость при постоянном давлении больше теплоемкости при постоянном объеме, потому что при изобарном процессе дополнительно совершается работа, на которую идет часть подведенной теплоты. Таким образом, молярная теплоемкость идеального газа зависит от вида процесса, в котором он участвует. Так, для изотермического процесса в соответствии с определением теплоемкости (12.10)  $dT = 0$  теплоемкость равна бесконечности.

## **12.5. Адиабатный процесс. Вывод уравнения адиабаты**

При адиабатном процессе отсутствует теплообмен между системой и окружающей средой:  $dQ = 0$ . К таким процессам можно отнести быстропотекающие процессы, а также процессы с хорошей теплоизоляцией. Например, адиабатным процессом можно считать распространение звука в среде, поскольку скорость распространения звуковой волны настолько велика, что обмен энергией между областями сжатия и разрежения среды произойти не успевает. Адиабатные процессы применяются в двигателях внутреннего сгорания (расширение и сжатие горючей смеси в цилиндрах), в холодильных установках и т. д.

Из первого начала термодинамики при  $dQ = 0$  имеем

$$dU + dA = 0, \text{ или } dA = -dU. \quad (12.23)$$

Таким образом, внешняя работа при адиабатном процессе совершается за счет изменения внутренней энергии системы. При этом если газ расширяется, совершая работу против внешних сил, то его внутренняя энергия и температура уменьшаются. А при адиабатном сжатии температура газа повышается. Это явление используется, например, в дизельных двигателях для воспламенения горючей смеси.

Уравнение (12.23) с помощью выражений для работы и приращения внутренней энергии может быть переписано в виде

$$pdV = -\frac{M}{\mu} C_V dT. \quad (12.24)$$

Добавив к этому уравнению дифференциал от уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pdV + Vdp = \frac{M}{\mu} R dT, \quad (12.25)$$

получим систему двух уравнений. Поделив почленно уравнение (12.25) на уравнение (12.24), имеем:  $\frac{pdV + Vdp}{pdV} = -\frac{R}{C_V}$ . Воспользовавшись уравнением Майера, получим после преобразований

$$1 + \frac{Vdp}{pdV} = 1 - \frac{C_p}{C_V}.$$

Последнее уравнение допускает разделение переменных:

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V},$$

где введено обозначение показателя адиабаты

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \quad (12.26)$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение соответственно в пределах от  $p_1$  до  $p_2$  и от  $V_1$  до  $V_2$  с последующим потенцированием, получим

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma,$$

или

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma. \quad (12.27)$$

Поскольку состояния 1 и 2 выбраны произвольно, то можно переписать (12.27) в виде

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (12.28)$$

Полученное выражение называют *уравнением адиабаты*, или *уравнением Пуассона*. Заметим, что показатель адиабаты всегда больше единицы. При нормальной температуре для одноатомных газов  $i = 3$ ,  $\gamma = 1,67$ ; для двухатомных газов и других газов с линейной молекулой  $i = 5$ ,  $\gamma = 1,4$ ; для газов с нелинейной молекулой  $i = 6$ ,  $\gamma = 1,33$ .

Воспользовавшись уравнением Менделеева-Клапейрона, несложно получить уравнение адиабаты в переменных  $T$ ,  $V$ :

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (12.29)$$

или  $p$ ,  $T$ :

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}. \quad (12.30)$$

График адиабатного процесса  $p = \text{const}/V^\gamma$  в координатах  $p$ ,  $V$  изображается более крутой кривой, чем изотерма ( $p = \text{const}/V$ , см. рис. 12.2). Это объясняется тем, что при адиабатном сжатии увеличение давления газа обусловлено не только уменьшением его объема, как при изотермическом сжатии, но и повышением температуры в адиабатном процессе. Математически это выражается в формуле адиабатного процесса тем, что  $\gamma > 1$ .

Из (12.24) найдем работу при адиабатном процессе:  $dA = -\frac{M}{\mu} C_V dT$ , откуда при интегрировании

$$A = -\frac{M}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{M}{\mu} C_V (T_1 - T_2). \quad (12.31)$$

Работа в координатах  $p$ ,  $V$  находится путем исключения температуры из (12.31) либо по определению работы (12.3) с учетом (12.28):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right). \quad (12.32)$$

Работа газа при адиабатном расширении меньше, чем при изотермическом процессе. Это объясняется тем, что при адиабатном расширении происходит охлаждение газа, тогда как при изотермическом расширении температура поддерживается постоянной за счет притока извне теплоты.

Следует отметить, что поскольку для адиабатного процесса теплообмен с окружающей средой отсутствует и  $dQ = 0$ , то теплоемкость (в соответствии с определением) равна нулю.

## 13. Второе начало термодинамики. Энтропия

### 13.1. Формулировки второго начала термодинамики

Первое начало термодинамики установило эквивалентность и возможность взаимопреобразования внутренней энергии, теплоты и работы. Однако оно не указывает возможного направления протекания процессов. Например, первое начало термодинамики, как и закон сохранения энергии, не запрещает самопроизвольный переход теплоты от холодного тела к горячему. Но опыт показывает, что в природе такие процессы не наблюдаются. Это потребовало сформулировать второе начало термодинамики. Одна из формулировок второго начала термодинамики (по Клаузиусу) прямо запрещает такой процесс: *теплота сама по себе не может переходить от менее нагретого тела к более нагретому*. Приведем еще одну формулировку второго начала термодинамики (по Томсону): *невозможен вечный двигатель второго рода — периодический процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты в работу вследствие охлаждения одного тела*.

Таким образом, установлено неравенство взаимных переходов теплоты и работы при циклических процессах: полный переход

работы в теплоту возможен, а вот переход теплоты в работу возможен лишь частично.

## 13.2. КПД кругового процесса

Дадим сначала некоторые определения, которые позволят дать количественные формулировки второго начала термодинамики.

Термодинамический процесс называется *обратимым*, если он может происходить как в прямом, так и в обратном направлении через все промежуточные стадии; причем если система возвращается в исходное состояние, то в окружающих телах не происходит никаких изменений. Процесс, не удовлетворяющий этим условиям, является *необратимым*. Примеры необратимых процессов: диффузия, теплопередача, расширение газа в пустоту.

Обратимые процессы — это физическая абстракция. Тем не менее многие процессы в природе и технике можно считать обратимыми. Существенно, что обратимые процессы являются наиболее экономичными и имеют максимальный коэффициент полезного действия.

*Циклом, или круговым процессом, называется процесс, при котором система возвращается в исходное состояние.* График цикла представляет собой замкнутую кривую. Если цикл протекает по часовой стрелке, то такой цикл называется *прямым* (рис. 13.1). Прямой цикл можно разбить на процессы расширения ( $1a2$ ) и сжатия ( $2b1$ ) рабочего тела (газа), причем работа расширения (определяется площадью под кривой  $1a2$ ) положительна ( $dV > 0$ ), работа сжатия (определяется площадью под кривой  $2b1$ ) отрицательна ( $dV < 0$ ). Таким образом, суммарная работа за цикл по модулю определяется площадью внутри замкнутой кривой. Если цикл протекает по часовой стрелке, то работа расширения больше работы сжатия, и очевидно, что суммарная работа за цикл положительна:  $A > 0$ . Если цикл протекает против часовой стрелки (рис. 13.2), то он называется *обратным*. При этом работа расширения (определяется площадью под кривой  $1b2$ ) меньше работы сжатия, так что суммарная работа за цикл отрицательна:  $A < 0$ .

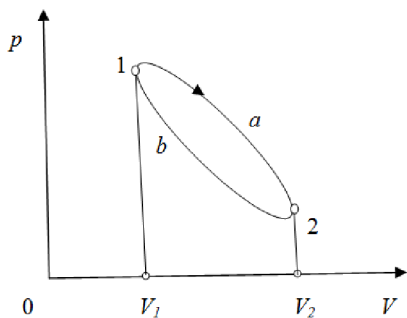


Рис. 13.1

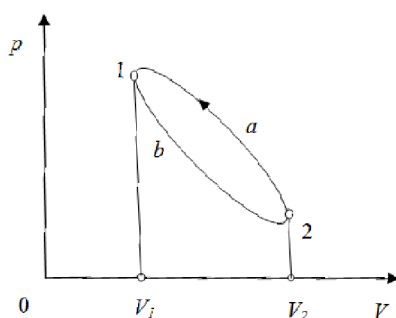


Рис. 13.2

Прямой цикл применяется в *тепловых машинах* — они совершают циклическую работу за счет полученной извне теплоты. Обратный цикл применяется в *холодильных машинах* — в них за счет работы внешних сил теплота переносится от тела с низкой температурой (холодильника) к телу с более высокой температурой (нагревателю).

Коэффициентом полезного действия (КПД) тепловой машины называется отношение совершенной машиной работы  $A$  к количеству теплоты  $Q_1$ , полученному рабочим телом от нагревателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (13.1)$$

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние, и, следовательно, изменение внутренней энергии газа за цикл равно нулю. Поэтому из первого начала термодинамики для кругового процесса (при  $dU = 0$ ) следует, что работа за цикл равна полученному количеству теплоты:

$$A = Q. \quad (13.2)$$

В общем случае тепловая машина не только получает теплоту  $Q_1$ , но и отдает теплоту  $Q_2$ , так что суммарное количество теплоты, полученное системой, равно:

$$Q = Q_1 - Q_2. \quad (13.3)$$

В результате КПД кругового процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (13.4)$$

Чтобы КПД теплового двигателя достиг единицы, в соответствии с (13.4) необходимо, чтобы выполнялось условие  $Q_2 = 0$ . Иными словами, тепловой двигатель должен иметь один источник теплоты, а это, как показал французский физик и инженер Карно (1796–1832), невозможно. Так, Карно доказал, что для работы теплового двигателя необходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами.

### 13.3. Цикл Карно. КПД идеальной тепловой машины. Теоремы Карно

Карно проанализировал наиболее экономичный цикл, состоящий из двух изотермических и двух адиабатных процессов (цикл Карно). Такой цикл представлен на рис. 13.3, причем изотермы представлены участками 1–2 и 3–4, а адибаты – участками 2–3 и 4–1. В качестве рабочего тела выбран идеальный газ. Теплота получается газом на участке 1–2, а отдается газом холодильнику на участке 3–4. В адиабатных процессах, очевидно, теплообмен отсутствует.

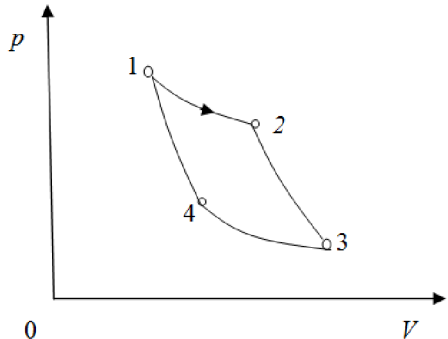


Рис. 13.3

При изотермическом расширении 1–2  $\Delta U = 0$ , поэтому из первого начала термодинамики количество теплоты  $Q_1$ , полученное газом от нагревателя, равно работе расширения  $A_{12}$ , совершаемой газом при процессе 1–2 (см. (12.5)):

$$Q_1 = A_{12} = \frac{MRT_1}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (13.5)$$

При адиабатном процессе 2–3 теплообмен с окружающей средой отсутствует, и работа расширения  $A_{23}$  совершается за счет изменения внутренней энергии (см. (12.31)):

$$A_{23} = \frac{M}{\mu} C_V (T_1 - T_2). \quad (13.6)$$

Количество теплоты  $Q_2$ , отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии 3–4, равно работе сжатия  $A_{34}$ :

$$Q_2 = -A_{34} = -\frac{MRT_2}{\mu} \ln \frac{V_4}{V_3} = \frac{MRT_2}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (13.7)$$

Здесь использованы соотношения (12.29) для адиабатных процессов 2–3 и 4–1:  $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$  и  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$ , откуда  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$ .

Работа адиабатного сжатия процесса 4–1 определяется разностью температур и равна по модулю и противоположна работе адиабатного расширения  $A_{23}$ :

$$A_{41} = \frac{M}{\mu} C_V (T_2 - T_1) = -A_{23}. \quad (13.8)$$

В результате работа, совершаемая в результате цикла, равна площади замкнутой фигуры на рис. 13.3:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 - Q_2, \quad (13.9)$$

а КПД цикла Карно из (13.4), (13.5), (13.7) равен:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (13.10)$$

Таким образом, КПД цикла Карно определяется только температурами нагревателя и холодильника. Для повышения КПД необходимо увеличивать отношение температур нагревателя и холодильника.

Проводя анализ эффективности тепловых машин, Карно доказал две теоремы.

*Первая теорема Карно:* КПД цикла Карно определяется только температурами нагревателя и холодильника, и не зависит от устройства машины и выбора рабочего тела.

*Вторая теорема Карно:* КПД тепловой машины, работающей по необратимому циклу, не может превышать КПД цикла Карно машины с теми же тепловыми резервуарами.

Рассмотрим еще один пример известного цикла. Найдем КПД цикла двигателя внутреннего сгорания. Его можно схематично представить следующим набором процессов (рис. 13.4): 1–2 — изохорный подвод теплоты при сгорании топлива в цилиндре двигателя; 2–3 — адиабатное расширение рабочего тела; 3–4 — изохорный отвод теплоты при выбросе отработанного газа в атмосферу; 4–1 — адиабатное сжатие рабочего тела со степенью сжатия смеси  $\varepsilon: V_{34} = \varepsilon V_{12}$ . Рабочее тело будем считать идеальным газом с показателем адиабаты  $\gamma$ .

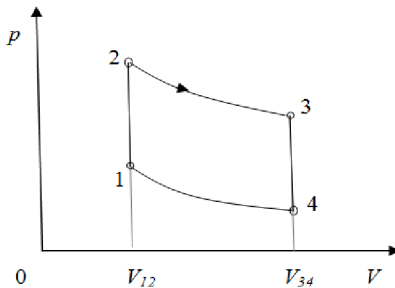


Рис. 13.4

Подведенная и отведенная в изохорных процессах 1–2 и 3–4 теплота в соответствии с определением теплоемкости равна:

$$Q_1 = \nu C_v(T_2 - T_1) \text{ и } Q_2 = \nu C_v(T_3 - T_4).$$

Тогда

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\nu C_v(T_2 - T_1) - \nu C_v(T_3 - T_4)}{\nu C_v(T_2 - T_1)} = \frac{(T_2 - T_1) - (T_3 - T_4)}{T_2 - T_1}.$$

Для адиабатных процессов

$$\frac{T_3}{T_2} = \varepsilon^{1-\gamma} \text{ и } \frac{T_4}{T_1} = \varepsilon^{1-\gamma}.$$

Отсюда

$$\eta = \frac{(T_2 - T_1) - (\varepsilon^{1-\gamma} T_2 - \varepsilon^{1-\gamma} T_1)}{T_2 - T_1} = 1 - \varepsilon^{1-\gamma}. \quad (13.11)$$

Таким образом, КПД двигателя внутреннего сгорания определяется степенью сжатия смеси  $\epsilon$ .

### 13.4. Энтропия. Изменение энтропии в процессах идеального газа. Энтропия и термодинамическая вероятность. Формула Больцмана

Если термодинамическая система перешла из одного состояния в другое, то полученное ею количество теплоты зависит не только от начального и конечного состояний, но и от вида процесса перехода. Иными словами, количество теплоты является функцией процесса, а не состояния. В поисках функции состояния рассмотрим величину, приращение которой равно отношению тепла, поглощенного на участке обратимого процесса, к температуре:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (13.12)$$

Эта величина называется энтропией или приведенным количеством теплоты. Понятие энтропии введено в 1865 г. Р. Клаузиусом. Несложно показать, что сумма всех приращений энтропии в цикле Карно равна нулю. Действительно, для адиабатных процессов 2–3 и 4–1  $dS=0$ , поскольку  $dQ = 0$  (рис. 13.3). А для оставшихся изотермических процессов 1–2 и 3–4 интегрирование (13.12) с учетом (13.5) и (13.7) дает

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T_1} + \int_3^4 \frac{dQ}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = \frac{MR}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{MR}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1} = 0, \quad (13.13)$$

или

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (13.14)$$

Этот результат справедлив независимо от выбора рабочего тела. Можно показать, что изменение энтропии равно нулю не только в цикле Карно, но и в любом другом обратимом цикле. Таким обра-

зом, энтропия является функцией состояния, а ее значения в начале и в конце кругового процесса одинаковы.

Можно показать, что энтропия системы, совершающей необратимый цикл, возрастает. В общем случае справедливо *неравенство Клаузиуса: энтропия замкнутой системы возрастает (в случае необратимых процессов) либо остается постоянной (в случае обратимых процессов)*:

$$\oint \frac{dQ}{T} \geq 0. \quad (13.15)$$

Найдем теперь с помощью (12.9) и (12.3) изменение энтропии в процессах идеального газа:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{dA}{T} = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R \frac{dT}{T} + \frac{pdV}{T} = \frac{MR}{\mu} \frac{i}{2} \frac{dT}{T} + \frac{MR}{\mu} \frac{dV}{V}. \quad (13.16)$$

Здесь давление выражено с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона. Интегрирование полученного выражения дает

$$\Delta S = \frac{MR}{\mu} \left( \frac{i}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (13.17)$$

Следует подчеркнуть, что изменение энтропии определяется только начальным и конечным состояниями идеального газа и не зависит от характера процесса перехода. Из формулы (13.17) следует, что при изотермическом процессе

$$\Delta S = \frac{MR}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (13.18)$$

а при изохорном процессе

$$\Delta S = \frac{MR}{\mu} \frac{i}{2} \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (13.19)$$

Как уже отмечалось, из определения энтропии следует, что для адиабатного процесса  $dS = 0$ . Энтропия измеряется в джоулях на кельвин (Дж/К). Энтропия обладает свойством аддитивности: энтропия системы равна сумме энтропии тел, входящих в систему. Связано это с тем, что тепло, поглощенное системой, складывается из порций тепла, поглощенных ее частями. Свойством аддитивности

обладают также внутренней энергией, массой, объемом (а, например, температура и давление таким свойством не обладают).

Энтропия — понятие не только термодинамическое, но и статистическое. Она связана с термодинамической вероятностью состояния системы. *Термодинамическая вероятность  $W$  состояния системы* — это число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние. Термодинамическая вероятность состояния системы, состоящей всего из 10 молекул газа, примерно 1000, а в реальных системах молекул на много порядков больше. Поэтому более удобным для восприятия в термодинамике оказалось использовать не величину  $W$ , а ее логарифм  $\ln W$ . Последнему можно придать размерность (Дж/К), умножив на постоянную Больцмана  $k$ . Энтропия системы и термодинамическая вероятность связаны между собой *формулой Больцмана*:

$$S = k \ln W. \quad (13.20)$$

Таким образом, энтропия равна логарифму числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние. Чем больше число микросостояний, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. В состоянии равновесия — наиболее вероятного состояния системы — число микросостояний максимально, при этом максимальна и энтропия.

Часто воспринимают энтропию как меру беспорядка в системе. Связано это с тем, что упорядоченные системы обычно имеют гораздо меньше микросостояний, чем неупорядоченные. Так 100 молекул в двух половинах сосуда поровну можно разместить, в соответствии с теорией вероятности, огромным количеством способов. А размещению всех их в одной половине соответствует лишь два варианта. Поэтому и стремятся молекулы распределиться по объему примерно поровну, и энтропия при этом максимальна. Рассмотрим, например, распределение молекул идеального газа. В случае идеального газа наиболее вероятным состоянием, соответствующим максимуму энтропии, будет равномерное распределение молекул. При этом реализуется и максимальный «беспорядок», так как воз-

возможности конфигурирования будут максимальные. Реальные необратимые процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии — в этом состоит принцип возрастания энтропии.

Следует подчеркнуть, что вышеприведенные утверждения, в том числе и второе начало термодинамики, носят статистический характер и могут не выполняться для систем из малого числа частиц.

## 14. Реальные газы. Агрегатные состояния и фазовые переходы

### 14.1. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Уравнение Менделеева-Клапейрона достаточно хорошо описывает газ при низких давлениях и высоких температурах, когда он находится в условиях, далеких от условий конденсации. Неплохо оно работает и для газов при нормальных условиях. Однако для реального газа, особенно при повышенных давлениях и низких температурах, модель идеального газа может оказаться неадекватной, и тогда приходится учитывать потенциальную энергию взаимодействия молекул газа между собой и размеры молекул. Уравнение, описывающее реальный газ, сформулировал в 1873 г. Й. Д. Ван-дер-Ваальс (1837–1923). Это уравнение описывает не только газообразное состояние, но и переход к жидкому и твердому состоянию. Суть модели в учете того, что молекулы газа притягиваются на больших, но отталкиваются на малых расстояниях, близких к размеру молекулы.

Силы притяжения внутри газа скомпенсированы для каждой молекулы, поскольку действуют в среднем одинаково во все стороны. А на молекулы, расположенные в тонком слое вблизи границ объема, действует некомпенсированная сила притяжения со стороны других молекул газа, направленная внутрь объема, которая создает дополнительное (*внутреннее*) давление. Если уменьшать объем под действием внешнего давления, внутреннее давление растет быстрее

внешнего. Когда оно сравнивается с внешним давлением, молекулы сцепятся друг с другом и газ превратится в жидкость.

Сила внутреннего давления, действующая на молекулу поверхностного слоя газа должна быть пропорциональна концентрации молекул  $n$  в прилегающем внутреннем слое, а суммарная сила внутреннего давления пропорциональна еще и концентрации молекул  $n$  в поверхностном слое. Таким образом, внутреннее давление пропорционально квадрату концентрации молекул газа

$$p_{\text{внутр}} = a_0 n^2 = \frac{a_0 N^2}{V^2} = \frac{aN^2}{N_A V^2} = \frac{av^2}{V^2}, \quad (14.1)$$

где  $a_0$  и  $a$  — константы, связанные через число Авогадро,  $a = a_0 N_A$ ;  $n$  — концентрация молекул, выраженная через количество молекул  $N$  в объеме  $V$  и число молей  $v$ .

Суммарное давление  $p'$  внутри газа равно:

$$p' = p + p_{\text{внутр}} = p + \frac{v^2 a}{V^2}, \quad (14.2)$$

где  $p$  — давление газа на стенку объема (по третьему закону Ньютона стенка действует на газ тем же давлением);  $p'$  — давление, которое создавал бы идеальный газ при тех же условиях.

Рассмотрим поправку на действие сил отталкивания. Она действует на меньших расстояниях и учитывает только парные взаимодействия между молекулами. Суть ее сводится к учету размеров молекул. Ван-дер-Ваальс предложил в уравнение состояния включить не полный объем сосуда, а только *свободный*, доступный для движения молекул. Каждая молекула уменьшает

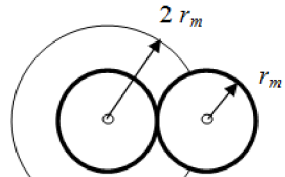


Рис. 14.1

свободный для движения другой молекулы объем сосуда. При этом радиус исключаемой сферы вдвое превышает радиус молекулы  $r_m$  (рис. 14.1). Объем этой исключаемой сферы, очевидно, в 8 раз превышает объем молекулы  $V_m$ . Это означает, что на каждую из двух

рассматриваемых молекул (и на все остальные молекулы) приходится четырехкратный исключаемый объем молекулы  $4V_m$ . Таким образом, на  $N$  находящихся в сосуде молекул необходимо исключить объем  $4 N V_m$ , так что свободный объем  $V'$  можно принять равным

$$V' = V - 4 N V_m = V - 4 \nu N_A V_m = V - \nu b, \quad (14.3)$$

где  $b = 4 N_A V_m$ .

Подставив теперь суммарное давление газа  $p'$  и свободный объем  $V'$  в уравнение Менделеева-Клапейрона, получим *уравнение Ван-дер-Ваальса*:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT, \quad (14.4)$$

где  $a$  и  $b$  – постоянные Ван-дер-Ваальса.

Следует отметить, что теоретические оценки постоянных Ван-дер-Ваальса носят приближенный характер, более точно для каждого газа они определяются экспериментально. В качестве примера можно привести экспериментальные значения постоянных Ван-дер-Ваальса для азота:  $a = 0,14 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2$ ,  $b = 3,9 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3 / \text{моль}$ .

## 14.2. Агрегатные состояния и фазовые переходы. Изотермы Ван-дер-Ваальса

*Агрегатное состояние* — состояние вещества, характеризующееся способностью сохранять объем и форму наличием дальнего и ближнего порядка, и т. д. Выделяют агрегатные состояния: твердое, жидкое, газообразное, плазму и др. *Фазовые переходы* — это термодинамические процессы, приводящие к изменению агрегатного состояния вещества. Изменение агрегатного состояния обычно сопровождается скачкообразным изменением энтропии, плотности и других основных физических свойств вещества.

Уравнение Ван-дер-Ваальса может быть использовано для количественных расчетов, пока добавленные члены являются поправками. Однако его можно применять и для качественных оценок изменений

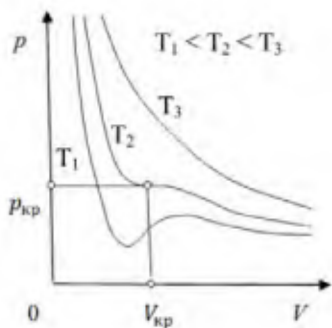


Рис. 14.2

агрегатного состояния вещества, в частности, перехода вещества из газообразного состояния в жидкое. Рассмотрим поведение изотерм Ван-дер-Ваальса — зависимости давления от объема при постоянной температуре, определяемой уравнением Ван-дер-Ваальса для различных температур (рис. 14.2). Уравнение реального газа (14.4) можно представить в виде, удобном для анализа:

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}. \quad (14.5)$$

Из уравнения видно, что при  $V \rightarrow \infty$  доминирует левый член зависимости, и давление, как и для идеального газа, убывает по гиперболическому закону:

$$p = \frac{\nu RT}{V}. \quad (14.6)$$

При  $V \rightarrow 0$  доминирует правый член зависимости (внутреннее давление), и давление растет пропорционально  $V^{-2}$ :

$$p = \frac{\nu^2 a}{V^2}. \quad (14.7)$$

В промежуточной области сводящееся к кубическому относительно объема уравнение (14.4) может иметь 2 или 0 экстремумов. Анализ показывает, что 2 экстремума имеют место при невысокой температуре. При этом на изотермах имеется участок, где давление растет с увеличением объема, что не имеет физического смысла. При повышении температуры этот участок уменьшается и превращается в точку. Эта точка называется *критической*. Значения давления, объема и температуры в этой точке называют *критическими параметрами*. В критической точке кривая имеет точку перегиба, так что обращаются в ноль как первая, так и вторая производные. Из этого условия несложно найти критические параметры:

$$p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}, V_{\text{кр}} = 3\nu b, T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb}. \quad (14.8)$$

Экспериментальные состояния газа (рис. 14.3) отличаются тем, что нефизичный участок, где давление растет с увеличением объема, заменяется на горизонтальный участок, соответствующий сжижению газа, которое при заданной температуре происходит при постоянном давлении. Слева от горизонтального участка весь газ превращается в жидкость. При этом давление на эксперименте с уменьшением объема растет более резко, чем в теории.

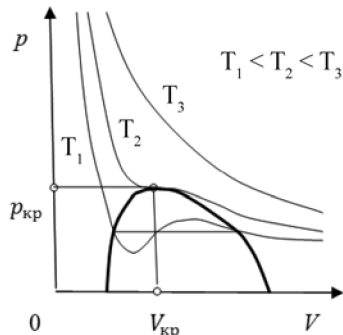


Рис. 14.3

Набор отрезков зависимости давления от объема реального газа, соответствующих двухфазным системам жидкость—газ, образуют колоколообразную фигуру (на рис. 14.3 ограничена сверху жирной линией). Вершиной этой фигуры является критическая точка. При температуре выше критической вещество может существовать только в газообразном состоянии. При температуре ниже критической вещество может быть превращено в жидкость. У гелия, водорода, кислорода и азота критические температуры низкие, и при нормальных условиях они являются газами. У воды и ртути критические температуры высокие, и при нормальных условиях они существуют как в жидком, так и в газообразном состояниях.

### 14.3. Внутренняя энергия реального газа

Внутренняя энергия реального газа, в отличие от идеального, дополнительно включает потенциальную энергию межмолекулярного взаимодействия. При этом соотношение между потенциальной энергией взаимодействия двух соседних молекул  $U_m$  и кинетической энергией теплового движения молекулы, равной по порядку величины  $kT$ , определяет состояние вещества. Если  $U_m \ll kT$ , то взаимодействием можно пренебречь — вещество находится в газообразном состоянии. Если  $U_m \gg kT$ , то вещество твердое. Если  $U_m \approx kT$ , то вещество — в жидком состоянии.

Силы взаимодействия реального газа имеют электрическое или электромагнитное происхождение. Они определяются внутренним давлением (14.1)  $p_{\text{внутр}} = \frac{av^2}{V^2}$ . В свою очередь, дополнительную внутреннюю энергию  $U'$  реального газа можно связать с работой сил внутреннего давления:

$$dU' = dA = p_{\text{внутр}} dV = \frac{av^2}{V^2} dV. \quad (14.9)$$

Интегрирование дает

$$U' = -\frac{av^2}{V}, \quad (14.10)$$

откуда для полной внутренней энергии  $\nu$  молей реального газа с учетом (12.15) имеем

$$U = \nu C_V T + U' = \nu C_V T - \frac{av^2}{V}. \quad (14.11)$$

Из выражения (14.10) следует, что внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса зависит не только от его температуры, как в случае с идеальным газом, но и от объема, занимаемого им. По этой причине при изотермическом процессе в газе Ван-дер-Ваальса изменяется его внутренняя энергия, и следовательно, подведенная к газу теплота не равна совершенной им работе.

## Часть II. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

---

### 15. Закон Кулона и электрическое поле

#### 15.1. Закон Кулона

*Электродинамика* (или *электромагнетизм*) — раздел физики, изучающий электрические и магнитные явления, а также их взаимосвязь. Этот раздел имеет огромное значение в электронике, вычислительной технике, телекоммуникациях и связи. Электродинамика лежит в основе и *волновой оптики*, которая рассматривает свет как электромагнитные волны.

*Электростатика* — раздел электродинамики, изучающий взаимодействие и электрические поля покоящихся электрических зарядов.

*Электрический заряд* — характеристика частиц и тел, определяющая интенсивность их электромагнитного взаимодействия и величину создаваемого ими электрического поля. В 1729 г. Шарль Дюфе обнаружил, что существует два рода зарядов. Один образуется при трении стекла о шелк, а другой — смолы (эбонита) о шерсть. Поэтому Дюфе назвал заряды стеклянным и смоляным. Было установлено, что если на тело подать одновременно и стеклянный, и смоляной заряды, то эти заряды компенсируются — частично или полностью. По аналогии с положительными и отрицательными числами Бенджамин Франклин ввел понятие о положительном и отрицательном заряде, причем волей случая положительным стали называть стеклянный заряд, а отрицательным — смоляной.

Заряды разных знаков притягиваются друг к другу, одного знака — отталкиваются. Единица измерения заряда в СИ — кулон (Кл). Заряд в один кулон очень велик, и чаще на практике заряды измеряют нанокулонами. Существует минимальный электрический заряд (*элементарный заряд*), равный  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Все остальные заряды больше в целое число раз (или равны). Носителями элементарного заряда являются некоторые элементарные частицы, например электрон (один отрицательный элементарный электрический заряд) или протон (один положительный элементарный заряд). Заряд нейтрона равен нулю. Суммарный заряд любого атома, состоящего из этих частиц, равен нулю, поскольку число протонов нейтрального атома равно числу электронов.

*Закон сохранения электрического заряда: электрический заряд изолированной системы сохраняется во времени.* Закон сохранения заряда — один из фундаментальных законов физики. Величина заряда не зависит от скорости, с которой он движется, даже если скорость сравнима со скоростью света и перестает работать механика Ньютона.

В конце XVIII в. Шарль Кулон опытным путем установил количественный закон взаимодействия электрических зарядов. При этом рассматривались *точечные заряды* — заряженные тела, размерами которых можно пренебречь (по сравнению с расстояниями между телами). *Закон Кулона: сила взаимодействия двух точечных зарядов обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами, пропорциональна величине обоих зарядов и направлена вдоль линии, соединяющей оба заряда.* Таким образом, в скалярном виде закон Кулона выражается формулой

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (15.1)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — величины взаимодействующих зарядов, Кл;

$r$  — расстояние между зарядами;

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2.$$

При этом отрицательный знак силы в формуле означает притяжение зарядов, положительный — отталкивание. Часто константу  $k$  выражают через электрическую постоянную  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2)$ :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Тогда закон Кулона имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (15.2)$$

## 15.2. Электрическое поле и электрическое смещение

Заряды взаимодействуют друг с другом на расстоянии. Это отличается от того, к чему мы привыкли в механике, когда тела обычно взаимодействуют при непосредственном механическом контакте. Поэтому для описания взаимодействия зарядов на расстоянии вводят понятие электрического поля. *Электрическое поле* — это вид материи, посредством которой происходит силовое воздействие на электрические заряды. Источником электрического поля может являться электрический заряд. Покоящийся заряд создает в пространстве вокруг себя только электрическое поле, а движущийся — еще и магнитное.

Заряд же является и индикатором поля. Наличие электрического поля в данной точке пространства определяют по силе, действующей на неподвижный положительный точечный заряд, помещенный в это поле (пробный заряд). Силовой характеристикой электрического поля является *напряженность электрического поля*. Ее определяют следующим образом. Если на неподвижный точечный заряд  $q_{пр}$  действует сила  $\vec{F}$ , то в точке нахождения этого заряда существует электрическое поле напряженностью

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}. \quad (15.3)$$

Из формулы видно, что если пробный заряд отрицателен, то направление вектора напряженности противоположно направлению си-

лы. Видно также, что единицей напряженности в системе СИ является ньютон на кулон (Н/Кл). Ниже будет показано, что единицей напряженности может быть принят и вольт на метр (В/м):  $1 \text{ Н/Кл} = 1 \text{ В/м}$ .

Если известна зависимость напряженности электрического поля от координат  $\vec{E}(\vec{r})$ , то легко найти силу, действующую на точечный заряд  $q_{\text{пр}}$ , помещенный в любую точку:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q_{\text{пр}}\vec{E}(\vec{r}). \quad (15.4)$$

Найдем *напряженность поля точечного заряда*. Поместим в точку  $\vec{r}$  пробный заряд  $q_{\text{пр}}$  и определим по закону Кулона действующую на него со стороны заряда силу:  $F = k \frac{q q_{\text{пр}}}{r^2}$ . Из определения напряженности (15.3):

$$E = \frac{F}{q_{\text{пр}}} = k \frac{q}{r^2}. \quad (15.5)$$

Таким образом, напряженность поля, созданного точечным зарядом  $q$ , прямо пропорциональна величине этого заряда (создающего поле, заряда — источника поля) и обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда — источника поля до точки, где ищется поле. Естественно, что напряженность не зависит от величины пробного заряда, который является лишь индикатором поля. Если поместить начало координат в точку расположения заряда  $q$ , то уравнение (15.5) можно переписать в векторной форме:

$$\vec{E} = k \frac{q\vec{r}}{r^3}. \quad (15.6)$$

И действительно, в этом случае поле направлено по радиус-вектору для положительного заряда, и в противоположную радиус-вектору сторону — для отрицательного заряда

Поле в каждой точке характеризуется силой и направлением. Поэтому его удобно графически описывать с помощью *линий напряженности (силовых линий)*. Их строят по следующим трем правилам:

1. Линии напряженности начинаются на положительных зарядах, заканчиваются на отрицательных или уходят в бесконечность.

2. Вектор напряженности направлен по касательной к линии напряженности в каждой точке.

3. Густота этих линий выбирается такой, чтобы количество линий, пронизывающих единичную нормальную площадку, было равно (или пропорционально) модулю напряженности электрического поля.

В соответствии с этими правилами силовые линии положительного точечного заряда представлены на рис. 15.1, а. Силовые линии отрицательного заряда выглядят так же, но направлены в противоположную сторону. Поле вблизи двух разноименных зарядов представлено графически на рис. 15.1, б, вблизи двух одноименных положительных зарядов — на рис. 15.1, в. Поле двух одноименных отрицательных зарядов выглядит так же, как поле двух одноименных положительных зарядов, но силовые линии направлены в противоположную сторону.

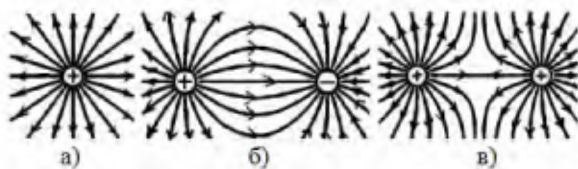


Рис. 15.1

Заметим, что если расстояние между силовыми линиями на рисунках увеличивается вдвое, то напряженность, обратно пропорциональная приходящейся на силовую линию площади (квадрату расстояния), уменьшается вчетверо.

Напряженность поля может сложным образом зависеть от координат. Рассмотрим простейший случай. Однородное поле — это электрическое поле, в котором напряженность равна по модулю и направлению в любой точке рассматриваемой области пространства. Как будет показано ниже, приблизительно однородное поле — это поле между двумя разноименно заряженными плоскими пластинами. В любом случае возможно выделение достаточно малой области

пространства, где поле можно считать однородным. В однородном электрическом поле линии напряженности направлены параллельно друг другу и имеют постоянную густоту.

До сих пор мы обсуждали вид электрического поля зарядов, находящихся в вакууме. Опыт показывает, что если поместить заряд в диэлектрик (вещество, практически не проводящее электрический ток), то поле и силы взаимодействия зарядов могут измениться. Например, молекулы воды обладают собственным электрическим полем. При помещении их во внешнее поле они поворачиваются так, что за счет собственного поля ослабляют суммарное поле в 81 раз.

Для описания электрических полей в диэлектриках удобно ввести понятие *электрического смещения*. Электрическое смещение иногда называют еще *электрической индукцией*. Вектор электрического смещения  $\vec{D}$  в простейшем случае связан с вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}$  соотношением:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \quad (15.7)$$

Измеряется электрическое смещение в Кл/м<sup>2</sup>. В определении электрического смещения роль диэлектрика учитывается диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . В вакууме же электрическое смещение с точностью до константы  $\epsilon_0$  совпадает с напряженностью. Диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике по сравнению с вакуумом. Как уже отмечалось, для воды при комнатной температуре и постоянном поле она равна 81. Для воздуха вследствие малой плотности молекул газа диэлектрическая проницаемость близка к единице. Для керосина  $\epsilon$  равна 2, растительного масла — 2–4, стекла — 6–10, крахмала — 12, крови — 85. С учетом такого экранирования поля закон Кулона в диэлектрике приобретает вид:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (15.8)$$

Диэлектрическая проницаемость среды в паре с электрической постоянной  $\epsilon\epsilon_0$  входят не только в закон Кулона, но и во многие другие уравнения электродинамики.

### 15.3. Принцип суперпозиции электрических полей

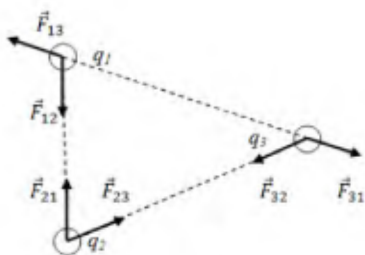


Рис. 15.2

Опыт и здравый смысл подсказывают, что сила взаимодействия двух зарядов не изменится, если в систему добавить другие заряды (рис. 15.2). При этом силы  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  не зависят от заряда  $q_3$ , силы  $\vec{F}_{13}$  и  $\vec{F}_{31}$  — от заряда  $q_2$  (который выбран в данном примере отрицательным), силы  $\vec{F}_{23}$  и  $\vec{F}_{32}$  — от заряда  $q_1$ . Таким образом, результирующую силу, действующую на любой заряд, можно найти как векторную сумму сил парного взаимодействия зарядов:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}; \\ \vec{F}_2 &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}; \\ \vec{F}_3 &= \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

Аналогичным образом складываются и пропорциональные силам электрические поля, так что результирующее поле равно векторной сумме полей отдельных зарядов:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_{12} + \vec{E}_{13}; \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{21} + \vec{E}_{23}; \\ \vec{E}_3 &= \vec{E}_{31} + \vec{E}_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

Или в общем случае имеем принцип суперпозиции электрических полей: напряженность электрического поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создает каждый из этих зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i. \quad (15.11)$$

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать поле сложной системы из большого количества точечных зарядов, а также тела с произвольным объемным распределением заряда. Так, тело с произвольным объемным распределением заряда можно разбить на малые части и, используя выражение для поля точечного заряда и принцип суперпозиции электрических полей, рассчитать суммарное поле.

## 15.4. Электрический диполь. Поле диполя

*Электрический диполь* — это система из двух равных по модулю и противоположных по знаку электрических точечных зарядов  $q$  и  $-q$ , расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга (рис. 15.3). Это понятие широко используется в физике. Выше уже рассмотрено экранирование внешнего электрического поля молекулами среды, которые можно рассматривать как набор диполей. Кроме того, диполь создает и собственное поле, существенное во многих случаях. При этом очень часто размер диполя пренебрежимо мал по сравнению с размером рассматриваемой системы. Дадим количественное описание свойств диполя. Если

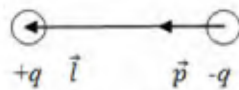


Рис. 15.3

из точки положения отрицательного заряда в точку положения положительного заряда провести вектор  $\vec{l}$ , то можно дать следующее определение. *Электрический (дипольный) момент* ( $\vec{p}$ ) диполя определяют по формуле

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (15.12)$$

Если поместить электрический диполь в электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$  (рис. 15.4), то на заряды диполя соответственно действуют силы.

$$\vec{F}_+ = q\vec{E}; \quad (15.13)$$

$$\vec{F}_- = -q\vec{E}. \quad (15.14)$$

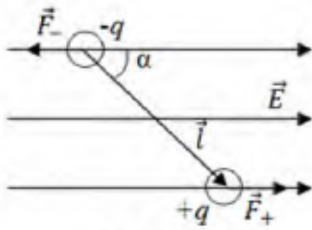


Рис. 15.4

Эти силы противоположно направлены и создают суммарный момент силы

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha. \quad (15.15)$$

Уравнение можно переписать в векторном виде с использованием векторного произведения:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (15.16)$$

Отсюда следует вывод, что на электрический диполь в электрическом поле действует момент силы, определяемый электрическим моментом, напряженностью поля и ориентацией диполя. Существенно, что этот момент силы разворачивает диполь так, чтобы поле диполя частично компенсировало внешнее поле (и обеспечивало диэлектрическую проницаемость  $\epsilon > 1$ ).

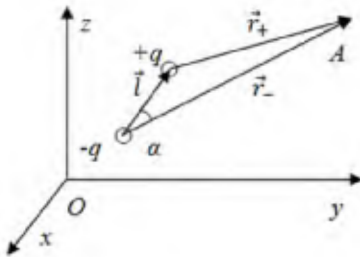


Рис. 15.5

Как уже отмечалось, во многих случаях важную роль играет и собственное поле диполя. Рассчитаем электрическое поле электрического диполя с использованием принципа суперпозиции. Особенно результат интересен на расстояниях, значительно превышающих размер диполя. Предположим, что необходимо вычислить напряженность электрического поля в точке A (рис. 15.5).

Напряженность поля, создаваемого зарядами диполя, в соответствии с принципом суперпозиции равна:

$$\vec{E} = kq \left( \frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right) = kq \left( \frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_+ + \vec{l}}{[(\vec{r}_+ + \vec{l})^2]^{3/2}} \right). \quad (15.17)$$

В приближении, что точка A достаточно удалена от диполя и

$$\frac{l}{r_+} \ll 1, \quad (15.18)$$

можно принять  $r_+ \approx r$ , где  $r$  — расстояние от диполя до точки  $A$ . При этом из рисунка следует  $\vec{r}_- = \vec{r} + \vec{l}$ . Кроме того, трижды воспользуемся формулами приближенного вычисления степени суммы с учетом малости (15.18):

$$\begin{aligned} \vec{E} &\approx kq \left( \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r} + \vec{l}}{r^3 \left(1 + \frac{2\vec{r}\vec{l}}{r^2}\right)^{3/2}} \right) \approx kq \left( \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r} + \vec{l}}{r^3 \left(1 + \frac{3\vec{r}\vec{l}}{r^2}\right)} \right) \approx \\ &\approx \frac{kq}{r^3} [\vec{r} - (\vec{r} + \vec{l}) \left(1 - \frac{3\vec{r}\vec{l}}{r^2}\right)]. \end{aligned} \quad (15.19)$$

Наконец, воспользовавшись той же малостью при перемножении скобок, получим окончательно две составляющие напряженности вдоль  $\vec{r}$  и вдоль дипольного момента  $\vec{p}$ :

$$\vec{E} \approx \frac{kq}{r^3} [\vec{r} - (\vec{r} + \vec{l}) \left(1 - \frac{3\vec{r}\vec{l}}{r^2}\right)] \approx \frac{k(3\vec{e}_r p \cos\alpha - \vec{p})}{r^3}, \quad (15.20)$$

где  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  — единичный вектор вдоль  $\vec{r}$ ;

$\alpha$  — угол между дипольным моментом  $\vec{p}$  и  $\vec{r}$ .

Таким образом, поле диполя пропорционально дипольному моменту и обратно пропорционально кубу расстояния от диполя до точки наблюдения. Существенно, что поле диполя убывает с расстоянием быстрее, чем поле точечного заряда, убывающее пропорционально квадрату расстояния. Иными словами, электрическое поле диполя является короткодействующим, по сравнению с полем точечного заряда. Так, при двукратном удалении поле диполя уменьшится в 8 раз, тогда как поле точечного заряда только в 4 раза.

# 16. Теорема Гаусса для электрического поля

## 16.1. Поток вектора напряженности электрического поля и электрического смещения

Как уже отмечалось, силовые линии могут начинаться или заканчиваться в какой-то точке, только если в этой имеется электрический заряд. Это позволяет установить связь между пространственным распределением зарядов и напряженностью создаваемого поля.

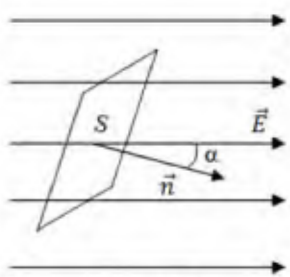


Рис. 16.1

Выделим в области однородного поля  $\vec{E}$  некоторую площадку площадью  $S$  с единичным вектором нормали  $\vec{n}$  к площадке (рис. 16.1). Полезно ввести новое понятие. *Поток вектора напряженности электрического поля* через площадку определим по формуле

$$N_E = E S \cos \alpha = E_n S = \vec{E} \vec{S}, \quad (16.1)$$

где в скалярном произведении направление вектора  $\vec{S}$  определяется нормалью  $\vec{n}$ ;

$E_n$  — проекция вектора напряженности электрического поля на направление нормали  $\vec{n}$ . Угол  $\alpha$  между направлением поля и направлением нормали варьируется в пределах от  $0$  (поле направлено вдоль нормали) до  $\pi$  (поле направлено в противоположную нормали сторону). При этом, если угол острый, поток положителен, если тупой — отрицателен.

Поток вектора напряженности электрического поля фактически равен (или пропорционален) числу силовых линий, проходящих через выбранную площадку.

Несложно обобщить определение на неоднородное поле и произвольную поверхность. В этом случае первоначально определяется поток через бесконечно малую площадку  $d\vec{S}$ :

$$dN_E = E dS \cos\alpha = E_n dS = \vec{E} d\vec{S}, \quad (16.2)$$

а затем полный поток вектора напряженности электрического поля находится через интеграл по поверхности:

$$N_E = \int E_n dS. \quad (16.3)$$

Аналогичным образом можно определить поток вектора электрического смещения:

$$N_D = \int D_n dS. \quad (16.4)$$

Отметим, что в случае замкнутой поверхности нормаль к поверхности принято проводить наружу. При этом поток вектора наружу получается положительным, а поток вектора внутрь — отрицательным.

Поток вектора напряженности электрического поля измеряется в  $\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}$  или  $\text{В}\cdot\text{м}$ , поток вектора электрического смещения — в Кл.

## 16.2. Теорема Гаусса в интегральной форме

Найдем сначала поток вектора напряженности электрического поля через сферу для поля точечного заряда (рис. 16.2). На поверхности сферы из соображений симметрии поле постоянно по модулю и направлено перпендикулярно поверхности. Из (15.5) для поля точечного заряда

$$E_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (16.5)$$

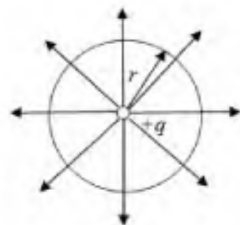


Рис. 16.2

Отсюда поток вектора напряженности электрического поля

$$N_E = \int E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (16.6)$$

Если заряд подвинуть внутри сферы или деформировать сферу в эллипс, то величина потока вектора напряженности электрического поля, определяемая количеством проходящих через поверхность силовых линий, остается неизменной.

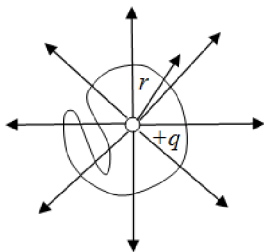


Рис. 16.3

Несколько сложней ситуация, когда рельеф замкнутой поверхности более сложный, и силовая линия может протыкать ее несколько раз. Тем не менее поток и в этом случае неизменен благодаря нечетному числу проходов силовой линии через поверхность. При этом прохождение внутрь поверхности компенсируется прохождением наружу. Так, на рис. 16.3 некоторые силовые линии проходят через поверхность трижды — дважды наружу (положительный поток) и один раз внутрь (отрицательный поток). В результате суммарный поток соответствует одному прохождению силовой линии и определяется формулой (16.6).

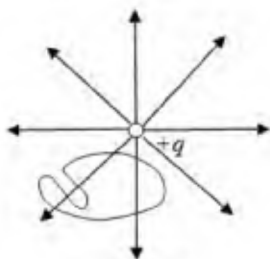


Рис. 16.4

Если заряд находится вне замкнутой поверхности, то поток благодаря четному числу проходов силовой линии через поверхность равен нулю (рис. 16.4). В результате поток определяется только зарядом *внутри* замкнутой поверхности.

Если внутри замкнутой поверхности находятся  $N$  зарядов, то суммарное поле и поток определяются принципом суперпозиции:

$$E_E = \sum_{i=1}^N N_{Ei} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (16.7)$$

Дадим теперь в соответствии с (16.2) и (16.7) окончательную формулировку *теоремы Гаусса для электрического поля в вакууме*: поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ :

$$\oint E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (16.8)$$

Теорема Гаусса позволяет рассчитать электрические поля заряженных тел различной конфигурации. Искусство применения теоремы Гаусса состоит в том, чтобы для данного заряженного тела подобрать удобную замкнутую *гауссову поверхность*, для которой из соображений симметрии просто вычислить интеграл (16.8). Рассмотрим несколько важнейших примеров.

### 16.3. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости и двух плоскостей

Рассмотрим сначала поле, создаваемое бесконечной равномерно заряженной плоскостью с постоянной поверхностной плотностью заряда

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \quad (16.9)$$

Поверхностная плотность заряда измеряется в Кл/м<sup>2</sup>. В качестве гауссовой поверхности выделим цилиндр с осью, перпендикулярной плоскости, и основаниями площадью  $S$ , расположенными относительно плоскости симметрично (рис. 16.5). Круг с пунктирными границами представляет часть заряженной плоскости, попавшую внутрь цилиндра. В силу симметрии напряженность поля на основаниях перпендикулярна плоскости, равна по модулю ( $E_1 = E_2 = E$ ) и противоположна по направлению. Нормальная составляющая напряженности на боковой поверхности цилиндра равна нулю (как и соответствующий поток) — из тех же соображений симметрии. Поэтому поток вектора напряженности через выделенную замкнутую поверхность определяется потоком через основания и равен  $2ES$ . В свою очередь, заряд внутри цилиндра равен  $\sigma S$ . По теореме Гаусса имеем

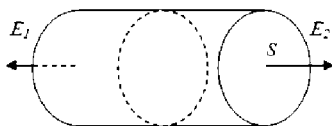


Рис. 16.5

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}, \quad (16.10)$$

откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (16.11)$$

Таким образом, поле бесконечной равномерно заряженной плоскости по модулю не зависит от координат, перпендикулярно плоскости и имеет противоположные направления в полупространствах, разделенных плоскостью.

Рассчитаем теперь поле двух разноименно заряженных плоскостей (поле плоского конденсатора). Предположим, что поверхностная плотность заряда плоскостей одинакова по модулю (рис. 16.6). Тогда создаваемое плоскостями поле равно соответственно  $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ,  $E_2 = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}$ . В соответствии с принципом суперпозиции эти поля векторно складываются. При этом поля зарядов вне конденсатора противоположны по направлению и при сложении компенсируются. В пространстве между пластинами поля направлены в одну сторону, так что результирующее поле

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (16.12)$$

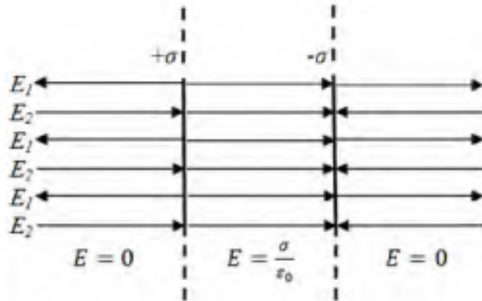


Рис. 16.6

Для реального плоского конденсатора с ограниченной шириной заряженных пластин поле тоже можно считать по приведенным формулам, если расстояние между пластинами  $d$  много меньше длины  $a$  и ширины  $b$  пластин:

$$d \ll a, d \ll b.$$

При этом на краях пластин на расстояниях порядка расстояния между пластинами имеют место краевые эффекты — спад напряженности от максимального значения практически до нуля.

## 16.4. Поле равномерно заряженной бесконечной нити

Рассчитаем поле, создаваемое бесконечной нитью с постоянной линейной плотностью заряда

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad (16.13)$$

на расстоянии  $R$  от нити. Линейная плотность заряда измеряется в Кл/м. Выберем в качестве гауссовой поверхности цилиндр радиуса  $R$  и высотой  $h$  с осью, совпадающей с нитью (рис. 16.7).

В силу симметрии напряженность поля на боковой поверхности цилиндра постоянна по модулю и перпендикулярна боковой поверхности. Нормальная составляющая напряженности на основаниях цилиндра равна нулю (как и соответствующий поток) — тоже из соображений симметрии.

Поэтому поток вектора напряженности через выделенную замкнутую поверхность определяется потоком через боковую поверхность цилиндра и равен произведению напряженности на площадь боковой поверхности цилиндра  $E2\pi Rh$ . В свою очередь, заряд внутри цилиндра равен  $\lambda h$ . По теореме Гаусса

$$E2\pi Rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}, \quad (16.14)$$

откуда поле равномерно заряженной бесконечной нити

$$E = \frac{\lambda}{2\pi R\varepsilon_0}. \quad (16.15)$$

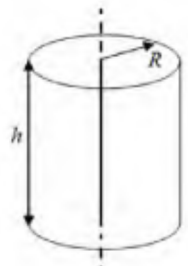


Рис. 16.7

Похожим образом рассчитывается поле равномерно заряженной цилиндрической поверхности. При этом несложно показать, что поле снаружи от такой поверхности совпадает с полем нити, а поле внутри такой поверхности равно нулю.

## 16.5. Поле равномерно заряженной сферы

Найдем теперь поле равномерно (по поверхности) заряженной сферы радиуса  $r$  и заряда  $q$  (рис. 16.8). Выберем в качестве гауссовой поверхности сферу радиуса  $R$ . Из соображений симметрии напряженность на поверхности любой сферы является константой и может быть направлена только по направлению радиуса.

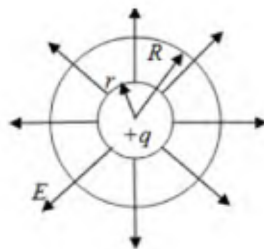


Рис. 16.8

Снаружи заряженной сферы (при  $R > r$ ) теорема Гаусса дает

$$E4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (16.16)$$

откуда выражение для поля совпадает с выражением для поля точечного заряда:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}. \quad (16.17)$$

Внутри заряженной сферы (при  $R < r$ ) внутри гауссовой поверхности отсутствует заряд, что в соответствии с теоремой Гаусса означает отсутствие поля:

$$E = 0. \quad (16.18)$$

## 16.6. Поле равномерно заряженного шара

Решим теперь несколько более сложную задачу и найдем поле равномерно (по объему) заряженного шара радиуса  $r$  и заряда  $q$ .

Выберем по-прежнему в качестве гауссовой поверхности сферу радиуса  $R$ . По-прежнему из соображений симметрии напряженность на поверхности любой сферы является константой и может быть направлена только по направлению радиуса. Как и для заряженной сферы, снаружи заряженного шара при  $R > r$  (рис. 16.9) теорема Гаусса дает  $E4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ , откуда выражение для поля по-прежнему совпадает с выражением для поля точечного заряда:

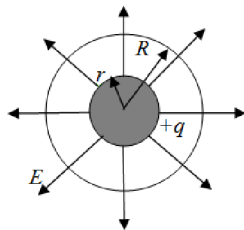


Рис. 16.9

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}. \quad (16.19)$$

Однако внутри заряженного шара при  $R < r$  внутри гауссовой поверхности имеется заряд  $q_1$ , который можно рассчитать через объемную плотность заряда, равную частному от деления заряда на объем заряженного шара:  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3}$ . Заряд  $q_1$  пропорционален (рис. 16.10)

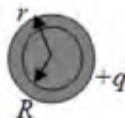


Рис. 16.10

объему гауссовой поверхности  $\frac{4}{3}\pi R^3$ :

$$q_1 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{qR^3}{r^3}. \quad (16.20)$$

Воспользуемся теперь по аналогии с (16.16) теоремой Гаусса:

$$E4\pi R^2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0}, \quad (16.21)$$

откуда с учетом (16.20):

$$E = \frac{qR}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \quad (16.22)$$

Таким образом, по мере удаления от центра симметрии напряженность поля равномерно заряженного шара сначала (при  $R < r$ ) линейно растет пропорционально  $R$ , а затем (при  $R > r$ ) квадратично падает пропорционально  $R^{-2}$ .

Следует отметить, что расчет полей заряженных тел различной геометрии может быть выполнен и с помощью закона Кулона, но такой расчет является более громоздким.

## 16.7. Теорема Гаусса в дифференциальной форме

Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$  может быть сформулирована не только в интегральной форме, но и в дифференциальной (локальной) форме, отражающей локальные свойства электростатического поля. В соответствии с математической теоремой Остроградского-Гаусса поверхностный интеграл можно свести к объемному:

$$\oint E_n dS = \int \operatorname{div} \vec{E} dV, \quad (16.23)$$

где объемный интеграл берется по объему  $V$  внутри замкнутой поверхности, дивергенция вычисляется по формуле

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (16.24)$$

С учетом того, что заряд можно также определить через объемный интеграл по объему  $V$ , теорема Гаусса сводится к уравнению  $\int \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV$ , или

$$\int (\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}) dV = 0. \quad (16.25)$$

Поскольку объем интегрирования выбран произвольно, то подинтегральное выражение должно тождественно обращаться в ноль. Таким образом, получаем *теорему Гаусса для электрического поля в дифференциальной форме*:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (16.26)$$

Полученная формула иллюстрирует математический смысл дивергенции как отношения потока вектора через поверхность к бесконечно малому объему.

# 17. Потенциал электростатического поля

## 17.1. Работа сил электростатического поля. Консервативность электростатических сил

Поскольку на заряд в электростатическом (постоянном электрическом) поле действует сила, то при движении этого заряда в поле совершается работа. В однородном поле  $\vec{E}$  (рис. 17.1) на точечный заряд  $q$  действует постоянная сила (15.4)  $\vec{F} = q\vec{E}$ , так что работа при перемещении по прямой траектории на расстояние  $\vec{l}$  равна:



Рис. 17.1

$$A = \vec{F}\vec{l} = q\vec{E}\vec{l}. \quad (17.1)$$

В соответствии с формулой работа пропорциональна величинам заряда, напряженности, перемещения и косинуса угла между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{l}$ . В общем случае, когда напряженность зависит от координат, а траектория криволинейна, сначала находят работу на бесконечно малом перемещении  $d\vec{l}$

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l}, \quad (17.2)$$

а затем берут интеграл по участку траектории

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 q\vec{E} d\vec{l} = q \int_1^2 E_l dl, \quad (17.3)$$

где  $E_l = E \cos \alpha$  — проекция напряженности на направление движения заряда.

Сравним работу по перемещению заряда  $q$  в однородном поле из точки  $A$  в точку  $B$  по прямой и по ломаной линии через точку  $C$  (рис. 17.2):

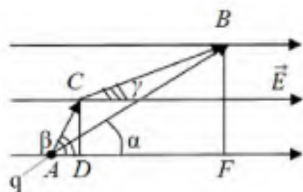


Рис. 17.2

$$\left. \begin{aligned} A_{AB} &= qE AB \cos\alpha = qE AF, \\ A_{ACB} &= qE (AC \cos\beta + CB \cos\gamma) = qE (AD + DF) = qE AF = A_{AB} \end{aligned} \right\} (17.4)$$

Таким образом, работа по перемещению заряда по разным траекториям оказалась одинаковой — все зависит лишь от начальной и конечной точек. И для любой траектории путем разбиения ее на короткие прямолинейные отрезки несложно показать, что работа по перемещению заряда зависит лишь от начального и конечного расположения заряда. Таким образом, работа сил электрического поля не зависит от траектории перемещения заряда из одной точки в другую. Такие поля называют *потенциальными*, а создающие их силы — *консервативными*.

## 17.2. Теорема о циркуляции вектора напряженности поля

Найдем сначала работу по перемещению заряда по замкнутому контуру в потенциальном поле на примере контура  $ABCA$  (см. рис. 17.2):

$$A_{ABCA} = A_{AB} - A_{ACB} = qE AF - qE AF = 0. \quad (17.5)$$

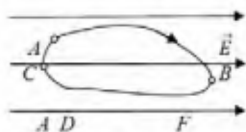


Рис. 17.3

Это справедливо и для произвольного замкнутого контура и может быть показано опять же путем разбиения траектории на короткие (бесконечно малые) прямолинейные отрезки (рис. 17.3). При этом суммарная длина проекций отрезков перемещения по полю компенсируется суммарной длиной проекций отрезков перемещения против поля.

Так, на рис. 17.3 на участках  $AB$  и  $CA$  работа положительна, а на участке  $BC$  — отрицательна. При этом положительная и отрицательная работа определяются проекциями соответствующих участков на направление электрического поля и равны по модулю. Таким образом, работа по перемещению заряда по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю:

$$A = \oint dA = 0. \quad (17.6)$$

Поскольку в соответствии с (17.3)  $A = q \int_1^2 E_l dl$ , то для замкнутого пути имеем

$$A = q \oint E_l dl = 0$$

и

$$\oint E_l dl = 0. \quad (17.7)$$

Этот интеграл называют циркуляцией вектора напряженности. Таким образом, формула (17.7) выражает теорему о циркуляции вектора напряженности: циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Отсюда следует, что силовые линии не могут быть замкнутыми, они начинаются или кончаются на зарядах, или уходят в бесконечность. В противном случае, например, при циклическом перемещении вдоль замкнутой силовой линии положительного заряда совершалась бы положительная работа.

### 17.3. Определение потенциала электростатического поля

В потенциальном поле каждое положение заряда характеризуется возможностью совершения работы, иными словами потенциальной энергией. Найдем в качестве примера потенциальную энергию пробного заряда  $q$  в поле заряда  $Q$ . Работу будем считать положительной, если она совершается силами поля, и отрицательной, если она совершается против сил поля. При увеличении расстояния между зарядами на  $dr$  в соответствии с законом Кулона работа  $dA$  совершается за счет убыли потенциальной энергии  $dW$  системы:

$$dA = Fdr = \frac{Qqdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -dW. \quad (17.8)$$

Отсюда интегрирование дает выражение для потенциальной энергии:

$$W = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} + C. \quad (17.9)$$

Потенциальная энергия, как и в механике, определяется с точностью до константы и зависит от точки отсчета. Во многих случаях удобно считать, что нулевой энергией обладает заряд, удаленный в бесконечность. При таком выборе  $C = 0$  и

$$W = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (17.10)$$

Для одноименных зарядов потенциальная энергия положительна, для разноименных — отрицательна. Из формулы видно, что отношение  $W/q$  не зависит от величины пробного заряда. Поэтому по аналогии с определением силовой характеристики поля (напряженности) *определим энергетическую характеристику электрического поля — потенциал  $\varphi$* :

$$\varphi = W/q. \quad (17.11)$$

Для точечного заряда из двух вышеприведенных формул

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (17.12)$$

Заметим, что в физике отсчет потенциала (как и потенциальной энергии) обычно ведут относительно бесконечности; в электротехнике — относительно Земли, так что потенциал Земли принимают равным нулю; в радиотехнике — относительно металлического корпуса аппарата.

Часто удобнее определять не потенциал, а разность потенциалов, которая равна работе, совершаемой полем по перемещению единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2:

$$A/q = \varphi_1 - \varphi_2 = U_{12}. \quad (17.13)$$

Единица измерения потенциала и разности потенциалов 1 Вольт (В).  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/1 Кл}$ . Потенциал — это скалярная величина. Зная разность потенциалов, можно найти работу по перемещению заряда из

точки 1 в точку 2:  $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ . В физике во многих задачах приходится рассматривать движение электрона в электрическом поле. В связи с этим часто применяется внесистемная единица измерения энергии *электронвольт* (эВ), который равен энергии, необходимой для переноса электрона в электростатическом поле с разностью потенциалов 1 В. Так как заряд электрона составляет  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, то  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Если поле создается не одним зарядом  $Q$ , а несколькими  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ , то потенциальная энергия пробного заряда по аналогии с (17.10) находится как сумма энергий взаимодействия пробного заряда с каждым из них:

$$W = \sum_i \frac{Q_i q}{4\pi\epsilon_0 r_i}, \quad (17.14)$$

где  $r_i$  — расстояние от пробного заряда до  $i$ -го.

Аналогично потенциал, созданный системой зарядов, определяется формулой

$$\varphi = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}. \quad (17.15)$$

## 17.4. Связь между потенциалом и напряженностью

Разность потенциалов через формулы для работы (17.12) и (17.3) несложно связать с напряженностью поля:

$$U_{12} = \frac{A}{q} = \int_1^2 E_l dl. \quad (17.16)$$

Отсюда можно, например, получить формулу для однородного поля:

$$U_{12} = E l \cos\alpha, \quad (17.17)$$

где  $\alpha$  — угол между направлением напряженности и перемещением  $l$ . Формулу для дифференциальной связи  $U$  и  $E$  получим, сближая в (17.16) в пределе точки 1 и 2:

$$d\varphi = -E_l dl. \quad (17.18)$$

Здесь учтено, что  $U_{12}$  и  $d\varphi$  имеют противоположный знак.

Несколько сложнее решить обратную задачу и выразить напряженность через потенциал. Из (17.18) следует

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (17.19)$$

Выбирая направление  $l$  последовательно вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , получим:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, E_y = -\frac{d\varphi}{dy}, E_z = -\frac{d\varphi}{dz}. \quad (17.20)$$

Таким образом, проекции напряженности определяются производными от потенциала по соответствующей координате или в обобщенной сокращенной символической записи — вектором градиента:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (17.21)$$

В соответствии с математическим свойством градиента, потенциал быстрее всего убывает в направлении  $\vec{E}$ . В направлении, перпендикулярном  $\vec{E}$  (и силовой линии),  $E_l = 0$ , откуда  $\frac{d\varphi}{dl} = 0$  и  $\varphi = \text{const}$ . Такое направление определяет направление *эквипотенциальной поверхности* — *поверхности, все точки которой имеют одинаковый потенциал* ( $\varphi = \text{const}$ ). Разность потенциалов между любыми точками такой поверхности равна нулю, следовательно, равна нулю и работа электрических сил при перемещении заряда. И действительно, если перемещать заряд перпендикулярно силе, работа не совершается. Эквипотенциали изображают на схемах электрических полей наряду с силовыми линиями. На рис. 17.4 изображено поле точечного заряда, на рис. 17.5 — поле конденсатора. Эти поля характеризуются силовыми линиями и перпендикулярными к ним эквипотенциалами. Чем плотнее расположены эквипотенциальные поверхности, тем больше напряженность поля в данной области пространства. Пример — поле точечного заряда.

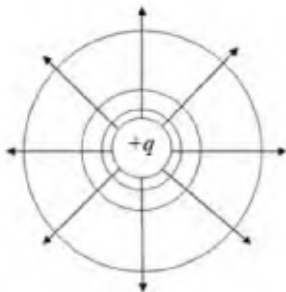


Рис. 17.4



Рис. 17.5

## 17.5. Вычисление разности потенциалов для некоторых видов полей

Рассмотрим ряд примеров расчета разности потенциалов в вакууме в поле различной геометрии.

Для поля равномерно заряженной бесконечной плоскости из (16.11) имеем  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ . Тогда согласно (17.16) *разность потенциалов в поле равномерно заряженной бесконечной плоскости* между точками, лежащими на расстоянии  $x_1$  и  $x_2$  от плоскости, равна:

$$U_{12} = \int_{x_1}^{x_2} E_l dl = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dl = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1). \quad (17.22)$$

Рассчитаем теперь *разность потенциалов в поле между двумя разноименно заряженными плоскостями* с одинаковой по модулю поверхностной плотностью заряда. В пространстве между пластинами напряженность поля из (16.12) равна  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ . Отсюда

$$U_{12} = \int_0^d E_l dl = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dl = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}, \quad (17.23)$$

где  $d$  — расстояние между пластинами.

Далее найдем *разность потенциалов* между точками, лежащими на расстоянии  $R_1$  и  $R_2$  от центра сферы, *в поле равномерно заря-*

женной сферы радиуса  $r$  и заряда  $q$ . Снаружи заряженной сферы (при  $R > r$ ) из (16.17)  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ . Отсюда

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E_l dl = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (17.24)$$

Если измерять потенциал относительно бесконечности, приняв  $R_2 = \infty$  и  $R_1 = R$ , то получим формулу для потенциала заряженной сферы (при  $R > r$ ):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (17.25)$$

Внутри заряженной сферы (при  $R < r$ ) поле отсутствует, и работа при перемещении пробного заряда не совершается, что означает постоянство потенциала и равенство его потенциалу на поверхности сферы:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (17.26)$$

Наконец, рассчитаем *разность потенциалов* между точками, лежащими на расстоянии  $R_1$  и  $R_2$  от оси цилиндра, в поле *равномерно заряженного бесконечного цилиндра* радиуса  $r$  с линейной плотностью заряда  $\lambda$ . Напряженность поля вне цилиндра рассчитывается по аналогии с полем, создаваемым бесконечной нитью с постоянной линейной плотностью заряда (16.15)  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$ . Отсюда разность потенциалов в поле цилиндра при  $R > r$  равна:

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E_l dl = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} dR = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (17.27)$$

Напряженность поля внутри заряженного цилиндра равна нулю (по аналогии с полем, создаваемым заряженной сферой). Это означает постоянство потенциала внутри цилиндра и равенство его потенциалу на поверхности цилиндра.

# 18. Проводники в электростатическом поле. Конденсаторы и энергия электростатического поля

## 18.1. Проводники в электростатическом поле. Поле внутри и вне заряженного проводника

Проводники обладают высокой проводимостью вследствие высокой концентрации свободных зарядов. Так, в металлах концентрация свободных электронов составляет порядка  $10^{28} \text{ м}^{-3}$ . Если поместить проводник во внешнее электрическое поле, то поле будет действовать на заряды. Свободные заряды проводника начнут перемещаться: положительные — вдоль поля, отрицательные — против поля. На одном из концов проводника будет накапливаться избыток положительного заряда, на другом — отрицательного. Зарядов переместится столько, сколько необходимо для полной компенсации внешнего поля. Таким образом, электрическое поле внутри проводника обращается в нуль.

При этом из теоремы Гаусса следует, что внутри проводника сохраняется электрическая нейтральность вещества. Отсутствие поля внутри проводника приводит к тому, что потенциал во всех точках внутри проводника постоянен (это следует из (17.21):  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ ). Поверхность проводника в электрическом поле также является эквипотенциальной, иначе вдоль поверхности имело бы место перемещение заряда. Отсюда вытекает, что *силовые линии (и вектор напряженности поля) направлены по нормали к поверхности проводника в каждой точке.*

Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электрическое поле, разрывает часть силовых линий, так что они заканчиваются на отрицательных наведенных зарядах и вновь начинаются на положительных зарядах. Явление перераспределения поверхностных зарядов проводника во внешнем электрическом поле называется *электростатической индукцией.*

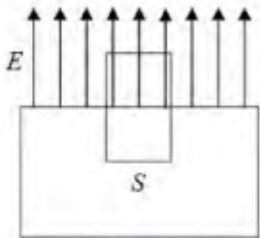


Рис. 18.1

Рассчитаем теперь напряженность электрического поля, определяемую поверхностной плотностью зарядов, вблизи поверхности проводника (рис. 18.1), воспользовавшись теоремой Гаусса. На малом участке  $S$  поверхностную плотность заряда  $\sigma$  можно считать постоянной, так что заряд этого участка поверхности равен  $q = \sigma S$ . Выберем в качестве гауссовой поверхности цилиндр с образующими, перпендикулярными поверхности проводника, и основаниями площади  $S$ , параллельными этой поверхности, причем цилиндр пересекает поверхность проводника. Поток вектора напряженности электрического поля через боковую поверхность цилиндра (как и горизонтальная составляющая напряженности) отсутствует из соображений симметрии.

Поток вектора напряженности электрического поля через нижнее основание цилиндра отсутствует вследствие отсутствия поля и силовых линий в проводнике. Таким образом, полный поток вектора напряженности электрического поля определяется потоком через верхнее основание цилиндра. По теореме Гаусса имеем по аналогии с (16.10):  $ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ , откуда

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (18.1)$$

В результате напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника вдвое больше, чем в случае заряженной диэлектрической плоскости с той же поверхностной плотностью заряда.

В случае если вблизи проводника находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , напряженность электрического поля внутри диэлектрика ослабляется в  $\epsilon$  раз:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (18.2)$$

## 18.2. Электрическая емкость проводника

Рассмотрим уединенный проводник, который удален от других проводников, тел и зарядов. Если на него подать некий заряд, то он будет обладать неким потенциалом. Опыт показывает, что разные проводники, будучи одинаково заряженными, имеют различные потенциалы, зависящие от геометрии проводника. Если проводнику сообщить заряд  $q$ , то он распределится по поверхности так, что напряженность поля внутри проводника окажется равной нулю. Зная распределение заряда, можно с помощью принципа суперпозиции найти потенциал и напряженность поля в любой точке.

Если поместить на этот же проводник вдвое больший заряд, то он распределится по поверхности проводника точно так же, причем заряды в любой точке поверхности возрастут вдвое. При этом и потенциал в каждой точке возрастет пропорционально заряду проводника, так что потенциал пропорционален заряду. Поэтому для уединенного проводника можно ввести понятие *электрической емкости* (или просто емкости) *проводника* как отношения заряда на проводнике к его потенциалу:

$$C = q/\varphi. \quad (18.3)$$

Емкость — скалярная величина, характеризующая способность проводника накапливать электрические заряды. Так как заряды распределяются на внешней поверхности проводника, то емкость зависит от его размеров и формы, но не зависит от материала, агрегатного состояния и наличия полостей внутри проводника. Единицей емкости в СИ является фарад (Ф). 1 фарад — емкость проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл.

Так потенциал уединенной сферы (и шара) радиуса  $r$  в соответствии с формулой (17.26) равен  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ . Отсюда по определению можно найти емкость уединенного шара в вакууме:

$$C = 4\pi\epsilon_0 r. \quad (18.4)$$

В диэлектрике поле ослабляется в  $\varepsilon$  раз. Пропорционально уменьшаются напряженность поля и потенциал:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \quad (18.5)$$

так что емкость уединенного шара в диэлектрике

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r. \quad (18.6)$$

Несложно посчитать, что емкостью в 1 Ф обладает в вакууме уединенный шар, имеющий радиус 10 млн км, а емкость шарообразной Земли по той же формуле составляет 0,7 мФ. Так что фарад — большая величина, поэтому чаще используют микрофарады, нанофарады, пикофарады. Еще один пример. Если считать емкость тела человека равной емкости электропроводящего шара того же объема, то, как несложно показать, ее можно оценить величиной порядка  $10^{-11}$  Ф.

### 18.3. Конденсаторы

В технике необходимы устройства, которые обладают большой емкостью — аккумулируют большой заряд при малом потенциале. Такие устройства называются конденсаторами. Они используют тот факт, что емкость неуединенного проводника часто существенно больше емкости того же проводника, когда он уединен. Конденсатор обычно представляет собой систему двух проводников (обкладок), разделенных диэлектриком. На емкость конденсатора не должны оказывать влияние окружающие тела, поэтому проводникам придается такую форму, чтобы поле конденсатора было сосредоточено в узком зазоре между обкладками. Этому условию удовлетворяют две плоские пластины, два коаксиальных (соосных) цилиндра, две концентрические (имеющие общий центр) сферы. Поэтому конденсаторы подразделяют на плоские, цилиндрические и сферические.

Так как поле сосредоточено внутри конденсатора, то силовые линии электрического поля начинаются на одной обкладке и конча-

ются на другой. Поэтому свободные заряды, возникающие на разных обкладках, являются разноименными зарядами, равными по модулю. *Емкостью конденсатора* называется отношение заряда  $q$ , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов  $U_{12}$  между его обкладками:

$$C = q/U_{12}. \quad (18.7)$$

Рассчитаем емкость плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных металлических пластин площадью  $S$  каждая, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга и имеющих заряды  $+q$  и  $-q$ . Предположим, что расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами. Тогда поле между обкладками можно считать однородным, и разность потенциалов между пластинами, промежуток между которыми заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , равна из (17.23):

$$U_{12} = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}. \quad (18.8)$$

Здесь учтено, что  $\sigma = q/S$ . Тогда по определению *емкость плоского конденсатора*

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \quad (18.9)$$

При сравнении формул для емкости уединенного шара и плоского конденсатора видно, что емкость плоского конденсатора можно сделать на много порядков больше, чем у шара — за счет увеличения отношения площади пластин к расстоянию между ними:  $\frac{S}{d} \gg 4\pi r$ . Реально площадь пластин компактного конденсатора увеличивают путем скручивания их в рулон.

Из формулы (17.24) для разности потенциалов в поле вокруг равномерно заряженной сферы аналогичным образом несложно вычислить емкость сферического конденсатора:

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon Rr}{R-r}, \quad (18.10)$$

где  $R$  и  $r$  — радиусы образующих конденсатор сфер.

Из формулы (17.27) для разности потенциалов в поле вокруг равномерно заряженного цилиндра также несложно вычислить емкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon L}{\ln\frac{R}{r}}, \quad (18.11)$$

где  $R$  и  $r$  — радиусы образующих конденсатор коаксиальных (соосных) цилиндров;

$L$  — длина образующей цилиндров.

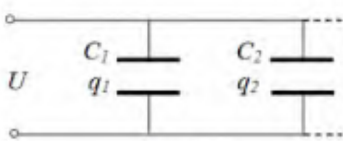


Рис. 18.2

Для варьирования параметров конденсаторы соединяют в батареи. Различают два вида соединений конденсаторов — параллельное и последовательное. Для увеличения емкости применяют параллельное соединение (рис. 18.2).

При параллельном соединении разность потенциалов на всех конденсаторах одинакова и составляет  $U$ . Полный заряд батареи равен сумме зарядов всех конденсаторов:

$$q = \sum q_i = \sum C_i U, \quad (18.12)$$

так что суммарная емкость батареи составит:

$$C = \frac{q}{U} = \sum C_i. \quad (18.13)$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов электрическая емкость батареи равна сумме емкостей входящих в нее конденсаторов.

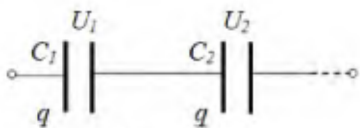


Рис. 18.3

При последовательном соединении (рис. 18.3) заряды всех конденсаторов одинаковы и равны заряду  $q$  батареи. Разность потенциалов батареи равна сумме разностей потенциалов на каждом из конденсаторов:

$$U = \sum U_i, \quad (18.14)$$

где  $U_i = \frac{q}{C_i}$ .

Поскольку  $U = \frac{q}{C}$ , то суммарная емкость батареи рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}. \quad (18.15)$$

При последовательном соединении емкость батареи всегда меньше наименьшей из емкостей входящего в батарею конденсатора, используемого в батарее. Достоинство последовательного соединения конденсаторов в том, что на каждый конденсатор приходится лишь часть разности потенциалов батареи, что уменьшает вероятность пробоя конденсаторов.

## **18.4. Энергия заряженного проводника и конденсатора. Плотность энергии электростатического поля**

Электростатические силы взаимодействия консервативны, поэтому система зарядов обладает потенциальной энергией. Найдем сначала энергию заряженного уединенного проводника. Пусть имеется уединенный проводник зарядом  $q$ , емкостью  $C$  и потенциалом  $\phi$ . При увеличении заряда этого проводника на  $dq$  совершается работа по преодолению кулоновских сил отталкивания между одноименными зарядами. Эта работа идет на увеличение электрической энергии заряженного проводника. Примем начало отсчета потенциала в бесконечно удаленной точке. Тогда работа  $dA$ , совершаемая внешними силами при переносе заряда  $dq$  из бесконечности на проводник

$$dA = \phi dq = \phi d(C\phi) = C\phi d\phi. \quad (18.16)$$

Здесь использована связь заряда, емкости и потенциала проводника. Постепенное увеличение заряда на проводнике приводит к увеличению потенциала проводника от 0 до  $\phi$ . При этом совершается работа, задаваемая интегралом выражения (18.16):

$$A = \int_0^\phi C\phi d\phi = \frac{C\phi^2}{2}. \quad (18.17)$$

Очевидно, что энергия заряженного проводника  $W$  равна работе  $A$ , которую надо совершить, чтобы зарядить проводник:

$$W = \frac{c\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2c} = \frac{q\varphi}{2}. \quad (18.18)$$

Найдем теперь энергию заряженного конденсатора. Для переноса заряда  $dq$  с одной обкладки на другую внешние силы совершают работу

$$dA = U_{12}dq = U_{12}d(CU_{12}) = CU_{12}dU_{12}. \quad (18.19)$$

Увеличение заряда приводит к увеличению разности потенциалов на конденсаторе от 0 до  $U$ . Таким образом, работа по увеличению разности потенциалов на конденсаторе от 0 до  $U$  дается интегралом:

$$A = \int_0^U CU_{12}dU_{12} = \frac{cU^2}{2}. \quad (18.20)$$

В результате энергия конденсатора  $W$  равна работе  $A$ , которую надо совершить, чтобы его зарядить:

$$W = \frac{cU^2}{2} = \frac{q^2}{2c} = \frac{qU}{2}. \quad (18.21)$$

Полученное выражение для энергии конденсатора позволяет найти силу, с которой пластины плоского конденсатора притягивают друг друга. Предположим, что расстояние  $x = d$  между обкладками меняется на величину  $dx$ . При этом сила совершает работу за счет уменьшения потенциальной энергии конденсатора  $dA = Fdx = -dW$ , откуда получаем известную из механики формулу:  $F = -\frac{dW}{dx}$ .

Воспользовавшись формулами для энергии конденсатора и емкости плоского конденсатора, получим

$$W = \frac{q^2}{2c} = \frac{q^2x}{2\varepsilon_0\varepsilon S} \quad (18.22)$$

и окончательно силу притяжения пластин в конденсаторе:

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}. \quad (18.23)$$

Здесь знак «минус» указывает, что сила  $F$  является силой притяжения.

Если отключить конденсатор от внешнего источника заряда и начать раздвигать его пластины, то энергия конденсатора  $W = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$  будет линейно увеличиваться с увеличением занимаемого полем объема конденсатора при постоянной (в соответствии с теоремой Гаусса) напряженности поля. Поэтому логично интерпретировать энергию конденсатора как энергию электрического поля, определяемую занимаемым полем объемом и напряженностью. Выразим энергию электрического поля плоского конденсатора через напряженность:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S (Ed)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V, \quad (18.24)$$

где  $V = Sd$  — занимаемый полем объем между обкладками конденсатора.

Поскольку электрическое поле конденсатора однородно, то, разделив энергию на объем, получим объемную *плотность энергии электростатического поля*:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (18.25)$$

Плотность энергии электростатического поля измеряется в джоулях на кубический метр. В случае неоднородного поля плотность энергии электростатического поля в каждой точке выражается через малый объем  $dV$ :

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \quad (18.26)$$

При этом энергия поля в объеме  $V$  выражается через интеграл по этому объему:

$$W = \int_V w dV = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \int_V E^2 dV. \quad (18.27)$$

# 19. Диэлектрики в электрическом поле

## 19.1. Поляризация диэлектриков. Полярные и неполярные диэлектрики. Свободные и связанные заряды

Рассмотрим теперь подробнее поведение диэлектриков в электрическом поле. Диэлектрик плохо проводит электрический ток. Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, прочно связаны друг с другом и под действием внешнего электрического поля могут лишь немного смещаться — положительный заряд относительно отрицательного. При этом, как отмечалось выше, вещество превращается в диполь, поле которого противоположно внешнему полю.

Процесс образования дипольного момента в диэлектрике при наложении внешнего поля называется *поляризацией диэлектрика*. Таким образом, если в проводнике на поле реагируют *свободные заряды*, то в диэлектрике — *связанные заряды*. Различают два основных типа диэлектриков — полярные и неполярные.

В молекулах *полярных диэлектриков* изначально имеется смещение положительного заряда относительно отрицательного — даже в отсутствие внешнего электрического поля. Примером полярного диэлектрика является молекула воды  $\text{H}_2\text{O}$ , которая по форме представляет собой равнобедренный треугольник, причем электронные облака (и отрицательный заряд) смещены от атомов водорода к электроотрицательному атому кислорода. Похожее смещение отрицательного заряда атомов водорода имеет место в полярных молекулах хлористого водорода  $\text{HCl}$  и аммиака  $\text{NH}_3$ . Молекула полярного диэлектрика является жестким диполем с дипольным моментом (15.12)  $\vec{p} = q\vec{l}$ .

Молекулы неполярных диэлектриков более симметричны, и в них в отсутствие внешнего электрического поля нет смещения положительного заряда относительно отрицательного. Примерами неполярных диэлектриков являются азот и многие углеводороды типа

полиэтилена. Однако при наложении поля положительный заряд молекулы смещается в направлении поля, отрицательный — против поля. Возникает упругий диполь и индуцированный (наведенный полем) дипольный момент.

Для оценки состояния поляризации используют понятие вектора поляризации. *Вектор поляризации* (или *поляризованность*) диэлектрика — это дипольный момент единицы объема:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_i, \quad (19.1)$$

где по небольшому объему  $\Delta V$  суммируются дипольные моменты  $\vec{p}_i$  отдельных молекул.

Для большинства веществ в отсутствие внешнего электрического поля вектор поляризации равен нулю. Даже для полярных диэлектриков вследствие хаотического движения молекул дипольные моменты отдельных молекул распределены случайным образом, так что  $\vec{P} = 0$  (рис. 19.1, а).

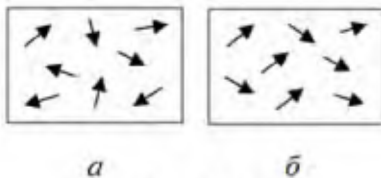


Рис. 19.1

Во внешнем электрическом поле, как правило,  $\vec{P} \neq 0$ . Дипольные моменты отдельных молекул диэлектриков стремятся — вопреки хаотическому движению — сориентироваться вдоль силовых линий поля (рис. 19.1, б). Таким образом, во внешнем электрическом поле вектор поляризации является функцией поля. При этом опытно установлено, что в большинстве случаев поле можно считать небольшим, так что в разложении в ряд Тейлора зависимости  $\vec{P}(\vec{E})$  можно ограничиться линейным членом:

$$\vec{P} = \beta \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (19.2)$$

где безразмерная величина  $\beta$  — диэлектрическая восприимчивость.

## 19.2. Вектор поляризации, диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость

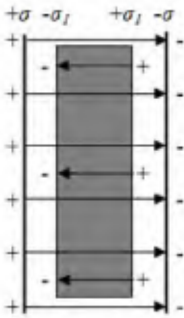


Рис. 19.2

Микроскопические диполи-молекулы определяют макроскопическую диэлектрическую проницаемость среды. Поэтому найдем теперь связь вектора поляризации и диэлектрической восприимчивости с диэлектрической проницаемостью. Пусть имеется плоский конденсатор, в который помещена пластина диэлектрика (рис. 19.2). Пластина состоит из молекул, обладающих электрическим дипольным моментом. В конденсаторе без диэлектрика поле создается свободными зарядами — зарядами на пластинах конденсатора.

В конденсаторе с диэлектриком напряженность поля в диэлектрике является разностью напряженностей двух полей:

$$E = E_0 - E_1, \quad (19.3)$$

поля свободных зарядов (16.12):  $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

и поля связанных зарядов:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}. \quad (19.4)$$

При этом внутри диэлектрика связанные заряды взаимно компенсируются, так что некомпенсированные связанные заряды поверхностной плотностью  $\sigma_1$  сосредоточены на двух поверхностях диэлектрика. Найдем связь модуля вектора поляризации  $P$  и  $\sigma_1$ :

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} |\vec{p}_i| = \frac{1}{Sd} q_1 d = \frac{q_1}{S} = \sigma_1, \quad (19.5)$$

где  $S$  — площадь пластин конденсатора;

$d$  — расстояние между пластинами;

$q_1$  — связанный заряд пластины;

$q_1 d$  — дипольный момент пластины диэлектрика.

Получим из (19.3)

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}. \quad (19.6)$$

Подставив из (19.2)  $P = \beta \varepsilon_0 E$ , получим

$$E = E_0 - \beta E, \quad (19.7)$$

или

$$E(1+\beta) = E_0.$$

Иными словами, поле в диэлектрике  $E$  в  $1+\beta$  раз меньше, чем поле в вакууме  $E_0$ . Вспомнив определение диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ , получим ее связь с диэлектрической восприимчивостью:

$$1+\beta = \varepsilon. \quad (19.8)$$

Полезной может оказаться и формула для связи вектора поляризации с диэлектрической проницаемостью:

$$\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E}. \quad (19.9)$$

Отметим, что полученные соотношения выполняются только для однородных изотропных диэлектриков. В анизотропных кристаллах ситуация сложнее, поскольку зависит от взаимной ориентации электрического поля и осей кристалла. Кроме того, необходимо учитывать, что в переменных полях диэлектрическая проницаемость и диэлектрическая восприимчивость зависят от частоты поля.

### **19.3. Теорема Гаусса для поля в диэлектрике. Явления на границе раздела двух диэлектриков. Преломление линий смещения и напряженности**

Запишем теперь теорему Гаусса через *поток вектора электрического смещения*  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ . Из (16.8) имеем с учетом ослабления поля в диэлектрике в случае среды с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ :

$$\oint E_n dS = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i, \quad (19.10)$$

откуда

$$\oint D_n dS = \sum_{i=1}^N q_i. \quad (19.11)$$

Таким образом, если мы записываем теорему Гаусса через поток вектора электрического смещения, то необходимо учитывать только свободные заряды — без учета свойств диэлектрика. В свою очередь, при записи теоремы Гаусса через поток вектора напряженности мы учитываем свойства диэлектрика как со свободными, так и со связанными зарядами. Аналогичны различия в картинах силовых линий напряженности и электрического смещения. Силовые линии напряженности начинаются и заканчиваются как на свободных, так и на связанных зарядах. А силовые линии электрического смещения начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах.

Подобные рассуждения позволяют перейти к задаче о преломлении линий смещения и напряженности на границе раздела двух диэлектриков. Будем считать, что на этой границе отсутствуют свободные заряды. Однако, как мы уже видели (см. рис. 19.2), на границе диэлектрика (а в общем случае — на границе раздела двух диэлектриков) в поле возникает связанный заряд, который может приводить к разрыву полей.

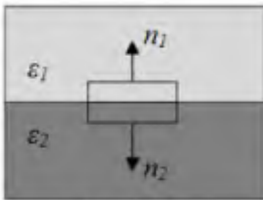


Рис. 19.3

Рассмотрим сначала соотношение между нормальными к поверхности раздела компонентами вектора электрического смещения  $D_n$ . Воспользуемся теоремой Гаусса, выбрав в качестве гауссовой поверхности поверхность цилиндра (рис. 19.3). При этом основания цилиндра должны быть малы (чтобы считать электрическое смещение константой), параллельны границе раздела и находиться в разных диэлектриках, а высота цилиндра должна быть бесконечно малой, в том числе и по сравнению с основаниями. Такой выбор позволяет пренебречь потоком вектора электрического смещения через боковую поверхность цилиндра по сравнению с потоком через основания.

Тогда из теоремы Гаусса (19.11) следует, что потоки вектора электрического смещения через основания равны и противоположны

ны, т. е. один направлен наружу цилиндра, другой — внутрь. Геометрически это означает, что потоки направлены в одну сторону:  $D_{n1}S = D_{n2}S$ . Поскольку площади оснований цилиндра  $S$  равны, то получаем, что *нормальная компонента вектора электрического смещения на границе раздела диэлектриков остается непрерывной*:

$$D_{n1} = D_{n2}. \quad (19.12)$$

Выразив полученное соотношение через напряженность поля, получим, что нормальная компонента вектора напряженности на границе раздела диэлектриков претерпевает разрыв:

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (19.13)$$

Перейдем теперь к тангенциальным составляющим, соотношение которых удобно найти для вектора напряженности с помощью теоремы о циркуляции. (Заметим, что теорема о циркуляции остается справедливой и в диэлектрике.)

Выделим вблизи границы раздела небольшой прямоугольный контур  $ABCD$  (рис. 19.4). Выберем стороны  $AB = CD = l$  так, что они параллельны границе раздела и находятся в разных диэлектриках, а стороны  $BC$  и  $DA$  бесконечно малы по сравнению со сторонами  $AB$  и  $CD$ . Тогда, пренебрегая в теореме о циркуляции (17.7)  $\oint E_l dl = 0$  интегралами по бесконечно малым сторонам, получим:  $E_{t1}l - E_{t2}l = 0$ , откуда следует, что *тангенциальная компонента вектора напряженности на границе раздела диэлектриков остается непрерывной*:

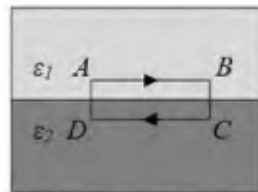


Рис. 19.4

$$E_{t1} = E_{t2}. \quad (19.14)$$

Выразив это соотношение через электрическое смещение, получим, что тангенциальная компонента вектора электрического смещения на границе раздела диэлектриков претерпевает разрыв:

$$\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (19.15)$$

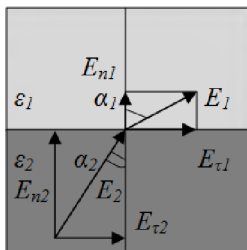


Рис. 19.5

Таким образом, мы получили, что ра напряженности и электрического смещения претерпевают преломление при переходе из одной среды в другую. Пусть в первой среде (рис. 19.5)  $tg\alpha_1 = \frac{E_{\tau 1}}{E_{n1}}$ , а во второй среде  $tg\alpha_2 = \frac{E_{\tau 2}}{E_{n2}}$ . Тогда из (19.13) и (19.14) получим закон преломления вектора напряженности электрического поля:

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{E_{\tau 2}}{E_{n2}} / \frac{E_{\tau 1}}{E_{n1}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (19.16)$$

Аналогично преломляются и силовые линии электрического смещения. Формула показывает, что при переходе в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью силовые линии напряженности и электрического смещения удаляются от нормали.

## 19.4. Сегнетоэлектрики, пьезоэлектрики, электреты. Явления на разломах

До сих пор обсуждались типичные физические параметры однородных и изотропных диэлектриков. В дополнение кратко опишем необычные электрические свойства некоторых диэлектриков, связанные в первую очередь со структурными особенностями и анизотропией вещества.

*Сегнетоэлектрики* — вещества, обладающие в отсутствие электрического поля в некотором диапазоне температур электрической поляризацией, зависящей от внешних условий. Они являются электрическим аналогом ферромагнетиков. Известно несколько сот сегнетоэлектриков, в том числе сегнетокерамика, жидкие кристаллы и полимерные материалы. К сегнетоэлектрикам относятся сегнетова соль ( $\text{NaKCl}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ), титанат бария ( $\text{BaTiO}_3$ ), ниобат лития ( $\text{LiNbO}_3$ ).

Сегнетоэлектрики характеризуются наличием доменов — областей с мононаправленной поляризацией в пределах одного домена. Ди-

электрическая проницаемость этих материалов достигает нескольких тысяч и зависит от предыстории. В сегнетоэлектрических диэлектриках, помещенных в электрическое поле, возникает остаточная электрическая поляризация (эффект памяти). *Петля гистерезиса*, представленная на рис. 19.6, характеризуется двумя величинами: остаточной поляризацией  $P_r$ , имеющейся даже при нулевом поле  $E$ , и коэрцитивным полем  $E_c$ , при котором вектор поляризации изменяет направление на обратное.

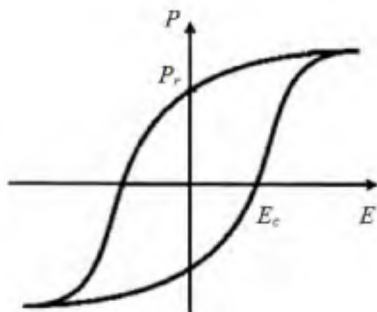


Рис. 19.6

*Пьезоэлектрики* — анизотропные кристаллические материалы (диэлектрики и полупроводники), в которых при механических деформациях возникает электрическая поляризация (пьезоэффект). Они также деформируются под влиянием внешнего электрического поля (обратный пьезоэффект). Типичным примером пьезоэлектрика является кварц  $\text{SiO}_2$  в некоторых модификациях. Эффект возникает благодаря тому, что при деформации происходит смещение ионов в кристаллической решетке и деформация электронных орбит. Это приводит к возникновению ненулевого вектора поляризации в некоторых кристаллических решетках

*Электреты* — материалы, длительно сохраняющие поляризованное состояние после снятия внешнего поля. Являются электрическим аналогом магнитов. Так некоторые органические смолы, застывая в сильном электрическом поле, сохраняют застывшей поляризацию молекул.

Рассмотренные материалы и их свойства широко применяются в технике. Однако при использовании сегнетоэлектриков и электретов может возникнуть проблема экранировки. В воздухе или другой окружающей среде могут найтись свободные ионы, которые перераспределяются так, что нейтрализуют их вектор поляризации. В таких случаях необходима специальная очистка материала.

В заключение несколько слов о явлениях на разломах — о свойстве свежесформированной поверхности испускать электроны и фотоны высокой энергии. В научных экспериментах удалось зарегистрировать при разломах горных пород электроны, вылетающие со скоростями, близкими к скорости света. Подобные явления, даже не разбивая гранитных глыб, может наблюдать каждый. Например, в темноте нетрудно заметить свечение при разламывании кусочков сахара, при растирании в ступе сахарного песка, при разрыве бумаги, при быстром разматывании рулона липкой ленты и даже при сходе ночных лавин в горах.

Такие эффекты могут быть связаны с электроотрицательностью атомов на одной из границ разлома, приводящей к захвату электронов от атомов другой границы, а также с пьезоэффектом. Явления на разломах имеют большое практическое значение. В частности, оптические и электрические эффекты вблизи геологических разломов в ряде случаев позволяют заблаговременно предсказывать землетрясения и другие стихийные бедствия.

## **20. Постоянный ток. Законы Ома и Джоуля-Ленца**

### **20.1. Постоянный ток. Виды тока. Сила тока. Плотность тока**

*Направленное движение электрических зарядов называют электрическим током.* Перенос электрического тока чаще осуществляется электронами. Однако в жидкостях, газах и плазме носителя-

ми тока нередко являются ионы — как положительные, так и отрицательные. В полупроводниках часто удобно рассматривать перенос тока так называемыми дырками. Электрический ток характеризуется *силой тока*  $I$  — количеством заряда, которое проходит через сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (20.1)$$

*Ток* является *постоянным*, если сила тока не зависит от времени. Для постоянного тока уравнение (20.1) можно проинтегрировать и получить

$$I = \frac{q}{t}. \quad (20.2)$$

Локальной характеристикой тока в данной точке проводника является *плотность тока*:

$$j = \frac{dI}{dS}, \quad (20.3)$$

где  $dS$  — элемент сечения проводника.

Плотность тока особенно важна в случае, когда она в разных точках проводника различна.

Плотность тока и силу тока можно рассматривать как вектор, направленный по линии движения зарядов в данной точке проводника. Направление тока совпадает с направлением движения положительных носителей тока и противоположно направлению движения отрицательных носителей тока. Плотность тока несложно связать со скоростью направленного движения  $v$  и концентрацией  $n$  носителей заряда. Из рис. 20.1 видно, что в единицу времени единицу площади сечения проводника пересекут  $nv$  носителей заряда — все частицы из объема длиной  $v$ , но не больше. Приняв для определенности, что заряд каждого носителя равен элементарному заряду  $e$ , получим по определению плотности тока

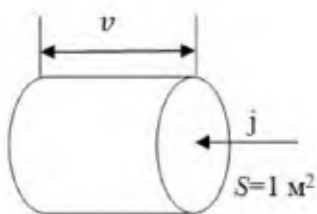


Рис. 20.1

Из рис. 20.1 видно, что в единицу времени единицу площади сечения проводника пересекут  $nv$  носителей заряда — все частицы из объема длиной  $v$ , но не больше. Приняв для определенности, что заряд каждого носителя равен элементарному заряду  $e$ , получим по определению плотности тока

$$j = env. \quad (20.4)$$

Отметим, что при обычных температурах скорость направленного движения носителей заряда на порядки меньше скорости хаотического движения.

Единица измерения силы тока — ампер (А).  $1 \text{ А} = 1 \text{ Кл/с}$ . Иногда силу тока называют просто током. Плотность тока измеряется в амперах на квадратный метр ( $\text{А/м}^2$ ).

## 20.2. Закон Ома в дифференциальной форме

В каждой точке проводника плотность тока является функцией напряженности поля. Получим вид этой функции. Для определенности будем считать носителями тока электроны. Под действием поля электрон приобретает некоторую скорость в направлении, противоположном вектору напряженности  $E$ . Однако время от времени он теряет эту направленную скорость, например, в результате столкновений с атомами среды. Ускорение электрона массы  $m$  (по модулю) в поле по второму закону Ньютона равно:

$$a = \frac{eE}{m}. \quad (20.5)$$

С другой стороны, ускорение можно выразить через среднюю скорость направленного движения  $v$  и среднее время между столкновениями  $\tau$ :

$$a = \frac{v_{\text{макс}}}{\tau} = \frac{2v}{\tau}. \quad (20.6)$$

Здесь учтено, что при равноускоренном движении средняя скорость равна половине максимальной. Приравнивая выражения, получим, что скорость направленного движения носителей заряда пропорциональна напряженности поля:

$$v = \frac{e\tau E}{2m} = \chi E. \quad (20.7)$$

Здесь выделен коэффициент пропорциональности

$$\chi = \frac{e\tau}{2m}$$

между скоростью направленного (дрейфового) движения электрона и напряженностью поля, называемый *подвижностью* электрона. Так как обычно скорость направленного движения носителей заряда намного меньше скорости хаотического движения, то время столкновения  $\tau$  определяется средней скоростью хаотического (а не направленного) движения электронов  $u$ :

$$\tau = \lambda/u, \quad (20.8)$$

где  $\lambda$  — средняя длина пробега электрона.

Таким образом

$$v = \frac{\lambda e E}{2m\tau} = \chi E. \quad (20.9)$$

При этом подвижность электрона определяется выражением

$$\chi = \frac{\lambda e}{2m\tau}. \quad (20.10)$$

С учетом (20.4) получим связь плотности тока с напряженностью поля — *закон Ома в локальной (дифференциальной) форме*:

$$j = \gamma E = E/\rho, \quad (20.11)$$

где введены понятия *удельной электропроводности* (или *проводимости*)  $\gamma$  и *удельного сопротивления*  $\rho$  проводника:

$$\gamma = en\chi = \frac{ne^2\lambda}{2m\tau} = \frac{1}{\rho}. \quad (20.12)$$

### 20.3. Закон Ома в интегральной форме. Сопротивление

Выведем теперь закон Ома в интегральной форме для участка цепи, не содержащего источник тока. Пусть ток течет по проводнику сечением  $S$  и длиной  $l$  (рис. 20.2). Умножим обе части уравнения  $j = E/\rho$  на площадь  $S$ , перейдя от плотности тока к току. Получим выражение для напряженности и свяжем ее в одномерном случае с потенциалом:

$$E = \frac{I\rho}{S} = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (20.13)$$

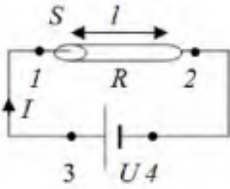


Рис. 20.2

Получим для потенциала  $-d\varphi = \frac{I\rho}{S} dl$ , откуда, интегрируя в пределах границ проводника, имеем

$$\Delta\varphi_{12} = I \frac{\rho l}{S} = IR, \quad (20.14)$$

где  $R = \frac{\rho l}{S}$  — сопротивление участка цепи.

Чаще полученный закон Ома для участка цепи в интегральной форме формулируют следующим образом: сила тока в цепи прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению (разность потенциалов на участке цепи при постоянном токе называют напряжением  $U$ ):

$$I = \frac{U}{R}. \quad (20.15)$$

## 20.4. Сторонние силы. Электродвижущая сила. Обобщенный закон Ома

Чтобы постоянный ток протекал по проводнику, необходимо на его концах поддерживать разность потенциалов. Это можно осуществить с помощью источника тока. Рассмотрим электрическую цепь (см. рис. 20.2). Пренебрежем сопротивлением подводящих проводников, так что потенциалы точек 1 и 3 а также точек 2 и 4 попарно равны. На участке 1–2 работает закон Ома для участка цепи в интегральной форме  $\varphi_1 - \varphi_2 = IR$ . Напряженность электрического поля на этом участке отлична от нуля, и оно придает зарядам на этом участке в соответствии с формулой (20.6) направленное движение.

На участке 4–3, в источнике тока, положительные заряды вопреки законам электростатики переходят от меньшего потенциала к большему. Такое перемещение проходит под действием сил, называемых *сторонними* (неэлектростатическими). Эти силы могут иметь, например, химическое происхождение — как это обычно имеет место в батарейках или аккумуляторах. По аналогии с опреде-

лением разности потенциалов (17.13) *электродвижущей силой (ЭДС)  $\mathcal{E}$  источника тока называют отношение работы сторонних сил цепи к заряду:*

$$\mathcal{E} = A_{ст}/q. \quad (20.16)$$

Работа сторонних сил отлична от нуля только внутри источника тока.

Обобщим теперь закон Ома (20.14) на *неоднородный участок цепи*, который помимо сопротивления дополнительно включает источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$ :

$$\Delta\varphi_{12} + \mathcal{E} = IR. \quad (20.17)$$

Отсюда имеем закон Ома для неоднородного участка цепи или *обобщенный закон Ома*:

$$I = \frac{\Delta\varphi_{12} + \mathcal{E}}{R}. \quad (20.18)$$

Если цепь замкнута, то точки 1 и 2 совпадают,  $\Delta\varphi_{12} = 0$  и

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (20.19)$$

Часто источник тока имеет заметное собственное внутреннее сопротивление  $r$ , которое необходимо учитывать наряду с внешним сопротивлением  $R$ . Тогда получим *закон Ома для замкнутой цепи*:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}. \quad (20.20)$$

## **20.5. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной и интегральной формах**

Прохождение электрического тока через сопротивление  $R$  в цепи требует затрат энергии, поскольку энергия направленного движения носителей заряда постоянно расходуется на взаимодействие со средой, например на столкновения с молекулами. Эти затраты обычно в конечном счете переходят в тепловую энергию среды. Рассчитаем этот процесс по аналогии с выводом закона Ома в диффе-

ренциальной форме. За время между соседними столкновениями каждый электрон приобретет кинетическую энергию

$$T = \frac{mv_{\text{Макс}}^2}{2} = \frac{m}{2} (a\tau)^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{e\tau E}{m}\right)^2 = \frac{e^2\tau^2}{2m} E^2. \quad (20.21)$$

Поделив это выражение на время  $\tau$  и умножив на концентрацию свободных электронов  $n$ , получим удельную тепловую мощность, выделяющуюся при прохождении тока в единице объема проводника:

$$w = \frac{ne^2\tau}{2m} E^2 = \frac{ne^2\lambda}{2mu} E^2 = \gamma E^2 = jE = \frac{E^2}{\rho}. \quad (20.22)$$

Это и есть закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. В соответствии с ним удельная мощность, выделяющаяся в проводнике при прохождении тока, пропорциональна квадрату напряженности поля.

Перейдем теперь к интегральной форме закона. Пусть ток течет по проводнику сечением  $S$  и длиной  $l$ . Умножим обе части уравнения  $w = \frac{E^2}{\rho}$  на объем проводника  $S l$ . Получим в левой части тепловую мощность  $W$ , выделяющуюся при прохождении тока во всем проводнике:

$$W = \frac{(El)^2 S}{\rho l} = \frac{U^2}{R} = UI = I^2 R. \quad (20.23)$$

Это и есть закон Джоуля-Ленца в интегральной форме.

## 21. Газовый разряд и плазма

### 21.1. Проводимость газов. Носители тока.

#### Ионизация и рекомбинация. Несамостоятельный и самостоятельный газовые разряды

При обычных условиях все газы являются диэлектриками и не проводят электрический ток. Этим объясняется, например, использование воздуха в качестве изолятора во многих приборах. Диэлектрические свойства газов обусловлены малостью концентрации но-

*сителей тока (свободных зарядов)* в газе. Все же эти заряды существуют благодаря наличию (даже при невысокой температуре) небольшого количества энергичных молекул, возникших случайным образом при столкновениях и способных ионизовать другие молекулы. К тому же и частицы космических лучей, незримо присутствующие на поверхности Земли и в других местах, образуют ионы.

Однако при определенных условиях газы могут стать реальными проводниками. Например, пламя, внесенное в пространство между двумя электродами, приводит к заметной ионизации воздуха и возникновению тока. Помимо нагревания существуют другие способы превращения газа в проводник. В качестве *ионизатора* (причины ионизации молекул газа) можно также использовать ультрафиолетовое или рентгеновское излучение, пучок ускоренных электронов, радиоактивный источник и т. д.

При *ионизации* от молекул отрывается один, а иногда и несколько электронов, в результате чего молекула превращается в ион. Чтобы ионизовать атом, необходимо совершить работу по удалению электрона от иона, равную энергии ионизации  $W_i$ . Энергию ионизации принято характеризовать *потенциалом ионизации*  $\phi_i$ :

$$\phi_i = W_i/e. \quad (21.1)$$

Легче всего оторвать электрон внешней оболочки атома. Так, для внешней оболочки различных атомов потенциал ионизации меняется в пределах от нескольких вольт (у атомов металлов первой группы) до почти 25 В (у атомов гелия).

Под действием внешнего электрического поля образовавшиеся электроны и ионы начинают двигаться, создавая электрический ток. Возникает газовый разряд, который может сопровождаться свечением и нагревом газа, а также специфичным шумом. Таким образом, *газовый разряд* — это прохождение электрического тока через газ, сопровождающееся совокупностью электрических, оптических, тепловых и шумовых явлений.

Электронная проводимость газов была описана выше. Однако необходимо учитывать, что в газе (по сравнению с твердым телом) отно-

сительно легко могут перемещаться ионы. Во многих случаях эти ионы играют важную роль в протекании газового разряда. При этом электрический ток может переноситься несколькими носителями тока: в дополнение к электронам — несколькими видами ионов. Поэтому суммарный ток в газе равен сумме токов отдельных носителей. Аналогично имеем из (20.11) для суммарной плотности тока

$$j = \sum_i j_i = \sum_i \gamma_i E = \gamma E. \quad (21.2)$$

Отсюда суммарная проводимость  $\gamma$  в случае нескольких носителей тока равна сумме проводимостей отдельных носителей и с учетом формулы (20.12)  $\gamma = \frac{ne^2\lambda}{2mu}$  равна:

$$\gamma = \sum_i \gamma_i = \sum_i \frac{n_i(Ze)_i^2 \lambda_i}{2m_i u_i}, \quad (21.3)$$

где  $n_i$  — концентрация;

$(Ze)_i$  — заряд;

$\lambda_i$  — средняя длина пробега;

$m_i$  — масса;

$u_i$  — средняя скорость хаотического движения.

В принципе они разные у каждого носителя тока.

Существует несамостоятельные и самостоятельные газовые разряды. В *несамостоятельных разрядах* проводимость газа поддерживается с помощью внешних ионизаторов. Это может быть пламя, излучение, пучок ускоренных электронов, радиоактивный источник и т. д. В *самостоятельных разрядах* ионизация газа осуществляется действием самого разряда — достаточно большим электрическим полем между электродами.

В разряде всегда помимо ионизации молекул происходит обратный процесс — рекомбинация. *Рекомбинация* — это захват ионом свободного электрона, что приводит к превращению иона в нейтральную молекулу и к уменьшению количества носителей тока. Определяющую проводимость (21.2) концентрацию носителей тока можно найти, рассмотрев баланс процессов ионизации и рекомбинации. Так, если в несамостоятельном разряде убрать ионизатор, то ионы и электроны рекомбинируют, и газ почти мгновенно перестанет проводить ток.

## 21.2. Вольт-амперная характеристика газового разряда. Ударная ионизация

Закон Ома, предполагающий линейную зависимость тока  $I$  от напряжения  $U$ , часто не соблюдается для газов. В общем случае для газового разряда эта зависимость имеет более сложный вид, например такой, как на рис. 21.1. Объяснить такое поведение кривой можно изменением концентрации носителей тока в зависимости от напряжения.

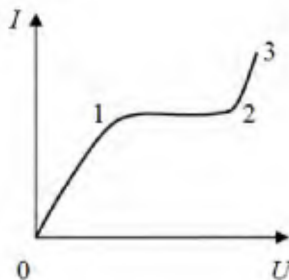


Рис. 21.1

При небольших значениях напряжения имеет место несамостоятельная проводимость, инициируемая энергичными молекулами или космическими лучами. При этом небольшого постоянного количества носителей тока хватает для поддержания линейной зависимости тока от напряжения и приближенного соблюдения закон Ома (участок 0–1). Однако с ростом напряжения кривая выходит на насыщение и переходит в горизонтальную прямую (участок 1–2). Это насыщение объясняется тем, что начиная с некоторого напряжения все немногие носители быстро выносятся на электроды и концентрация их в разряде падает. Величина получаемого *тока насыщения* ограничена числом носителей тока, создаваемых в разряде в единицу времени внешним ионизатором.

Однако, если сильно повысить напряжение, ток начинает резко возрастать (участок 2–3). Электроны разряда (точнее их наиболее энергичная часть) приобретают в поле энергию, сравнимую с энергией ионизации молекул. Это позволяет им ионизовать молекулы газа и ведет к росту концентрации носителей тока. В интенсивном разряде первичный электрон образует вторичные, которые образуют третичные и т. д. Возникает так называемая *электронная лавина*, или *каскадный процесс*. В каскадном процессе к тому же часто одни частицы порождают другие. Например, свободные электроны при

возбуждении молекул рождают фотоны, а фотоны при ионизации молекул рождают свободные электроны. Такой процесс называют *ударной ионизацией*. При высоких напряжениях возможна ударная ионизация не только электронами, но и ионами.

В реальных разрядах ударная ионизация оказывается не единственным и часто даже не основным процессом генерации носителей тока на этой стадии. Так, более активно может идти выбивание электронов из катода ионами разряда — *вторичная электронная эмиссия с катода*. Активность этого процесса определяется тем, что скорость взаимодействия частиц пропорциональна концентрации частиц и взаимодействие активной идет в конденсированной среде (катоде), чем в разреженной (газе). К тому же работа выхода электрона из катода на порядок меньше энергии ионизации молекул.

Третий процесс, влияющий на проводимость газов — *термическая ионизация*, проявляющаяся особенно при нагреве разряда. Суть ее в том, что при столкновении энергичных молекул происходит выбивание электронов и превращение молекул в ионы. Четвертый фактор — возникающие в разряде фотоны, способные производить *фотоионизацию* молекул газа и вторичную электронную эмиссию с катода. Наконец, пятый фактор — *термоэлектронная эмиссия* — излучение нагретым металлом катода электронов.

Таким образом, в результате всех этих процессов на участке 2–3 происходит лавинообразный рост концентрации носителей тока в разряде. Число их определяется теперь не ионизатором, а действием самого поля, и проводимость из несамостоятельной становится самостоятельной (происходит *пробой*). Напряжение, при котором наступает самостоятельный разряд, называют *напряжением пробоя*.

## 21.3. Типы самостоятельных газовых разрядов

Как в соответствии с вышеописанным механизмом создать самостоятельный разряд в газе? Для этого к разрядному промежутку надо приложить немалое напряжение. Упростить задачу можно понижением давления газа, поскольку чем меньше давление, тем

больше длина свободного пробега  $\lambda$  носителей тока и тем больше набираемая на длине свободного пробега  $\lambda$  энергия носителей тока.

Рассмотрим существующий при низком давлении *тлеющий разряд*. Для получения этого разряда можно приложить напряжение порядка тысячи вольт к стеклянной трубке длиной несколько десятков сантиметров и начать постепенно откачивать из трубки воздух. Когда давление газа понизится на порядок или несколько порядков, в трубке вспыхнет светящийся разряд. Сначала он имеет вид тонкого шнура (в воздухе — малинового цвета, водород и гелий испускают сине-зеленый свет), соединяющего оба электрода. При дальнейшей откачке светящийся шнур размывается и расширяется, и свечение заполняет почти всю трубку. Различают две главные части разряда: 1) несветящуюся часть, прилегающую к катоду, получившую название темного катодного пространства (в ней электроны ускоряются); 2) светящуюся часть, заполняющую остальное пространство, называемую положительным столбом. Структура разряда может быть и более сложной. Носители тока в тлеющем разряде возникают благодаря ударной ионизации электронным ударом и вторичной электронной эмиссии с катода под действием ионов и фотонов.

Практическое применение тлеющего разряда — газосветные лампы, в том числе энергосберегающие. В разряд для повышения КПД добавляют пары ртути, причем ультрафиолетовое излучение этих паров превращается в видимое излучение слоем фосфоресцирующего вещества, покрывающего изнутри стенки колбы лампы. Благодаря невысокой интенсивности тлеющего разряда процессы в нем обычно идут бесшумно, время зажигания может составлять заметные доли секунды, а в условиях зимнего холода разряд может вообще не зажечься. Другое применение тлеющего разряда — газовые лазеры.

Для создания разряда при давлении порядка атмосферного требуются более высокие напряженности поля (около 3 МВ/м). При этом благодаря высокому давлению элементарные процессы идут более интенсивно. Между электродами появляется *стример* — электрическая искра, имеющая вид ярко светящегося извилистого кана-

ла. Образуется стример за счет многочисленных электронных лавин. Начало новой лавине обычно дает акт фотоионизации фотоном из предыдущих лавин. Поскольку фотоны распространяются быстрее электронов, то стример развивается быстрее, чем входящие в него электронные лавины. Газ вблизи искры сильно нагревается и расширяется, отчего возникают звуковые волны и характерный треск. Такое явление получило название *искрового разряда*.

Красивое и небезопасное явление природы — *молния* — представляет собой искровой разряд в атмосфере. Уже в середине XVIII в. Михаил Ломоносов и Бенджамин Франклин независимо друг от друга обратили внимание на внешнее сходство молнии с электрической искрой. Грозовые облака сильно заряжены электричеством. Чаще всего нижняя часть облака бывает заряжена отрицательно, а верхняя — положительно. Поэтому если два облака сближаются разноименно заряженными частями, то между ними проскакивает молния. Кроме того, проходя над землей, грозовое облако создает на ее поверхности индуцированные заряды противоположного знака. В воздухе возникает сильное электрическое поле, приводящее, в частности, к образованию озона из кислорода. Если напряженность этого поля достаточна, то может произойти пробой, и молния ударит в землю. При этом молния иногда поражает людей, вызывает пожары, выводит из строя технику. Типичные параметры молнии: напряжение между облаком и землей порядка 100 МВ; сила тока порядка 0,1 МА; продолжительность порядка 1 мкс; диаметр светящегося канала 10–20 см. Гром, возникающий после молнии, имеет то же происхождение, что и треск при проскакивании искры в колбе. Звуковые волны, отражаясь от облаков и земного рельефа, часто создают длительное эхо — *громовые раскаты*.

Искровой разряд используют для поджига горючей смеси в двигателях внутреннего сгорания и в предохранительных системах линий электропередач.

Разряд обычно трудно поджечь, а далее он сам довольно стабильно способен поддерживать требуемую концентрацию носителей тока и другие параметры. Этим воспользовался в 1802 г. русский физик В. В. Петров для создания дугового разряда (электрической

дуги) в газе повышенного давления. Он присоединил к полюсам электрической батареи два кусочка древесного угля и, приведя уголи в соприкосновение для облегчения поджига, слегка их раздвинул. Увеличения расстояния между электродами не приводит к угасанию разряда, и между концами углей поддерживается яркое пламя дуги. Похожее явление возникает при выдергивании вилки работающего электроприбора из розетки. Современная электрическая дуга, состоящая из двух специальных электродов и стабилизирующего реостата, позволяет зажечь дугу постоянного тока температурой  $6000\text{ }^{\circ}\text{C}$  в газе при давлении 20 атм. Большую роль в поддержании дуги играет вторичная электронная эмиссия с катода под действием ионов и термическая ионизация. Интересно, что в дуговом разряде при увеличении тока резко падает сопротивление и напряжение уменьшается.

Электрическая дуга применяется сегодня для электросварки металлических деталей, а также в осветительных приборах высокой мощности. Свариваемые детали служат положительным электродом, к ним прикасаются специальным отрицательным электродом для получения дуги, плавящей металл.

Сильная неоднородность электрического поля может привести к возникновению еще одного типа разряда — *коронного разряда*. Если площадь поверхности обкладок конденсатора сильно отличается, то и напряженность электрического поля около обкладок различается во много раз. При этом условия самостоятельного разряда (напряженность поля примерно  $3\text{ МВ/м}$ ) могут реализоваться только рядом с малой обкладкой. Так, если подать большое отрицательное напряжение на острие или тонкую проволочку относительно большой металлической пластины или земли, то вблизи малой обкладки можно наблюдать характерное свечение коронного разряда.

Коронный разряд используется в молниеотводах, счетчиках радиоактивности, электрофильтрах (благодаря электризации пыли) и лакокрасочной промышленности. С вредной утечкой электричества благодаря коронному разряду приходится бороться в линиях электропередач. Для этого провода ЛЭП делают толстыми.

## 21.4. Понятие о плазме

Плазма — это частично или полностью ионизованный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Но надо помнить, что при достаточно высокой степени ионизации плазма приобретает существенно новые свойства по сравнению с газом. Возможно, главное отличие плазмы в тесной связи ее механических и электродинамических свойств. Так, движение плазмы может приводить к возникновению электромагнитных полей, и наоборот.

При достаточно сильном нагревании любое вещество испаряется и вследствие термической ионизации превращается в ионы и электроны. Ионизация газа с последующим превращением его в плазму помимо этого может быть вызвана его взаимодействием с электромагнитным излучением или бомбардировкой газа пучками заряженных частиц. Отметим, что пучки заряженных частиц (по данному выше определению) не являются плазмой, потому что не являются *квaziнейтральными* — имеющими практически одинаковые плотности положительных и отрицательных зарядов. Философы античности утверждали, что мир состоит из четырех стихий: земли, воды, воздуха и огня. Это положение в принципе согласуется с научным представлением о четырех обычных агрегатных состояниях вещества, причем плазме соответствует огонь. Необходимо заметить, что из этих состояний плазма является доминирующей во Вселенной.

*Степенью ионизации* плазмы называется отношение числа ионизованных атомов к полному их числу в единице объема. В зависимости от степени ионизации говорят о *слабо, сильно и полностью ионизованной плазме*. Степень ионизации слабоионизованной плазмы составляет менее 1%, полностью ионизованной плазмы — 100%

Средние энергии различных типов частиц, составляющих плазму, могут отличаться одна от другой вследствие затрудненности обмена энергией между частицами с существенно различной массой, а также влияния полей. Поэтому иногда приходится различать элек-

тронную температуру, ионную температуру и температуру нейтральных атомов. Такая плазма называется *неизотермической*.

Низкотемпературной принято считать плазму температурой ионов до  $10^5$  К (10 эВ), а высокотемпературной —  $10^6$ – $10^8$  К ( $10^5$ – $10^4$  эВ) и более. Здесь используется внесистемная единица — электронвольт, поскольку в физике плазмы температуру часто измеряют в тех же единицах, что и среднюю энергию частиц — в электронвольтах. При этом  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{19}$  Дж, и энергии 1 эВ соответствует температура 11600 К (заряд электрона поделен на постоянную Больцмана).

Плотность плазмы варьируется в широких пределах — от  $1 \text{ м}^{-3}$  в межгалактическом пространстве и  $10^7 \text{ м}^{-3}$  в солнечном ветре до  $10^{28} \text{ м}^{-3}$  для плазмы твердых тел и еще больших величин в центральных областях звезд.

В состоянии плазмы находятся обычные звезды. Около Земли плазма заполняет магнитосферу и ионосферу Земли. Магнитные бури и полярные сияния определяются процессами в околоземной плазме.

С поверхности Солнца непрерывно исходит поток плазмы, называемый солнечным ветром. Солнечный ветер доходит до нашей планеты и проникает в атмосферу. Многовековыми наблюдениями установлено, что цикл солнечной активности, включающий минимум и максимум, длится от 7 до 17 лет, в среднем чуть более 11 лет. Максимумы активности Солнца наблюдались в 1928, 1937, 1947, 1957, 1968, 1979–1980, 1989–1990, 2001 гг. Минимумы — в 1923–1924, 1933–1934, 1944, 1953–1954, 1964, 1975–1976, 1985–1986, 1995–1996, 2007–2008 гг. По некоторым данным, максимум солнечной активности способствует возрастанию нервной возбудимости и социальной активности людей, что может увеличить риск и спровоцировать конфликты, войны и революции. Минимум солнечной активности несколько угнетает деятельность людей и проявляется, например, в некотором увеличении риска заболевания и смерти в пожилом возрасте. Можно пытаться анализировать связь событий на планете с приведенными колебаниями солнечной активности.

В лабораторных условиях и технологиях плазма образуется в электрическом разряде в газах, в процессах горения и взрыва, ис-

пользуется в плазменных ускорителях и магнитогидродинамических генераторах. Высокотемпературную плазму получают в установках для исследования возможного неисчерпаемого источника энергии будущего — осуществления *управляемого термоядерного синтеза*. В связи с этим отметим еще одно важное свойство плазмы: ее можно удерживать от выброса на стенки реактора с помощью магнитного поля, закручивающего траектории заряженных частиц.

## 22. Магнитное поле тока

### 22.1. Магнитное поле тока и его проявления. Вектор магнитной индукции и напряженности поля

Магнитные явления обнаружены и изучались издавна. Сначала люди обнаружили естественные магниты и их взаимодействие между собой и с магнитным полем Земли. Уже несколько столетий магнитный компас применяется для навигации, помогая ориентироваться на местности и особенно в океанических просторах. Для описания магнитных явлений было введено (по аналогии с электрическим полем) понятие *магнитного поля*. Прорыв в экспериментальном исследовании магнитных полей произошел в XIX в. Было установлено, что движущиеся заряды создают магнитное поле, а магнитное поле действует на движущиеся заряды. Французский физик Андре Мари Ампер в опытах в 1820 г. детально изучил взаимодействие двух параллельных токов. Ампер догадался, что этот процесс аналогичен отклонению стрелки компаса, просто в компасе все определяется микротоками в атомном масштабе.

Происхождение магнитного поля Земли предположительно связывают с протеканием токов в жидком металлическом ядре планеты. Токи создают магнитные поля, магнитные поля создают токи, причем в условиях естественной случайной асимметрии движений этот процесс в соответствии с теорией гидромагнитного динамо может оказаться

при высоких температурах ядра (порядка нескольких тысяч кельвинов) самоподдерживающимся на достаточно интенсивном уровне.

Существенно, что Земля не является абсолютно стабильным и идеальным механическим и магнитным объектом и ее механический и магнитный моменты меняются со временем. Высказываются гипотезы о том, что механический момент может инвертировать свое направление на противоположное (подобно известному в механике волчку Томпсона, представляющему собой шарик со срезанной макушкой, к которой прикреплена ручка волчка).

Исследования остаточной намагниченности горных пород свидетельствуют о многократных в прошлом инверсиях магнитного поля Земли — сменах полюсов. За последнее столетие магнитные полюса переместились примерно на тысячу километров — в среднем на 10 км в год. Однако скорость дрейфа северного полюса в последние годы увеличилась до 60 км в год. При этом южный магнитный полюс вышел в Индийский океан, а северный магнитный полюс сместился в сторону Восточно-Сибирской магнитной аномалии. Этот процесс может в ближайшие десятилетия привести к очередной инверсии полюсов. Такая инверсия опасна тем, что должна привести к временному резкому падению магнитного поля Земли, защищающего жизнь на планете от космической радиации.

В последнее время вырос интерес к исследованиям естественных и искусственных магнитных полей. В частности, была выявлена четкая взаимосвязь электрических и магнитных полей. Электрическое и магнитное поля по сути представляют лишь частные состояния электромагнитного поля. *Электромагнитное поле* и его наличие определяется косвенно по воздействию на пробный заряд, вносимый в поле. Сила, действующая на заряд в электромагнитном поле, в общем случае состоит из двух слагаемых. Первое из них не зависит от скорости движения заряда и описывает электрическое взаимодействие. Второе слагаемое зависит от скорости движения заряда. Оно обращается в ноль, если скорость заряда равна нулю. Это слагаемое описывает магнитное взаимодействие. В общем случае электромагнитное поле включает, как и сила, обе составляющие.

Долгое время считалось, что электрическое и магнитное поля — равноправные физические явления и достаточно симметрично входят в физические законы. Однако электрические заряды существуют повсеместно, а магнитные заряды так и не обнаружены. К тому же с точки зрения преобразований Галилея взаимодействие не должно пропадать при переходе из одной инерциальной системы в другую, в частности в систему, связанную с зарядом. Подсказку для решения этого противоречия дало то, что законы преобразования электромагнитного поля при переходе из одной системы в другую похожи на релятивистские преобразования Лоренца, хотя и несколько сложнее. Более того, вид преобразований электромагнитного поля дал в свое время мощный толчок теории относительности. Был сделан вывод о релятивистском электрическом (точнее, электродинамическом) происхождении магнитного поля. Электромагнитное поле с точки зрения логики правильней называть электродинамическим. Магнитное поле можно рассматривать как одну из форм проявления электрического поля, возникающую как релятивистский (точнее, динамический) эффект.

С точки зрения теории относительности проводник с током уже не может считаться электронейтральным. Расстояние между движущимися электронами претерпевает релятивистское сокращение по сравнению с расстоянием между неподвижными ионами, и концентрация движущихся электронов начинает превышать концентрацию неподвижных ионов. Таким образом, даже между первоначально электронейтральными проводниками с током может действовать кулоновское взаимодействие. Впрочем, это упрощенная модель носит иллюстрационный характер и не учитывает ряда существенных обстоятельств.

Все же в описании магнитного и электрического полей немало аналогов. Аналогом напряженности электрического поля является магнитная индукция  $B$  магнитного поля — силовая характеристика магнитного поля, характеризующая взаимодействие поля с током или магнитоактивным веществом. В свою очередь, аналогом электрического смещения является напряженность  $H$  магнитного поля, не зависящая от магнитных свойств среды. Следует обратить здесь внимание на терминологическую путаницу с напряженностями,

имеющую исторический характер. К тому же аналогия носит условный характер и требует внимательности при применении. Так, магнитная индукция связана с напряженностью формулой

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (22.1)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость среды, показывающая, во сколько раз магнитное поле макротокков усиливается за счет поля микротокков среды;

$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$  Гн/м — магнитная постоянная. Здесь генри (Гн) — единица индуктивности. В системе единиц СИ магнитная индукция измеряется в теслах (Тл), а напряженность магнитного поля — в амперах на метр (А/м).

Магнитное поле (как и электрическое) является силовым, так что каждой точке пространства сопоставляется вектор силы, действующей на пробную частицу. Поэтому по аналогии с электрическим полем его можно отобразить с помощью *линий магнитной индукции*. Вектор магнитной индукции направлен по касательной к линии магнитной индукции, и густота линий магнитной индукции пропорциональна модулю вектора. Отличием линий магнитной индукции является то, что они замкнуты, поскольку в природе нет магнитных зарядов. Так, если разделить магнит с двумя полюсами на две части, то каждая из этих частей все равно будет иметь два полюса — в отличие от электрического диполя, состоящего из положительного и отрицательного зарядов.

Приведем теперь основные уравнения, описывающие магнитные поля. При этом будем опираться в первую очередь на опытные данные.

Начнем с регистрации магнитного поля. Напомним, что наличие и величину электрического поля определяют по силе, действующей на пробный заряд. Аналогично *наличие и величину магнитного поля определяют по моменту сил, действующему на небольшую рамку с током*. (Такую рамку по аналогии с электрическим диполем называют *магнитным диполем*). При этом момент сил  $\vec{M}$  равен векторному произведению *магнитного момента*  $\vec{p}_m$  рамки на магнитную индукцию:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]. \quad (22.2)$$

Здесь магнитный момент рамки определяется током  $I$  в рамке и ее площадью  $S$ :

$$p_m = IS. \quad (22.3)$$

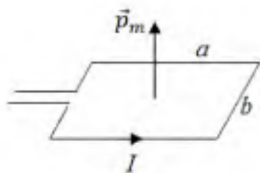


Рис. 22.1

Направление вектора магнитного момента определяется правилом правого винта, головка которого вращается по направлению тока рамки (рис. 22.1). Для прямоугольной рамки длиной  $a$  и шириной  $b$  имеем  $S = ab$ . Магнитный момент является важным параметром не только рамки с током, но и протонов, нейтронов, электронов, определяя поведение этих и других частиц в магнитном поле.

Максимальный момент сил имеет место, когда вектор магнитного момента перпендикулярен вектору магнитной индукции:

$$M_{\max} = p_m B, \quad (22.4)$$

откуда

$$B = M_{\max} / p_m. \quad (22.5)$$

Отметим, что в соответствии с (22.2) направление вектора магнитной индукции совпадает с направлением вектора магнитного момента в положении равновесия рамки (когда момент сил равен нулю).

## 22.2. Закон Био-Савара-Лапласа и его применение к расчету магнитных полей

*Закон Био-Савара-Лапласа* позволяет рассчитать магнитную индукцию (и напряженность магнитного поля) проводника с током:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (22.6)$$

где  $d\vec{l}$  — вектор элемента проводника с током, направленный в сторону протекания тока;

$\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный от элемента  $d\vec{l}$  к точке вычисления индукции.

Такое векторное произведение отвечает правилу правого винта: если острие винта задает направление тока, то направление вращения головки винта дает направление магнитной индукции.

В скалярном виде закон Био-Савара-Лапласа имеет вид

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl \sin\alpha}{r^2}, \quad (22.7)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

Закон Био-Савара-Лапласа применительно к магнитному полю в определенной мере является аналогом закона Кулона электростатики.

Для магнитного поля (как и для электрического) справедлив принцип суперпозиции: магнитная индукция поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме индукций отдельных источников. Этот принцип позволяет путем интегрирования (22.6) рассчитать поля от токов произвольной конфигурации.

Найдем магнитное поле прямого тока — бесконечного прямолинейного проводника с током. Будем искать поле в произвольной точке  $D$  (рис. 22.2), удаленной на расстояние  $R$  от проводника. Рассмотрим сначала вклад элемента проводника  $d\vec{l}$ , удаленного от точки  $D$  на расстояние  $r$ . Из определения векторного произведения и (22.6) следует, что векторы  $d\vec{B}$  от этого (и любого другого) элемента имеют одинаковое направление — перпендикулярно плоскости рисунка. Это означает, что интегрирование уравнения закона Био-Савара-Лапласа можно выполнять в скалярном виде. Из рис. 22.2 видно, что

$$r = \frac{R}{\sin\alpha}; \quad (22.8)$$

$$dl = \frac{r d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{R d\alpha}{\sin^2\alpha}. \quad (22.9)$$

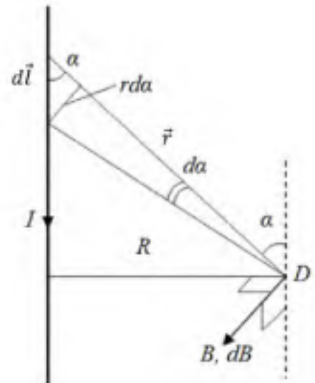


Рис. 22.2

Подставив эти выражения в закон Био-Савара-Лапласа (22.7), получим

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I \sin \alpha d\alpha}{4\pi R}, \quad (22.10)$$

откуда интегрирование по бесконечному проводнику (по углу  $\alpha$  в пределах от 0 до  $\pi$ ) дает

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi R}. \quad (22.11)$$

Таким образом, магнитная индукция магнитного поля прямого тока

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi R}. \quad (22.12)$$

Следовательно, напряженность магнитного поля прямого тока

$$H = \frac{I}{2\pi R}. \quad (22.13)$$

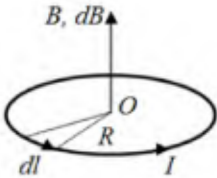


Рис. 22.3

Найдем теперь магнитное поле в центре кругового тока (рис. 22.3). Вклад произвольного элемента проводника  $d\vec{l}$  (из определения векторного произведения и (22.6)) в вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости тока и равен:

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I dl}{4\pi R^2}. \quad (22.14)$$

Поэтому, интегрируя это выражение в скалярном виде по длине окружности, получим

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}. \quad (22.15)$$

Таким образом, магнитная индукция магнитного поля в центре кругового тока

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}. \quad (22.16)$$

Решение этой задачи также описывает поле вращающегося по окружности заряда.

### 22.3. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля. Расчет поля соленоида и тороида

Построим картину линий напряженности магнитного поля вокруг бесконечного прямолинейного проводника с током (рис. 22.4). По аналогии с циркуляцией вектора напряженности электростатического поля (17.7) введем понятие циркуляции вектора напряженности магнитного поля:

$$\oint H_i dl = \oint \vec{H} d\vec{l}. \quad (22.17)$$

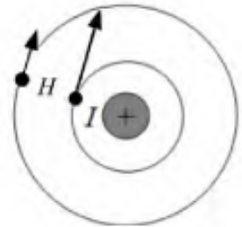


Рис. 22.4

Для простоты сначала в качестве контура выберем окружность, совпадающую с одной из линий напряженности магнитного поля. В соответствии с (22.13) напряженность на этой окружности является константой. А в соответствии с рис. 22.4 вектор напряженности направлен по касательной к окружности. Эти соображения позволяют вычислить циркуляцию:

$$\oint H_i dl = \oint H dl = \frac{I}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dl = I. \quad (22.18)$$

Принцип суперпозиции магнитных полей и рассуждения, аналогичные предпринятым в разделе о циркуляции вектора напряженности электростатического поля, позволяют обобщить полученное выражение на несколько токов и произвольный контур:

$$\oint H_i dl = \sum_i I_i. \quad (22.19)$$

Это и есть теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля: циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром.

Аналогичным образом домножением уравнения (22.19) на  $\mu_0\mu$  получается *теорема о циркуляции вектора магнитной индукции*

$$\oint B_l dl = \mu_0\mu \sum_i I_i. \quad (22.20)$$

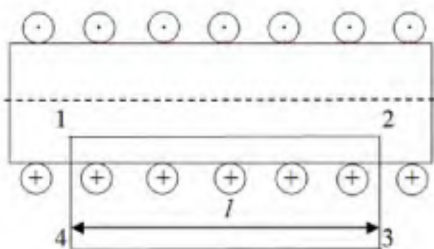


Рис. 22.5

Искусство применения теоремы о циркуляции состоит в выборе удобного для расчета контура.

Применим теорему о циркуляции для вычисления напряженности магнитного поля длинного соленоида с током  $I$  (рис. 22.5). *Соленоид* — это провод, равномерно навитый на

цилиндрический каркас. Будем считать, что диаметр каркаса много меньше длины каркаса, а шаг плотной намотки (расстояние между витками) много меньше диаметра каркаса. При этих условиях поле внутри соленоида, как будет видно из результата, много больше поля вне соленоида и достаточно однородно. (Заметим, что поле вне соленоида можно определить по формуле для магнитного поля прямого тока (22.13).) Из соображений симметрии поле внутри соленоида направлено вдаль оси соленоида. Пусть плотность намотки витков (количество витков на единицу длины каркаса) равна  $n$  витков на метр.

В соответствии с рис. 22.5 выберем прямоугольный контур, у которого малые (по сравнению с большими сторонами длиной  $l$ ) стороны 2–3 и 4–1 в точке протыкания каркаса перпендикулярны каркасу, большая сторона 1–2 находится внутри каркаса, большая сторона 3–4 — вне каркаса. В такой ситуации в циркуляции, состоящей из 4 интегралов по отрезкам, доминирует составляющая по отрезку 1–2. Составляющими по отрезкам 2–3 и 4–1 можно пренебречь вследствие малости отрезков. Составляющей по отрезку 3–4 можно пренебречь вследствие перпендикулярности (приблизительно) поля отрезку и малости этого поля. Внутрь контура попадает  $nl$  витков с током. Таким образом, циркуляция сводится к отрезку 1–2,

но в соответствии с (22.19) определяется полным током  $nIl$  внутри контура:

$$Hl = nIl. \quad (22.21)$$

Отсюда напряженность магнитного поля внутри длинного соленоида

$$H = nI. \quad (22.22)$$

Отметим, что это поле достаточно однородно по диаметру каркаса, ведь стороны 2–3 и 4–1 малы лишь по сравнению с длиной каркаса, но могут быть сравнимы с диаметром каркаса и углубляться внутрь каркаса на любое расстояние.

Таким образом, магнитная индукция внутри длинного соленоида

$$B = \mu_0 \mu nI. \quad (22.23)$$

Вычислим теперь магнитное поле тороида. *Toroid* — это провод, навитый на тор (бублик). Его можно получить из соленоида, изогнув его в кольцевую катушку. Поле тороида похоже на поле соленоида, и линии напряженности тороида параллельны оси тороида. Покажем это, выбрав в качестве контура для вычисления циркуляции окружность радиуса  $r$  (рис. 22.6) внутри тора с центром в центре тороида. По теореме о циркуляции для тороида с полным числом витков провода  $N$

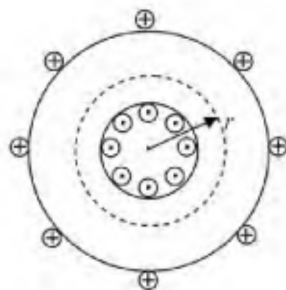


Рис. 22.6

$$B2\pi r = \mu_0 \mu NI, \quad (22.24)$$

откуда магнитное поле внутри тороида

$$B = \mu_0 \mu NI / (2\pi r). \quad (22.25)$$

Если контур проходит вне тороида, то внутри него токи отсутствуют:

$$B2\pi r = 0, \quad (22.26)$$

и поле (из теоремы о циркуляции) равно нулю. Таким образом, магнитное поле тороида локализовано внутри и спадает него по мере удаления от центра симметрии.

Если тороид тонкий и его радиус  $R \approx r$  много больше радиуса витка, поле внутри тороида (22.25) определяется формулой, аналогичной формуле для поля соленоида (22.23):

$$B = \mu_0 \mu N I / (2\pi R) = \mu_0 \mu n I. \quad (22.27)$$

## 22.4. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах

Вследствие отсутствия магнитных зарядов линии магнитной индукции являются замкнутыми — в отличие от линий напряженности электрического поля, которые могут начинаться и заканчиваться на электрических зарядах. Мы это уже видели на примере магнитных полей от токов различных конфигураций. Линии магнитной индукции природных магнитов не заканчиваются на их поверхности, а проходят внутрь магнита и в конечном счете также замкнуты.

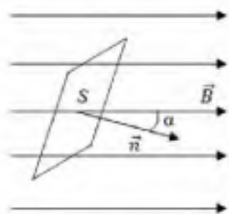


Рис. 22.7

Выделим в области однородного поля  $\vec{B}$  (рис. 22.7) некоторую площадку  $S$  с единичным вектором нормали  $\vec{n}$  к площадке. По аналогии с потоком вектора напряженности электрического поля введем *определение потока вектора магнитной индукции (магнитный поток)*:

$$N_B = B S \cos \alpha = B_n S = \vec{B} \vec{S}, \quad (22.28)$$

где  $\vec{n}$  — нормаль (в скалярном произведении направление вектора  $\vec{S}$  определяется нормалью  $\vec{n}$ );

$B_n$  — проекция вектора магнитной индукции на направление нормали  $\vec{n}$ .

Поток вектора магнитной индукции фактически равен (или пропорционален) числу силовых линий, проходящих через выбранную площадку.

Несложно обобщить определение на неоднородное поле и произвольную поверхность. В этом случае первоначально определяется поток через бесконечно малую площадку  $d\vec{S}$ :

$$dN_B = B dS \cos\alpha = B_n dS = \vec{B} d\vec{S}, \quad (22.29)$$

а затем полный поток вектора магнитной индукции находится через интеграл по поверхности:

$$N_B = \int B_n dS. \quad (22.30)$$

Аналогичным образом можно определить поток вектора напряженности магнитного поля:

$$N_H = \int H_n dS. \quad (22.31)$$

Поток вектора магнитной индукции измеряется в веберах (Вб),  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл}\cdot\text{м}^2$ . Поток напряженности магнитного поля измеряется в Ам.

Вследствие замкнутости линий магнитной индукции каждая линия может проходить через замкнутую поверхность обязательно четное число раз. Каждому входу линии соответствует выход, и суммарный поток вектора магнитной индукции равен нулю. Таким образом, выполняется *теорема Гаусса в интегральной форме для магнитного поля: поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:*

$$\oint B_n dS = 0. \quad (22.32)$$

По аналогии с выводом для электрического поля теоремы Гаусса в дифференциальной форме (16.26) получим *теорему Гаусса для магнитного поля в дифференциальной форме:*

$$\text{div}\vec{B} = 0. \quad (22.33)$$

Это равенство математически выражает факт отсутствия магнитных зарядов. Силовое поле с нулевой дивергенцией в математике называется *соленоидальным*.

## 22.5. Действие магнитного поля на токи. Закон Ампера

Как уже отмечалось выше, основное проявление магнитного поля состоит в его силовом действии на электрические токи и движущиеся заряды. А. Ампер в результате обобщения экспериментальных данных установил, от чего зависит величина этого действия. По *закону Ампера* на элемент проводника  $d\vec{l}$  с током  $I$ , помещенный в магнитное поле  $\vec{B}$ , действует *сила Ампера*

$$dF = IB \, dl \sin \alpha, \quad (22.34)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$ ,  
или в векторном виде

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (22.35)$$

Направление действия силы можно определить и по *правилу левой руки*: если в ладонь левой руки входит вектор  $\vec{B}$ , а четыре пальца показывают направление тока, то отогнутый большой палец показывает направление силы.

Сила, действующая на прямолинейный проводник длины  $l$ , находится интегрированием (22.34):

$$F = IBl \sin \alpha. \quad (22.36)$$

Законы Ампера и Био-Савара-Лапласа позволяют *найти силу взаимодействия двух параллельных токов*, находящихся на расстоянии  $R$  друг от друга. Магнитное поле первого тока  $B_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1}{R}$  (направление  $B_1$  определяется по правилу правого винта) действует на участок  $dl$  второго тока (направление  $dF_1$  вычисляется по правилу левой руки) с силой:

$$dF_1 = I_2 B_1 dl = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (22.37)$$

В соответствии с изложенными правилами два параллельных тока одинакового направления притягиваются друг к другу, противоположного — отталкиваются.

Отметим, что связывающая магнитный момент рамки с током и вращающий момент сил формула (22.2)  $\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]$  получается путем аккуратного трехмерного применения закона Ампера.

## 22.6. Действие магнитного поля на движущиеся заряды. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в однородном и неоднородном магнитном полях

Силу Ампера, действующую на проводник с током в магнитном поле, можно рассматривать как сумму сил, действующих на отдельные движущиеся заряды (сумму *сил Лоренца*  $f$ ). Выразив в законе Ампера ток через плотность тока  $j$ , сечение проводника  $S$ , длину проводника  $l$ , концентрацию носителей тока  $n$ , скорость направленного движения носителей тока  $v$  и заряд носителя тока  $q$  ( $I = jS = qnvS$ ), получим из (22.36):

$$F = Il \sin \alpha = qnvSl \sin \alpha = NqBv \sin \alpha; \quad (22.38)$$

$$N = nSl, \quad (22.39)$$

где  $N$  — число движущихся зарядов в проводнике.

Отсюда сила Лоренца, действующая на движущийся заряд в магнитном поле, равна:

$$f = \frac{F}{N} = qvB \sin \alpha. \quad (22.40)$$

В векторной форме сила Лоренца

$$\vec{f} = q[\vec{v} \vec{B}]. \quad (22.41)$$

Направление силы Лоренца для положительного заряда совпадает с направлением векторного произведения, для отрицательного

заряда — противоположно ему. Определить его, как и направление силы Ампера, можно по правилу левой руки. Направление силы Лоренца перпендикулярно направлению как скорости заряда, так и магнитной индукции. Как известно из механики, перпендикулярная направлению движения сила обеспечивает нормальное ускорение, не меняет модуля скорости и не совершает работы. Она лишь меняет направление движения. Если скорость заряда параллельна направлению магнитной индукции (или равна нулю), то сила Лоренца равна нулю.

Если заряженная частица массы  $m$  влетает в магнитное поле перпендикулярно направлению магнитной индукции ( $\alpha = 90^\circ$ ), то она будет двигаться по окружности радиуса  $r$ , и для нормального ускорения  $a_n = \frac{v^2}{r}$  имеем

$$a_n = \frac{f}{m} = \frac{qvB}{m} = \frac{v^2}{r}. \quad (22.42)$$

Отсюда можно найти радиус окружности:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (22.43)$$

и период обращения по окружности:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (22.44)$$

Заметим, что период обращения по окружности не зависит от скорости частицы, поскольку с ростом скорости одновременно увеличивается и размер орбиты.

В общем случае произвольного угла между направлениями скорости и магнитной индукции частица участвует в двух движениях. Движение вдоль поля является равномерным прямолинейным с начальной скоростью

$$v_\tau = v \cos\alpha. \quad (22.45)$$

Движение в плоскости, перпендикулярной полю, является равномерным по окружности со скоростью

$$v_n = v \sin\alpha. \quad (22.46)$$

При этом по аналогии с (22.43) радиус окружности

$$r = \frac{mv \sin \alpha}{qB}. \quad (22.47)$$

Результирующая траектория, возникающая в результате сложения таких движений, является спиралью (рис. 22.8). Радиус спирали определяется формулой (22.47). Шаг спирали

$$h = v_r T = vT \cos \alpha. \quad (22.48)$$

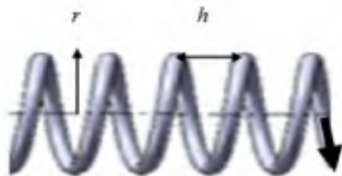


Рис. 22.8

Рассмотрим теперь особенности движения заряженной частицы в неоднородном магнитном поле. Если, например, поле постепенно нарастает по мере продвижения частицы, то радиус и шаг спирали должны постепенно меняться (уменьшаться). Такая система позволяет фокусировать пучки заряженных частиц.

## 23. Магнитное поле в веществе

### 23.1. Магнитный момент электронов и атомов. Намагниченность

При помещении во внешнее поле вещество может реагировать на это поле и само становиться источником магнитного поля (намагничиваться). Такие вещества называют *магнетиками* (сравните с поведением диэлектриков в электрическом поле.) По магнитным свойствам магнетики подразделяются на три основные группы: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Магнитные свойства вещества определяются магнитными свойствами электронов и атомов. (В дальнейшем, говоря о магнитных свойствах, будем иметь в виду в основном диамагнетики и парамагнетики, а свойства небольшой группы ферромагнетиков иногда будем оговаривать особо.)

Рассмотрим сначала поведение электронов вещества в магнитном поле. Будем считать для простоты, что электрон вращается в атоме вокруг ядра со скоростью  $v$  по орбите радиуса  $r$ . Такое движение, которое характеризуется орбитальным моментом импульса, по сути является круговым током, который характеризуется соответственно орбитальным магнитным моментом  $p_{орб}$ . Исходя из периода обращения по окружности  $T = \frac{2\pi r}{v}$ , имеем, что произвольную точку орбиты электрон в единицу времени пересекает  $\frac{v}{2\pi r}$  раз. Поэтому круговой ток, равный прошедшему через точку в единицу времени заряду, определяется выражением

$$I = \frac{ev}{2\pi r}. \quad (23.1)$$

Следовательно орбитальный магнитный момент электрона из (22.3) равен:

$$p_{орб} = IS = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}. \quad (23.2)$$

Помимо орбитального момента импульса электрон имеет также собственный момент импульса, называемый *спином*. Спин описывается законами квантовой физики и является неотъемлемым свойством электрона, как масса и заряд. Собственному моменту импульса соответствует собственный (спиновый) магнитный момент электрона  $p_{сп}$ .

Магнитным моментом обладают и ядра атомов, однако эти моменты в тысячи раз меньше моментов электронов, и ими можно обычно пренебречь. В результате суммарный магнитный момент магнетика  $\vec{P}_m$  равен векторной сумме орбитальных и спиновых магнитных моментов электронов магнетика:

$$\vec{P}_m = \sum_i \vec{p}_{орби} + \sum_i \vec{p}_{спи}. \quad (23.3)$$

Внешнее магнитное поле действует на ориентацию частиц вещества, имеющих магнитные моменты (и микротоков), в результате чего вещество намагничивается. Характеристикой этого процесса является вектор намагниченности  $\vec{J}$ , равный отношению суммарного магнитного момента частиц магнетика к объему магнетика:

$$\vec{j} = \frac{\vec{P}_m}{\Delta V}. \quad (23.4)$$

Намагниченность измеряется в А/м.

Если магнетик поместить во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$ , то в результате намагничивания возникнет внутреннее поле  $\vec{B}_1$  микротоков, так что результирующее поле

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1. \quad (23.5)$$

Рассмотрим магнетик в виде цилиндра с основанием площадью  $S$  и высотой  $l$ , помещенный в однородное внешнее магнитное поле индукцией  $B_0$ . Такое поле может быть создано, например, с помощью соленоида. Ориентация микротоков во внешнем поле становится упорядоченной. При этом поле микротоков диамагнетиков направлено противоположно внешнему полю, а поле микротоков парамагнетиков совпадает по направлению с внешним полем.

В любом сечении цилиндра упорядоченность микротоков приводит к следующему эффекту (рис. 23.1). Упорядоченные микротоки внутри магнетика компенсируются соседними микротоками, а вдоль боковой поверхности текут нескомпенсированные поверхностные микротоки. Направление этих нескомпенсированных микротоков параллельно (или антипараллельно) току, текущему в соленоиде, создающем внешнее поле. В целом же они дают суммарный внутренний ток  $I_1$ . Этот *поверхностный ток* создает внутреннее поле  $\vec{B}_1$  микротоков, причем связь тока и поля может быть описана формулой (22.23) для поля соленоида:

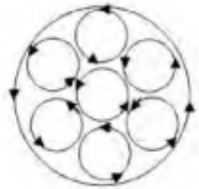


Рис. 23.1

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{l}. \quad (23.6)$$

Здесь магнитная проницаемость  $\mu$  принята равной единице, поскольку роль среды учтена введением поверхностного тока; плотность намотки витков соленоида соответствует одному на всю длину

соленоида  $l$ :  $n = 1/l$ . При этом магнитный момент поверхностного тока определяется намагниченностью всего магнетика:

$$Pm = I_1 S. \quad (23.7)$$

Из двух последних формул с учетом определения намагниченности (23.4)  $\vec{j} = \frac{\vec{P}_m}{\Delta V}$  следует

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{l} = \mu_0 \frac{Pm}{lS} = \mu_0 J. \quad (23.8)$$

Или в векторном виде:

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}. \quad (23.9)$$

Тогда из (23.5) имеем:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}). \quad (23.10)$$

Опыт исследования зависимости намагниченности от напряженности внешнего поля показывает, что обычно поле можно считать несильным и в разложении в ряд Тейлора достаточно ограничиться линейным членом

$$\vec{J} = \chi \vec{H} \quad (23.11)$$

где безразмерный коэффициент пропорциональности  $\chi$  — *магнитная восприимчивость* вещества.

С учетом этого

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}. \quad (23.12)$$

Сравнивая последнюю формулу для магнитной индукции с известной формулой (22.1)  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ , получим связь магнитной проницаемости и магнитной восприимчивости:

$$\mu = 1 + \chi. \quad (23.13)$$

Отметим, что значения магнитной восприимчивости для диамагнетиков и парамагнетиков малы и составляют обычно по модулю

$10^{-7}$ – $10^{-6}$  (для диамагнетиков) и  $10^{-7}$ – $10^{-4}$  (для парамагнетиков). При этом для диамагнетиков  $\chi < 0$  и  $\mu < 1$ , для парамагнетиков  $\chi > 0$  и  $\mu > 1$ .

## 23.2. Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики

Разные вещества намагничиваются по-разному. Большая часть веществ намагничивается слабо — это *диамагнетики* и *парамагнетики*. Некоторые вещества в обычных условиях (при умеренных температурах) способны намагничиваться очень сильно — это *ферромагнетики*.

У некоторых атомов результирующий магнитный момент равен нулю. Вещества, состоящие из таких атомов, и являются диамагнетиками. К ним, например, относятся азот, вода, медь, серебро, поваренная соль  $NaCl$ , диоксид кремния  $SiO_2$ . Вещества же, у которых результирующий магнитный момент атома отличен от нуля, относятся к парамагнетикам. Примерами парамагнетиков являются кислород, алюминий, платина.

Начнем с описания диамагнетиков, атомы которых не имеют собственных магнитных моментов и собственных магнитных полей. Однако эти моменты и поля возникают в диамагнетиках при наложении внешнего магнитного поля. Рассмотрим модель диамагнитного атома, в котором два электрона вращаются на одной орбите радиуса  $r$  в противоположных направлениях с угловой скоростью (в отсутствие поля)  $\omega$ . Суммарный магнитный момент при этом равен нулю — в отличие от атома с одним электроном. Центробежная сила, определяемая притяжением электрона к ядру, выражается через массу электрона  $m$  и центробежное ускорение в отсутствие поля по формуле

$$F = m\omega^2 r. \quad (23.14)$$

Пусть внешнее поле для простоты направлено перпендикулярно орбите (рис. 23.2).



Рис. 23.2

Действующая на первый электрон при наложении внешнего поля сила Лоренца по правилу левой руки (с учетом отрицательного заряда электрона) уменьшает центростремительную силу, что ведет к уменьшению угловой скорости электрона (и его магнитного момента).

При этом появятся небольшие изменения угловой скорости  $\Delta\omega$  и силы  $\Delta F$ :

$$\Delta F = evB = e\omega rB. \quad (23.15)$$

Здесь в поправочной силе Лоренца учтена связь скорости электрона  $v$  с угловой скоростью  $\omega$ . С учетом поправок уравнение (23.14) при наложении внешнего поля приобретает вид

$$F - evB = m(\omega - \Delta\omega)^2 r. \quad (23.16)$$

Раскрыв скобки, воспользовавшись равенством (23.14) и пренебрегая квадратичным по  $\Delta\omega$  членом, получим

$$e\omega rB = 2m\omega\Delta\omega r, \quad (23.17)$$

откуда изменение угловой скорости первого электрона равно:

$$\Delta\omega = \frac{eB}{2m}. \quad (23.18)$$

Второй электрон вращается в противоположном направлении. Поэтому действующая на него при наложении внешнего поля сила Лоренца по правилу левой руки увеличивает центростремительную силу, что ведет к увеличению угловой скорости электрона (и его магнитного момента). Несложно убедиться, повторив расчет, что изменение угловой скорости второго электрона равно изменению угловой скорости первого электрона.

Если принять направление магнитной индукции за положительное, то направление магнитного момента первого электрона положительно, а направление магнитного момента второго электрона отрицательно. При этом как уменьшение положительного момента, так и увеличение отрицательного момента дают отрицательное при-

ращение магнитного момента атома. Таким образом, атом с первоначально нулевым магнитным моментом приобрел момент, частично компенсирующий внешнее магнитное поле. В этом суть *прецессионной теории диамагнетизма*.

Вращающиеся электроны, реагирующие на внешнее магнитное поле, есть во всех атомах. Поэтому диамагнитный эффект присущ всем веществам. Но в парамагнетиках и тем более ферромагнетиках диамагнитный эффект ослабления внешнего поля обычно перебивается более сильным эффектом усиления внешнего поля.

Перейдем теперь к описанию парамагнетизма. У парамагнетиков атомы уже и в отсутствие поля имеют магнитные моменты. Но без поля они вследствие теплового движения ориентированы беспорядочно, и результирующее поле равно нулю. При наложении внешнего поля на микротоки вещества начинает действовать вращающий момент, стремящийся ориентировать магнитные моменты атомов вдоль магнитного поля. В результате внешнее поле несколько усиливается внутренним полем парамагнетика. Как и в случае диамагнетика, намагничивание парамагнетика происходит лишь при наличии внешнего поля.

В неоднородном магнитном поле парамагнетики втягиваются в область сильного поля (притягиваются к магниту). Этим их можно отличить от диамагнетиков, которые выталкиваются из поля.

Наконец, обратимся к особому классу веществ — ферромагнетикам, для которых значение магнитной восприимчивости может составлять десятки и сотни тысяч единиц, а зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля существенно нелинейная и обладает свойством памяти. К ферромагнетикам относятся железо, кобальт, никель, редкоземельные металлы, а также многочисленные сплавы и интерметаллические соединения этих веществ. Ферромагнетизм имеет широкое практическое применение.

Остановимся теперь подробнее на особенностях ферромагнетиков. Главной их особенностью является то, что они очень сильно намагничиваются, причем объяснение этому сугубо квантовое и не может быть дано в рамках классической физики. Для ферромагнетиков характерен остаточный магнетизм (память), проявляющийся в

сохранении намагниченности после снятия поля, т. е. ферромагнетик сам становится магнитом.

Существенно нелинейная зависимость намагниченности ферромагнетиков от напряженности магнитного поля иллюстрируется магнитным гистерезисом (рис. 23.3). Намагниченность ферромагнетика зависит от его предыстории. При достаточно большой напряженности внешнего поля наступает насыщение намагниченности. Если после этого уменьшать напряженность, то кривая размагничивания не повторяет кривую намагничивания, первая пройдет выше

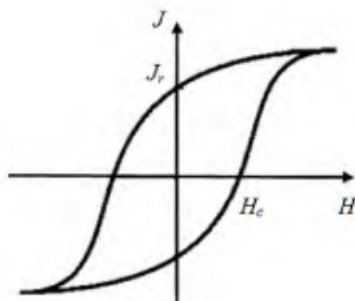


Рис. 23.3

второй. В необратимости намагничивания и размагничивания и заключается явление гистерезиса. Величина  $J_r$  характеризует остаточную намагниченность. Если изменить направление напряженности и постепенно ее увеличивать, то при некотором значении  $H_c$  ферромагнетик полностью размагнитится. При изменении напряженности сначала в одном, а затем в противоположном направлении, получим петлю гистерезиса.

У ферромагнетиков существует некоторая критическая температура (*температура Кюри*), выше которой вещество перестает быть ферромагнетиком и становится парамагнетиком. Для железа температура Кюри  $770\text{ }^{\circ}\text{C}$ , кобальта —  $1150\text{ }^{\circ}\text{C}$ , никеля —  $360\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Объяснение ферромагнетизма заключается в том, что спиновые магнитные моменты соседних атомов взаимодействуют и стремятся встать параллельно (или иногда антипараллельно) друг другу, причем тепловые столкновения атомов не в состоянии разрушить это взаимодействие.

При этом ферромагнетик разбивается на малые намагниченные до насыщения области размерами  $1\text{--}10\text{ }\mu\text{м}$ , называемые доменами. Относительно друг друга домены намагничены беспорядочно, так что в отсутствие поля суммарное поле ненамагниченного ферромагнетика оказывается равным нулю. Внешнее поле ведет к росту до-

менов, моменты которых ориентированы по полю, и уменьшению доменов, моменты которых ориентированы против поля. При малых полях этот процесс обратим, а при больших намагниченность сохраняется после снятия поля.

### 23.3. Условия на границе раздела двух магнетиков

Рассмотрим связь векторов магнитной индукции и напряженности магнитного поля на границе раздела двух магнетиков при отсутствии на границе макроточек. Воспользуемся методиками, использованными в задаче о преломлении линий электрического смещения и напряженности электрического поля на границе раздела двух диэлектриков. Как мы уже видели, на границе магнетика (а в общем случае — на границе раздела двух магнетиков) в поле возникает поверхностный микроток, который может приводить к разрыву полей.

Рассмотрим сначала соотношение между нормальными к поверхности раздела компонентами вектора магнитной индукции  $B_n$ . Воспользуемся теоремой Гаусса, выбрав в качестве гауссовой поверхности поверхность цилиндра (рис. 23.4). При этом основания цилиндра должны быть малы (чтобы считать поле константой), параллельны границе раздела и находиться в разных магнетиках, а высота цилиндра должна быть бесконечно малой — в том числе и по сравнению с основаниями. Такой выбор позволяет пренебречь потоком вектора магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра по сравнению с потоком через основания.

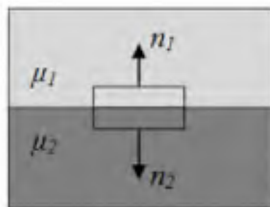


Рис. 23.4

Тогда из теоремы Гаусса следует, что потоки вектора магнитной индукции через основания равны и противоположны, т. е. один направлен наружу цилиндра, другой внутрь. Геометрически это означает, что потоки направлены в одну сторону:  $B_{n1}S = B_{n2}S$ . По-

сколько площади оснований цилиндра  $S$  равны, то получаем, что *нормальная компонента вектора магнитной индукции на границе раздела магнетиков остается непрерывной:*

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (23.19)$$

Выразив полученное соотношение через напряженность поля, получим, что *нормальная компонента вектора напряженности на границе раздела магнетиков претерпевает разрыв:*

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (23.20)$$

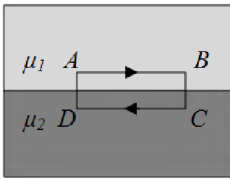


Рис. 23.5

Перейдем теперь к тангенциальным составляющим, соотношение которых удобно найти для вектора напряженности с помощью теоремы о циркуляции. Выделим вблизи границы раздела небольшой прямоугольный контур  $ABCD$  (рис. 23.5). Выберем стороны  $AB = CD = l$  так, что они параллельны границе раздела и находятся в разных магнетиках, а стороны  $BC$  и  $DA$

бесконечно малы по сравнению со сторонами  $BC$  и  $DA$ . Тогда, пренебрегая в теореме о циркуляции интегралами по бесконечно малым сторонам, получим  $H_{t2}l - H_{t1}l = 0$ , откуда следует, что *тангенциальная компонента вектора напряженности на границе раздела магнетиков остается непрерывной:*

$$H_{t2} = H_{t1}. \quad (23.21)$$

Выразив это соотношение через магнитную индукцию, получим, что *тангенциальная компонента вектора магнитной индукции на границе раздела магнетиков претерпевает разрыв:*

$$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (23.22)$$

Таким образом, мы получили, что векторы напряженности и магнитной индукции претерпевают преломление при переходе из одной среды в другую. По аналогии с преломлением электрического поля в диэлектриках имеем *закон преломления векторов напряженности магнитного поля и магнитной индукции:*

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (23.23)$$

где  $\alpha_1$  — угол падения;

$\alpha_2$  — угол преломления.

Формула показывает, что при переходе в магнетик с большей магнитной проницаемостью силовые линии напряженности и магнитной индукции удаляются от нормали.

## 24. Электромагнитная индукция

### 24.1. Основной закон электромагнитной индукции. Правило Ленца. Вихревое электрическое поле. Генераторы переменного тока

Двести лет назад было выяснено, что ток создает магнитное поле. Стало понятно, что есть определенная аналогия между действием электрического и магнитного полей. Поэтому в первой половине XIX в. пытались получить обратный эффект. Постоянное магнитное поле (постоянный магнит) не позволяет создать электрическое поле (и электрический ток), поскольку это нарушило бы закон сохранения энергии. Опытным путем было выяснено, что для возникновения магнитного поля требуется перемещение проводника в магнитном поле. Другой механизм возникновения магнитного поля связан с тем, что ток может возникать в неподвижном контуре при изменении поля. Оба механизма можно объяснить одним способом — с помощью электромагнитной индукции.

Электромагнитная индукция может быть описана с помощью закона сохранения энергии на частном примере. Рассмотрим прямоугольный контур с подвижной частью длиной  $l$  (рис. 24.1), помещенный в однородное магнитное поле магнитной индукции-

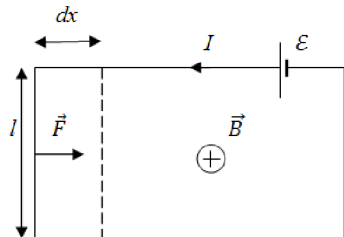


Рис. 24.1

ей  $B$ . Пусть вектор индукции перпендикулярен плоскости контура. При протекании в контуре тока  $I$  на движущуюся часть действует сила Ампера. При перемещении подвижной части под действием силы Ампера на расстояние  $dx$  меняется площадь контура и совершается работа

$$dA = Fdx = IBldx = IBdS = IdN_B, \quad (24.1)$$

где  $dN_B$  — пересеченный проводником магнитный поток.

Работа (и мощность) источника тока идет на нагрев и перемещение проводника:

$$\mathcal{E}Idt = I^2Rdt + IdN_B, \quad (24.2)$$

где  $R$  — полное сопротивление контура.

Отсюда после преобразований

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{dN_B}{dt}}{R}. \quad (24.3)$$

Сравнивая полученное уравнение с законом Ома для полной цепи, видим, что в числителе дроби наряду с ЭДС источника  $\mathcal{E}$  появилась дополнительная ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$ , возникающая в результате изменения магнитного потока, проходящего через контур:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{dN_B}{dt}. \quad (24.4)$$

Мы получили закон Фарадея (основной закон электромагнитной индукции): ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока, взятой с обратным знаком. Таким образом, явление электромагнитной индукции состоит в том, что любое изменение магнитного потока  $N_B$ , пронизывающего замкнутый контур, вызывает появление индукционного тока в контуре. При этом не важен механизм явления: поток может меняться как за счет изменения площади, так и за счет изменения магнитной индукции. Знак минус напоминает о *правиле Ленца*: индукционный ток имеет такое направление, чтобы создаваемое им магнитное поле препятствовало изменению магнитного потока.

Существенно, что в основном закон электромагнитной индукции не входят параметры контура. Поэтому логично предположить, что контур лишь фиксирует электрическое поле, возникающее при изменении магнитного поля. Это предположение подтверждается экспериментально.

Электромагнитная индукция служит причиной возникновения внутри металлов паразитных токов, называемых *вихревыми токами*, или *токами Фуко*. Природа вихревых токов индуктивная, и возникают они в соответствии с правилом Ленца. Вихревые токи появляются в проводниках, находящихся в переменном магнитном поле. Линии напряженности вихревых токов замкнуты. Следствием вихревых токов являются потери энергии на нагревание металла. Для уменьшения потерь железные сердечники устройств делают из отдельных пластин, изолированных друг от друга. В металлургии вихревые токи используются для плавки металлов в индукционных печах.

Явление электромагнитной индукции широко используется для преобразования механической энергии в энергию электрического тока с помощью генераторов переменного тока. Простейшим генератором переменного тока является проволочная рамка, вращающаяся равномерно с угловой скоростью  $\omega$  в однородном магнитном поле индукцией  $B$ . Поток магнитной индукции, пронизывающий рамку площадью  $S$ , равен:

$$N_B = BS \cos\alpha = BS \cos\omega t. \quad (24.5)$$

Здесь учтено, что угол между вектором индукции и нормалью к рамке линейно зависит при равномерном вращении рамки от времени. По закону электромагнитной индукции ЭДС, наводимая в рамке при ее вращении, равна:

$$\mathcal{E} = -\omega BS \sin\omega t. \quad (24.6)$$

## 24.2. Самоиндукция. Индуктивность соленоида

Рассмотрим еще несколько примеров проявления электромагнитной индукции.

Электрический ток в замкнутом контуре создает вокруг себя магнитное поле. Магнитная индукция этого поля по закону Био-Савара-Лапласа пропорциональна силе тока. Следовательно, создаваемый контуром и проходящий через контур магнитный поток, пропорциональный магнитной индукции, также пропорционален силе тока:

$$N_B = LI, \quad (24.7)$$

где  $L$  — коэффициент пропорциональности, называемый *индуктивностью контура*, или *коэффициентом самоиндукции*.

При изменении силы тока в контуре будет изменяться и магнитный поток, поэтому в контуре будет индуцироваться ЭДС самоиндукции, обусловленная изменением собственного магнитного поля:

$$\mathcal{E}_c = -\frac{dN_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (24.8)$$

Знак «минус» в соответствии с правилом Ленца показывает, что наличие индуктивности в контуре приводит к замедлению изменения тока в нем. Если ток в контуре возрастает, то ток самоиндукции тормозит это возрастание. Если ток в контуре убывает, то ток самоиндукции замедляет это убывание. Таким образом, индуктивность придает электрической цепи *электрическую инертность* — по аналогии с тем, что масса придает телу механическую инертность.

Единица индуктивности в системе СИ — *генри* (Гн).  $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А} = 1 \text{ В} \cdot \text{с/А}$ .

Когда нужна катушка с весьма малой индуктивностью, применяют *бифилярные обмотки*. Чтобы получить бифилярную обмотку, проволоку складывают вдвое и наматывают на каркас катушки. При такой намотке ток в двух соседних витках имеет противоположные направления, и суммарный магнитный поток в катушке близок к нулю.

Рассмотрим катушку из  $N$  последовательных витков. Если в одном витке катушки наводится ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_1$ , то наводимая во всей катушке ЭДС самоиндукции определяется правилом сложения ЭДС при последовательном соединении и будет в  $N$  раз больше:

$$\mathcal{E}_N = N\mathcal{E}_1 = -N \frac{dN_B}{dt} = -\frac{d(N_B N)}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (24.9)$$

Здесь введено понятие *потокосцепления*

$$\psi = N_B N. \quad (24.10)$$

Сопоставляя выражения (24.8) и (24.9), получим:

$$\psi = LI. \quad (24.11)$$

Рассчитаем для примера индуктивность соленоида с числом витков на единицу длины  $n = N/l$ . Потокосцепление соленоида с учетом формулы (22.23) для магнитной индукции внутри соленоида  $B = \mu_0 \mu n I$  равно:

$$\psi = N_B N = \mu_0 \mu n^2 I S l = \mu_0 \mu n^2 V I = LI. \quad (24.12)$$

Из последнего равенства получаем *индуктивность соленоида*:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (24.13)$$

где  $V = Sl$  — объем соленоида.

### 24.3. Взаимоиндукция

Если два контура расположены один возле другого и в одном из них изменяется сила тока, то это вызовет появление индуцированной ЭДС во втором контуре, и наоборот. Это явление называется *взаимоиндукцией*, а ЭДС, возникающая вследствие влияния контуров друг на друга, называют *ЭДС взаимной индукции*. Таким образом, явление взаимной индукции — это тоже одна из разновидностей электромагнитной индукции. Если в контуре 1 течет ток силой  $I_1$ , то проходящий через контур 2 магнитный поток, создаваемый этим током, пропорционален  $I_1$

$$N_{B21} = L_{21} I_1, \quad (24.14)$$

и в контуре 2 индуцируется ЭДС:

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{dN_{B21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad (24.15)$$

где  $L_{21}$  — коэффициент взаимной индукции, или взаимная индуктивность контуров.

Этот коэффициент зависит от геометрической формы, размеров, взаимного расположения контуров и магнитной проницаемости среды.

Аналогичным образом при протекании в контуре 2 тока силой  $I_2$  проходящий через контур 1 магнитный поток, создаваемый этим током, пропорционален  $I_2$ :

$$N_{B12} = L_{12}I_2, \quad (24.16)$$

и в контуре 1 индуцируется ЭДС

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{dN_{B12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (24.17)$$

Взаимная индуктивность в системе СИ (как и индуктивность) измеряется в генри (Гн).

Рассчитаем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник. Магнитная индукция, создаваемая первой катушкой в сердечнике, равна:

$$B_1 = \mu_0 \mu \frac{N_1 I_1}{l}, \quad (24.18)$$

где  $l$  — длина сердечника по средней линии.

Тогда магнитный поток через 1 виток второй катушки

$$N_{B2} = B_1 S = \mu_0 \mu \frac{N_1 I_1 S}{l}. \quad (24.19)$$

Теперь можно найти взаимную индуктивность:

$$L_{21} = N_{B2} N_2 / I_1 = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2 S}{l}. \quad (24.20)$$

Аналогичным образом рассчитывается  $L_{12}$ , причем очевидно, что

$$L_{21} = L_{12}. \quad (24.21)$$

И в общем случае выражения для потоков рассчитываются с помощью симметричных формул, так что взаимные индуктивности равны и формула (24.14) справедлива для любых контуров.

Явление взаимоиндукции применяется для повышения и понижения напряжения переменного тока в *трансформаторах*.

## 24.4. Нестационарные процессы в цепи, содержащей индуктивность

Как уже отмечалось, по правилу Ленца ток самоиндукции направлен так, чтобы препятствовать изменениям тока в цепи. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании цепи и убывание тока при размыкании цепи происходят не мгновенно, а постепенно. Рассмотрим для иллюстрации простейшую цепь, состоящую из ЭДС  $\mathcal{E}$ , катушки индуктивностью  $L$ , резистора сопротивлением  $R$  и ключа  $K$  (рис. 24.2).

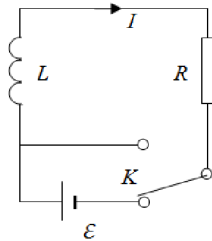


Рис. 24.2

Опишем сначала нестационарный процесс изменения тока при размыкании цепи. До размыкания в установившемся режиме в цепи будет течь постоянный ток

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (24.22)$$

В момент времени  $t = 0$  отключим ЭДС ключом  $K$ . Как только ток в цепи начнет убывать, возникнет ЭДС самоиндукции, противодействующая этому убыванию. Этот процесс описывается законом Ома:

$$IR = -L \frac{dI}{dt}. \quad (24.23)$$

Разделив переменные, получим:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt. \quad (24.24)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$I = \text{const} \exp\left(-\frac{R}{L} t\right). \quad (24.25)$$

Значение константы определяется из начальных условий: при  $t = 0$   $I = I_{\max} = \frac{\varepsilon}{R}$ . Окончательно получаем:

$$I = I_{\max} \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) = I_{\max} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (24.26)$$

Здесь

$$\tau = \frac{R}{L} \quad (24.27)$$

— характерное время релаксации — время, за которое сила тока уменьшается в  $e$  раз.

Итак, после отключения ЭДС сила тока не обращается мгновенно в нуль, а убывает по экспоненциальному закону. График убывания  $I$  дан на рис. 24.3 (кривая  $a$ ).

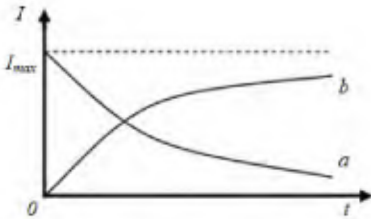


Рис. 24.3

Теперь рассмотрим случай обратного замыкания цепи. После подключения ЭДС в цепи будет действовать и ЭДС самоиндукции. Следовательно, в соответствии с законом Ома

$$IR = \varepsilon - L \frac{dI}{dt} \quad (24.28)$$

или в стандартном виде дифференциального уравнения:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\varepsilon}{L} \quad (24.29)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения (24.29) можно полу-

чить, прибавив любое его частное решение к общему решению соответствующего однородного уравнения. Легко убедиться в том, что

$$I = I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (24.30)$$

является частным решением. Следовательно, общим решением уравнения (24.29) будет функция

$$I = I_{\max} + \text{const} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right). \quad (24.31)$$

В начальный момент сила тока в цепи равна нулю. Отсюда  $\text{const} = -I_0$ . Таким образом функция нарастания тока в цепи после подключения к ней ЭДС имеет вид

$$I = I_{\max}\left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right). \quad (24.32)$$

График этой функции дан на рис. 24.3 (кривая *b*). Характерное время нарастания и приближения тока к асимптоте — это то же время релаксации  $\tau$ .

Очевидно, что и в более сложных цепях ЭДС самоиндукции похожим образом замедляет изменение тока в цепи.

## **24.5. Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля**

Проводник с электрическим током всегда окружен магнитным полем, а изменение магнитного поля сопровождается возникновением электрического поля. Энергетические превращения свидетельствуют о том, что магнитное поле (как и электрическое) несет энергию. Рассчитаем эту энергию с помощью закона сохранения энергии, примененного для процессов на рис. 24.2.

Пусть по катушке индуктивностью  $L$  в начальный момент времени течет ток  $I$ , возникший благодаря ЭДС  $\mathcal{E}$ . При отключении ЭДС и переводе ключа в другое положение ток поддерживается уже за счет ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_c$ , возникающей при уменьшении тока  $I$ .

Работа, совершаемая ЭДС самоиндукции по перемещению заряда  $dq$ , равна:

$$dA = \mathcal{E}_c dq = \mathcal{E}_c I dt = -L \frac{dI}{dt} I dt = -LI dI. \quad (24.33)$$

Интегрирование по току от начального тока  $I$  до конечного нулевого тока дает полную работу индуктивности:

$$A = -L \int_I^0 I dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (24.34)$$

Очевидно, что эта работа совершена за счет магнитного поля соленоида и равна энергии индуктивности:

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (24.35)$$

Преобразуем это выражение с учетом формулы (24.13) для индуктивности соленоида  $L = \mu_0 \mu n^2 V$  и связи (22.23) магнитной индукции внутри соленоида с током:  $B = \mu_0 \mu n I$ :

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V, \quad (24.36)$$

Поскольку магнитное поле соленоида однородно, то, разделив энергию на объем, получим объемную плотность энергии магнитного поля:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (24.37)$$

Плотность энергии магнитного поля измеряется в джоулях на кубический метр (Дж/м<sup>3</sup>). В случае неоднородного поля плотность энергии магнитного поля в каждой точке выражается через малый объем  $dV$ :

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}. \quad (24.38)$$

При этом энергия поля в объеме  $V$  выражается через интеграл по этому объему:

$$W = \int_V W dV = \frac{1}{2\mu_0\mu} \int_V B^2 dV. \quad (24.39)$$

## 25. Уравнения Максвелла

### 25.1. Электромагнитное поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла в интегральной форме

Из опыта и частных законов видно, что магнитное поле связано с электрическим, электрическое поле — с магнитным и оба они определяются расположением и перемещением зарядов. В результате вместо отдельных электрического и магнитного полей в электродинамике принято говорить о едином электромагнитном поле. Наиболее полно и в обобщенном виде эти связи представлены в четырех *уравнениях Максвелла*, сформулированных в 1861–1865 гг. Теория Максвелла — макроскопическая теория, в которой рассматриваются макроскопические поля макроскопических зарядов и токов, пространственная протяженность которых много больше размеров молекул.

Выпишем сначала уравнения Максвелла в интегральной форме. Отметим, что порядок нумерации уравнений может быть произвольным.

*Первое уравнение Максвелла* — это теорема Гаусса (19.11) для электрического поля:  $\oint D_n dS = \sum_i q_i$ .

*Второе уравнение Максвелла* — это теорема Гаусса (22.31) для магнитного поля, опирающаяся на отсутствие магнитных зарядов:  $\oint B_n dS = 0$ .

Третье уравнение следует из основного закона электромагнитной индукции (24.4):  $\mathcal{E}_i = -\frac{dN_B}{dt}$ . Максвелл предположил, что любое переменное магнитное поле возбуждает в пространстве электрическое поле, проявляющееся в индукционном токе в проводниках. При этом ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$  определяется циркуляцией вектора напряженности вихревого электрического поля  $\oint E_i dl$ . Таким образом, окончательно с учетом определения магнитного потока *третье уравнение Максвелла* имеет вид

$$\oint E_i dl = -\frac{d}{dt} \int B_n dS. \quad (25.1)$$

Четвертое уравнение Максвелла — это обобщение теоремы о циркуляции (22.19) вектора напряженности магнитного поля:  $\oint H_i dl = \sum_i I_i$ . Максвелл предположил, что если переменное магнитное поле возбуждает в пространстве вихревое электрическое поле, то должен существовать и аналогичный эффект для электрического поля: изменение электрического поля должно вызывать вихревое магнитное поле. Для этого он ввел понятие *тока смещения*. В интеграле теоремы о циркуляции справа необходимо учесть помимо токов проводимости иные токи, приводящие к изменению напряженности магнитного поля.

Для примера применим теорему о циркуляции к магнитному полю, созданному переменным электрическим током, перезаряжающим конденсатор. По Максвеллу в непроводящем промежутке конденсатора протекает ток смещения. При этом переменное электрическое поле создает соответствующее току смещения магнитное поле. Найдем этот ток:

$$I_{cm} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int \sigma dS = \int \frac{d\sigma}{dt} dS = \int \frac{dD}{dt} dS. \quad (25.2)$$

Здесь использовано, что вблизи проводника вектор электрического смещения в соответствии с (18.2)  $D = \sigma$ . Сравнивая (25.2) со связью плотности тока и силы тока  $I_{cm} = \int j_{cm} dS$ , получим для плотности тока смещения:

$$j_{cm} = \frac{dD}{dt}. \quad (25.3)$$

В общем случае, когда площадка не перпендикулярна вектору электрического смещения, ток смещения определяется нормальной составляющей вектора электрического смещения, и из (25.2) имеем:

$$I_{см} = \int \frac{dD_n}{dt} dS. \quad (25.4)$$

Добавив в обобщение теоремы о циркуляции к току проводимости  $\int jdS$  ток смещения  $\frac{d}{dt} \int D_n dS$ , получим четвертое уравнение Максвелла:

$$\oint H_1 dl = \int jdS + \frac{d}{dt} \int D_n dS. \quad (25.5)$$

Таким образом, окончательно система уравнений Максвелла в интегральной форме имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \oint D_n dS &= \sum_i q_i; \\ \oint B_n dS &= 0; \\ \oint E_1 dl &= -\frac{d}{dt} \int B_n dS; \\ \oint H_1 dl &= \int jdS + \frac{d}{dt} \int D_n dS. \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

В векторном виде эту систему можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \oint \vec{D} d\vec{S} &= \sum_i q_i; \\ \oint \vec{B} d\vec{S} &= 0; \\ \oint \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{S}; \\ \oint \vec{H} d\vec{l} &= \int \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int \vec{D} d\vec{S}. \end{aligned} \right\} \quad (25.7)$$

Полученная система представляет собой основные уравнения электродинамики и позволяет решать самые разные и сложные задачи. Электрические и магнитные свойства среды в ней характеризуются

ются тремя параметрами: диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , магнитной проницаемостью  $\mu$  и проводимостью  $\gamma$ . Эти параметры среды учитывают реакцию среды на электромагнитное поле. Предполагается, что они известны из опыта. Диэлектрическая и магнитная проницаемости входят в уравнения связи электрического смещения с напряженностью электрического поля и магнитной индукции. Для изотропной (не сегнетоэлектрической и не ферромагнитной) среды эти уравнения связи имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} D &= \epsilon_0 \epsilon E; \\ B &= \mu_0 \mu H. \end{aligned} \right\} \quad (25.8)$$

В свою очередь, проводимость дает связь плотности тока с напряженностью поля с помощью закон Ома в дифференциальной форме (20.11):

$$j = \gamma E. \quad (25.9)$$

Уравнения (25.7) – (25.9) составляют основу электродинамики.

## 25.2. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Перейдем теперь к уравнениям Максвелла в дифференциальной форме, которые могут быть получены из уравнений Максвелла в интегральной форме с помощью двух известных математических теорем. *Теорема Остроградского-Гаусса*

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \int \operatorname{div} \vec{E} dV \quad (25.10)$$

позволяет преобразовать интеграл по замкнутой поверхности  $S$  в интеграл по объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью.

*А теорема Стокса*

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} \quad (25.11)$$

дает возможность преобразовать интеграл по замкнутому контуру  $l$  в интеграл по поверхности  $S$ , натянутой на этот контур. Сформулированные теоремы можно применять не только для вектора  $\vec{E}$ , но и для любого другого вектора.

Напомним здесь математические определения, позволяющие в теории поля компактно записывать и преобразовывать формулы, для дивергенции:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (25.12)$$

и ротора:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix}. \quad (25.13)$$

Здесь определение ротора дано в символическом виде с помощью определителя 3-го порядка и единичных векторов по координатам. Заметим, что дивергенция является скаляром, а ротор — вектором. Кроме того, отметим, что в определениях дивергенции и ротора используются частные производные, однако в более простых формулах будут использоваться и обычные производные.

Математическую теорему Остроградского-Гаусса мы уже применяли для вывода физических теорем Гаусса для электрического и магнитного поля, так что воспользуемся этими результатами.

Из теоремы Гаусса в дифференциальной форме (16.26) для электрического поля с учетом того, что среда диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  ослабляет поле в  $\varepsilon$  раз, следует:  $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}$ . Отсюда имеем *первое уравнение Максвелла*:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho. \quad (25.14)$$

*Второе уравнение Максвелла* — это теорема Гаусса в дифференциальной форме (22.33) для магнитного поля:  $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ .

Далее применим теорему Стокса к третьему уравнению системы (25.7)  $\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{S}$ :

$$\int \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = -\int \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}. \quad (25.15)$$

Поскольку интегралы равны для произвольной поверхности, то равны и подинтегральные выражения:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (25.16)$$

Это и есть *третье уравнение Максвелла*.

Наконец, применим теорему Стокса к четвертому уравнению системы (25.7)  $\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int \vec{D} d\vec{S}$ , объединив два интеграла в один:

$$\int \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int \left( \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{S}. \quad (25.17)$$

Поскольку интегралы равны для произвольной поверхности, то равны и подинтегральные выражения. Таким образом, получим *четвертое уравнение Максвелла*:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (25.18)$$

Таким образом, окончательно *система уравнений Максвелла в дифференциальной форме* имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{div} \vec{D} &= \rho; \\ \text{div} \vec{B} &= 0; \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt}; \\ \text{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (25.19)$$

Для решения конкретных задач к этим уравнениям по-прежнему надо добавить уравнения связи (25.8), (25.9). Но теперь

этого недостаточно. При переходе от интегрального вида к дифференциальному в уравнениях Максвелла потерялись граничные условия — примерно так же, как при дифференцировании уравнения теряются константы. На границе раздела сред производные, входящие в уравнения Максвелла, вообще говоря, не определены. Поэтому необходимо дополнительно пользоваться *граничными условиями для электромагнитного поля*, вытекающими из уравнений Максвелла в интегральной форме (19.12), (19.14), (23.19), (23.21):

$$\left. \begin{aligned} D_{n1} &= D_{n2}; \\ E_{\tau 2} &= E_{\tau 1}; \\ B_{n1} &= B_{n2}; \\ H_{\tau 2} &= H_{\tau 1}. \end{aligned} \right\} \quad (25.20)$$

Напомним, что эти граничные условия получены для случая, если на границе раздела отсутствуют свободные заряды и токи проводимости.

Если электрическое и магнитное поля стационарны ( $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{d\vec{D}}{dt} = 0$ ), то, как следует из системы (25.19), эти поля существуют независимо друг от друга. В этом случае электрическое поле описывается *двумя основными уравнениями электростатики*:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25.21)$$

Соответственно магнитное поле описывается *двумя основными уравнениями магнитостатики*:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}. \end{aligned} \right\} \quad (25.22)$$

Рассмотрим теперь *следствия из уравнений Максвелла*. К этим следствиям в первую очередь можно отнести закон сохранения

электрического заряда, закон сохранения электромагнитной энергии (теорема Пойтинга) и волновое уравнение.

### 25.3. Закон сохранения заряда. Теорема Пойтинга. Энергия электромагнитного поля. Вектор Умова-Пойтинга

В системе уравнений Максвелла в неявном виде содержится закон сохранения электрического заряда. Действительно, найдем дивергенцию от правой и левой частей уравнения Максвелла  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$ :

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (25.23)$$

Воспользуемся известным математическим тождеством (его можно проверить непосредственным вычислением), справедливым для любого вектора:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0. \quad (25.24)$$

Поскольку операция вычисления дивергенции сводится к дифференцированию по пространственным координатам, то порядок вычисления производной по времени и вычисления дивергенции в (11.25) можно поменять местами:

$$0 = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{d(\operatorname{div} \vec{D})}{dt}. \quad (25.25)$$

Далее воспользуемся уравнением Максвелла  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$  и получим закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \vec{j}. \quad (25.26)$$

Смысл полученного уравнения в том, что увеличение плотности заряда в точке обеспечивается притоком заряда из соседних то-

чек пространства (по физическому смыслу дивергенции как потока вектора из точки). При этом закон сохранения электрического заряда не содержит источников заряда. Отсюда следует, что электрический заряд не может возникнуть и не может исчезнуть.

Возьмем теперь интеграл от (25.26) по объему, воспользовавшись при этом для плотности тока  $\vec{j}$  теоремой Остроградского-Гаусса (25.10)  $\oint \vec{j} d\vec{S} = \int \text{div} \vec{j} dV$ :

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = - \oint \vec{j} d\vec{S}. \quad (25.27)$$

Переписав это уравнение в более привычной форме, получим закон сохранения электрического заряда в интегральной форме:

$$\frac{dQ}{dt} = -I. \quad (25.28)$$

Физический смысл полученного интегрального выражения прост: в фиксированном объеме величина электрического заряда  $Q$  может измениться только за счет тока  $I$  через замкнутую поверхность, ограничивающую этот объем.

Выведем теперь теорему Пойнтинга, определяющую баланс энергии электромагнитного поля в пространстве и времени. Если уравнение Максвелла  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$  скалярно умножить на вектор  $\vec{H}$ , а уравнение Максвелла  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$  скалярно умножить на вектор  $\vec{E}$  и из первого уравнения вычесть второе, получим

$$\vec{H} \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} \vec{H} = -\vec{H} \frac{d\vec{B}}{dt} - \vec{E} \frac{d\vec{D}}{dt} - \vec{j} \vec{E}. \quad (25.29)$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что левую часть уравнения можно выразить через дивергенцию от векторного произведения:

$$\vec{H} \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} \vec{H} = \text{div} [\vec{E} \vec{H}]. \quad (25.30)$$

Кроме того, удобно сгруппировать два первых члена правой части с помощью очевидного соотношения

$$\vec{H} \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{E} \frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\vec{B}}{2} \right). \quad (25.31)$$

Заметим, что в скобках представлена сумма объемных плотностей энергии электрического поля  $\frac{\vec{E}\vec{D}}{2}$  и магнитного поля  $\frac{\vec{H}\vec{B}}{2}$ . Эта сумма дает *объемную плотность энергии электромагнитного поля*:

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\vec{B}}{2}. \quad (25.32)$$

После таких преобразований получим из (25.29) теорему Пойнтинга:

$$\frac{dw}{dt} = -\text{div}[\vec{E}\vec{H}] - \vec{j}\vec{E}. \quad (25.33)$$

Суть ее сводится к закону сохранения энергии для электромагнитного поля. Первый член в правой части теоремы (по физическому смыслу дивергенции как потока вектора из точки) определяет приток энергии поля в точку извне. При этом *вектор потока электромагнитной энергии*

$$\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}] \quad (25.34)$$

называют *вектором Умова-Пойнтинга*. Если проинтегрировать (25.33) по некоему объему, воспользовавшись для преобразования дивергенции теоремой Остроградского-Гаусса (25.10)  $\oint \vec{P} d\vec{S} = \int \text{div} \vec{P} dV$ , то получим еще одно наглядное интегральное соотношение:

$$\frac{dW}{dt} = -\oint \vec{P} d\vec{S} - \int \vec{j}\vec{E} dV. \quad (25.35)$$

*Изменение энергии электромагнитного поля в объеме определяется балансом притока энергии извне и диссипации энергии внутри объема.*

## 25.4. Волновое уравнение. Решения волнового уравнения. Интенсивность электромагнитной волны

Запишем систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме (25.19) в отсутствие электрических зарядов и токов:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt}; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{d\vec{D}}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (25.36)$$

Эта система допускает существование электромагнитного поля в виде электромагнитной волны. Покажем это. Сначала вычислим, например, ротор от обеих частей третьего уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{d(\operatorname{rot} \vec{H})}{dt}. \quad (25.37)$$

Из математики известно, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}, \quad (25.38)$$

где оператор Лапласа  $\nabla^2$  определяется выражением

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}. \quad (25.39)$$

Из первого уравнения Максвелла следует:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (25.40)$$

Подставив все это в (25.37) с учетом четвертого уравнения Максвелла, получим:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (25.41)$$

Такое *уравнение* называется *волновым* и может описывать плоскую бегущую волну, распространяющуюся в произвольном направлении в трехмерном пространстве и похожую на упругую волну в упругой среде:

$$\nabla^2 s = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \quad (25.42)$$

где  $v$  — фазовая скорость волны.

Сравнение последних уравнений позволяет сразу определить фазовую скорость волны:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon}}. \quad (25.43)$$

Можно показать, что *решение волнового уравнения для плоской волны* в трехмерном пространстве имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \quad (25.44)$$

причем

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (25.45)$$

Заметим, что фазовая скорость определяет лишь скорость перемещения косинусоиды (25.44). Можно показать, что скорость переноса энергии и информации волной определяется групповой скоростью

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (25.46)$$

Подчеркнем, что каждая из компонент вектора  $\vec{E}$  описывается волновым уравнением (25.41).

В одномерном случае волновое уравнение (25.42) сводится к виду

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (25.47)$$

Несложно убедиться, что решением его является выражение

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (25.48)$$

Это решение представляет собой волну, бегущую вдоль оси  $x$ .

Заметим, что фазовая скорость электромагнитной волны в вакууме равна скорости света  $c$ . Поэтому из формулы для фазовой скорости (25.43) следует связь трех физических констант:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (25.49)$$

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме (25.36) в отсутствие электрических зарядов и токов симметрична относительно электрического и магнитного полей. Поэтому очевидно, что вычисление ротора от обеих частей четвертого уравнения Максвелла и последующие преобразования дадут для магнитного поля уравнение, аналогичное (25.41):

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (25.50)$$

Оно имеет решением по аналогии с (25.44)

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha). \quad (25.51)$$

Оказывается, что и магнитное поле волны имеет волновой характер, причем фазовая скорость волны магнитного поля совпадает с фазовой скоростью волны электрического поля. Если исследовать решения уравнений непосредственно, то оказывается, что плоские волны электрического и магнитного полей специальным образом ориентированы друг относительно друга, имеют одинаковую начальную фазу колебаний и согласованные между собой амплитуды. Частоты и волновые векторы у этих волн тоже одинаковы. *Электромагнитные волны поперечны*: векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  лежат в плоскости, перпендикулярной вектору скорости распространения волны. При этом и векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны. Из уравнений Максвелла следует, что электрическое и магнитное поля в любой момент времени в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (25.52)$$

Вычислим *интенсивность электромагнитной волны*  $I_a$  — усредненную за период энергию, переносимую волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Эта важная энергетическая характеристика волны, которую можно получить с учетом (25.34) и (25.48) усреднением модуля вектора Умова-Пойнтинга:

$$\begin{aligned} I_a &= \langle E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kx + \alpha) \rangle = E_0 H_0 \langle \cos^2(\omega t - kx + \alpha) \rangle = \\ &= E_0 H_0 / 2. \end{aligned} \quad (25.53)$$

Здесь используется, что среднее значение квадрата косинуса по периоду равно  $1/2$ .

## 25.5. Принцип работы радиоприемника. Шкала электромагнитных волн

7 мая 1895 г. в Петербурге был сделан доклад А. С. Попова «Об отношении металлических порошков к электрическим колебаниям», в ходе которого он провел первый сеанс *радиосвязи* и продемонстрировал миру первый радиоприемник. Эта дата признана теперь днем рождения радио.

Принцип работы радиоприемника (и телевизора) основан на явлении резонанса. В воздухе (или в подводящем кабеле) присутствуют слабые электромагнитные колебания разных несущих частот, каждая из которых несет информацию о своей программе. Настроенный в приемнике на определенную частоту колебательный контур в соответствии с явлением резонанса усиливает нужную частоту и после прохождения сигнала через дополнительный усилитель воспроизводит нужную программу. Именно так для каждого вида связи и вещания используется определенный диапазон электромагнитных волн.

В целом же *шкала электромагнитных волн* охватывает широкий диапазон длин волн и частот. Перечислим основные типы электромагнитных волн по возрастанию частоты. При этом надо учитывать, что границы их диапазонов да и сами типы волн достаточно

условны и могут определяться не только частотой, но и происхождением волн.

*Радиоволны* охватывают диапазон частот от  $10^3$  до  $10^{12}$  Гц (длины волн  $3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^{-4}$  м). Их можно создать переменными токами в проводниках и электронных потоках.

За ними следует *инфракрасное излучение* с частотами  $10^{12} - 4 \cdot 10^{14}$  Гц (длины волн  $3 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-7}$  м). Такое излучение генерируется атомами и молекулами при тепловых и электрических воздействиях.

Далее идет *видимый свет* частотами  $4 \cdot 10^{14} - 8 \cdot 10^{14}$  Гц (длины волн  $8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$  м). Видимый свет играет важную роль для зрения и занимает небольшой диапазон длин волн, поэтому этот диапазон принято определять точнее: 0,78 мкм (красный цвет) — 0,38 мкм (фиолетовый цвет). Полезно знать, что красной границе соответствуют фотоны энергией 1,6 эВ, а фиолетовой — фотоны энергией 3,1 эВ.

К видимому свету примыкает *ультрафиолетовое излучение* с диапазоном частот от  $8 \cdot 10^{14}$  до  $10^{17}$  Гц (длины волн  $4 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-9}$  м). Ультрафиолетовое излучение, как и видимое, удобно создавать потоками ускоренных заряженных частиц.

Еще более коротковолновым является *рентгеновское излучение* частотами от  $10^{17} - 3 \cdot 10^{18}$  Гц и длинами волн  $3 \cdot 10^{-9} - 10^{-10}$  м. Оно возникает при торможении пучков электронов высокой энергии, в частности релятивистских.

И замыкает этот перечень *гамма-излучение*, частота которого лежит в пределах от  $3 \cdot 10^{18}$  до  $10^{23}$  Гц, а длина волны — от  $10^{-10}$  до  $10^{-15}$  м. Это излучение возникает в ядерных реакциях. Последние два типа излучения имеют частично перекрывающиеся диапазоны частот, и различаются по характеру происхождения.

Радиоволны изучает классическая электродинамика. Инфракрасное, видимое и ультрафиолетовое излучение изучает волновая оптика и квантовая физика. Рентгеновское и гамма-излучение изучается в квантовой физике.

## 26. Волновая оптика. Геометрическая оптика. Интерференция света

### 26.1. Волновая и геометрическая оптика. Четыре закона геометрической оптики

*Волновая оптика* — раздел оптики, который описывает распространение света с учетом его волновой электромагнитной природы. В рамках волновой оптики теория Максвелла позволила просто объяснить такие оптические явления, как интерференция, дифракция, поляризация и т. п.

В конце XVII в. оформились две теории света: *волновая* (продвигалась Р. Гуком и Х. Гюйгенсом) и *корпускулярная* (ее продвигал И. Ньютон). Волновая теория воспринимает свет как волновой процесс, подобный упругим механическим волнам. Согласно корпускулярной (квантовой) теории свет представляет собой поток частиц (корпускул), описываемых законами механики. Так, отражение света можно рассматривать аналогично отражению упругого шарика от плоскости. Долгое время две теории света считались альтернативными. Однако многочисленные опыты показали, что свет в одних опытах обнаруживает волновые свойства, а в других — корпускулярные. Поэтому в начале XX в. было признано, что свет принципиально имеет двойственную природу — обладает *корпускулярно-волновым дуализмом*.

Но прежде чем излагать основные положения и результаты волновой оптики, сформулируем элементарные законы геометрической оптики.

*Геометрическая оптика* — раздел оптики, изучающий законы распространения света в прозрачных средах и правила построения изображений при прохождении света в оптических системах без учета его волновых свойств. В геометрической оптике вводится понятие *светового луча*, определяющего направление потока лучистой энергии. При этом полагается, что распространение света не зависит от поперечных

размеров пучка света. В соответствии с законами волновой оптики это справедливо, если поперечный размер пучка много больше длины волны света. Геометрическую оптику можно рассматривать как предельный случай волновой оптики при стремящейся к нулю длине волны света. Точнее границы применимости геометрической оптики будут определены при изучении дифракции света.

Основные законы геометрической оптики были открыты опытным путем задолго до выявления физической природы света. Сформулируем четыре закона геометрической оптики:

1. *Закон прямолинейного распространения света: в оптически однородной среде свет распространяется прямолинейно.* Подтверждением этого закона служит резкая тень, отбрасываемая телом при освещении точечным источником света. Другой пример: при прохождении света далекого источника через небольшое отверстие получается узкий прямой световой луч. При этом необходимо, чтобы размер отверстия был много больше длины волны.

2. *Закон независимости световых пучков: производимый отдельным пучком света эффект не зависит от других пучков.* Так, освещенность поверхности, на которую падает несколько пучков, равна сумме освещенностей, создаваемых отдельными пучками. Исключением являются нелинейные оптические эффекты, которые могут иметь место при больших интенсивностях света.

3. *Закон отражения света: падающий и отраженный лучи, а также перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости (плоскости падения) по разные стороны от перпендикуляра. Угол отражения  $\gamma$  равен углу падения  $\alpha$  (рис. 26.1):*

$$\gamma = \alpha. \quad (26.1)$$

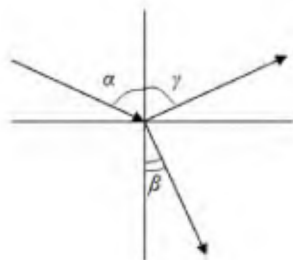


Рис. 26.1

4. *Закон преломления света: падающий и преломленный лучи, а также перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости по разные стороны*

от перпендикуляра. Отношение синуса угла падения  $\alpha$  к синусу угла преломления  $\beta$  есть величина постоянная для двух данных сред (рис. 26.1):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad (26.2)$$

где  $n$  — показатель преломления второй среды относительно первой.

Показатель преломления среды относительно вакуума называют *абсолютным показателем преломления*. Относительный показатель преломления двух сред равен отношению их абсолютных показателей преломления:

$$n = n_2/n_1. \quad (26.3)$$

Законы отражения и преломления имеют объяснение в волновой физике. Преломление является следствием изменения скорости распространения волн при переходе из одной среды в другую. Физический смысл показателя преломления — отношение скорости распространения волны в первой среде ( $v_1$ ) к скорости распространения во второй среде ( $v_2$ ):

$$n = v_1/v_2. \quad (26.4)$$

Абсолютный показатель преломления равен отношению скорости света  $c$  в вакууме к скорости света  $v$  в среде:

$$n = c/v. \quad (26.5)$$

Среду с большим абсолютным показателем преломления называют *оптически более плотной средой*. При переходе света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную ( $n_2 < n_1$ , например, из стекла в воздух) может иметь место явление *полного отражения*, т. е. исчезновение преломленного луча. Это явление наблюдается при углах падения, превышающих некоторый критический угол  $\alpha_{кр}$ , который называется *предельным углом полного внутреннего отражения*. Для угла падения  $\alpha = \alpha_{кр}$  условием исчезновения преломленного луча является

$$\sin \beta = 1. \quad (26.6)$$

Если второй средой является воздух ( $n_2 \approx 1$ ), то с помощью (26.2) и (26.3) формулу для вычисления предельного угла полного внутреннего отражения удобно записать в виде

$$\sin \alpha_{np} = 1/n, \quad (26.7)$$

где  $n = n_1 > 1$  — абсолютный показатель преломления первой среды.

Для границы раздела стекло–воздух ( $n = 1,5$ ) критический угол равен  $\alpha_{np} = 42^\circ$ , для границы вода–воздух ( $n = 1,33$ )  $\alpha_{np} = 49^\circ$ .

Наиболее интересным применением полного внутреннего отражения является создание *волоконных световодов*, которые представляют собой тонкие (от нескольких мкм до мм) произвольно изогнутые нити из оптически прозрачного материала (стекло, кварц, пластик). Свет, попадающий на торец световода, может распространяться по нему на большие расстояния за счет полного внутреннего отражения от боковых поверхностей. Световод нельзя изгибать сильно, поскольку при сильном изгибе условие полного внутреннего отражения (26.7) нарушается и свет частично выходит из волокна через боковую поверхность.

Отметим, что первый и четвертый законы геометрической оптики можно вывести из *принципа Ферма (принципа наименьшего действия)*: траектория распространения светового луча соответствует наименьшему времени распространения. И это несложно показать.

В заключение рассмотрим одну из забавных задач геометрической оптики — создание шапки-невидимки. С точки зрения оптики шапка-невидимка представляет собой систему огибания объекта лучами света. Сделать такую систему, воспользовавшись законом преломления света, в принципе несложно, основная проблема — в борьбе с сильным затуханием света в преломляющей системе.

## 26.2. Интерференция света. Когерентность

*Интерференция света* — сложение световых волн, приводящее к устойчивому усилению и ослаблению света в отдельных точках пространства. Характерная интерференционная картина может

быть зафиксирована на экране, например, в виде чередующихся светлых и темных полос или колец.

Интерференцию можно объяснить в рамках волновой оптики, рассмотрев сложение волн. Пусть для примера складываются два гармонических колебания одинаковой частоты:  $A_1 = A_{10} \cos(\omega t + \alpha_1)$  и  $A_2 = A_{20} \cos(\omega t + \alpha_2)$ . В оптических задачах за  $A_1$  и  $A_2$  можно принять модули вектора напряженности электрического (или магнитного) поля волны. Такое сложение в теории колебаний выполняют с помощью

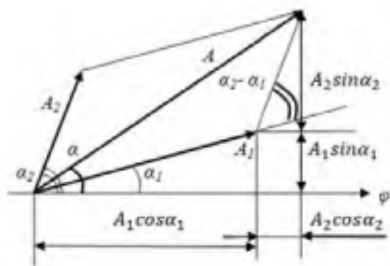


Рис. 26.2

векторной диаграммы (рис. 26.2). При этом получается результирующее колебание

$$A = A_0 \cos(\omega t + \alpha). \quad (26.8)$$

с квадратом амплитуды

$$A_0^2 = A_{10}^2 + A_{20}^2 + 2A_{10}A_{20} \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (26.9)$$

Наблюдаемой величиной является интенсивность света, которая прямо пропорциональна именно квадрату амплитуды электрического поля волны. Из формулы видно, что суммарная интенсивность может быть как больше, так и меньше суммы отдельных интенсивностей — в зависимости от знака последнего члена формулы. А этот знак определяется разностью фаз колебаний

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (26.10)$$

Интерференционный максимум (светлая полоса) имеет место в тех точках пространства, в которых волны приходят в одинаковой фазе:

$$\Delta\alpha = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (26.11)$$

При этом

$$A_{0\text{макс}}^2 = (A_{10} + A_{20})^2 > A_{10}^2 + A_{20}^2. \quad (26.12)$$

Интерференционный минимум (темная полоса) имеет место, если волны приходят в противофазе:

$$\Delta\alpha = 2\pi m + \pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (26.13)$$

При этом

$$A_{\text{0мин}}^2 = (A_{10} - A_{20})^2 < A_{10}^2 + A_{20}^2. \quad (26.14)$$

В частности, если  $A_1 = A_2$ , и интенсивности обеих интерферирующих волн одинаковы, то в максимуме интенсивность вчетверо больше каждой из составляющих, а в минимуме — равна нулю.

Картину интерференции легко наблюдать, например, создав две волны бросанием двух камушков в реку. Однако опыт учит, что создать условия для интерференции света непросто. Так, если в комнате горят две одинаковые лампочки, то в любой точке просто складываются интенсивности света и никакой интерференции не наблюдается. Дело в том, что в теории мы рассматривали *монохроматические волны*, имеющие постоянную частоту. Но реальные световые волны не являются строго монохроматическими. Атомы источника света (например, в лампе) излучают независимо друг от друга в случайные моменты времени, причем излучение атома длится очень короткое время  $\tau \leq 10^{-8}$  с. Через время порядка  $\tau$  совокупность излучающих атомов обновляется, и обновляется информация о фазе и амплитуде волны.

Монохроматичными могут считаться лишь кусочки волны длиной  $\tau$ , они называются *цугами*. Цуги имеют пространственную длину  $c\tau = 3$  м, где  $c$  — скорость света. Колебания в разных цугах не согласованы между собой. Таким образом, реальная световая волна представляет собой последовательность волновых цугов с беспорядочно меняющейся фазой. Если регулярно меняется фаза каждого из источников света, то также регулярно меняется разность фаз (26.10). В результате отсутствует устойчивое усиление и ослабление света в отдельных точках пространства — отсутствует интерференция. Колебания называют *когерентными*, если они согласованы во времени по фазе, и это проявляется при сложении колебаний. Так, колебания в одном цуге можно считать когерентными, а в раз-

ных цугах — некогерентными. В общем случае интервал времени  $\tau$ , в течение которого фаза колебаний остается приблизительно постоянной, называют *временем когерентности*, а пространственную длину  $st$  называют *длиной когерентности*. Волны, создающие когерентные колебания, также называются когерентными.

Таким образом, волны от двух независимых источников некогерентны и не дают интерференции. Поэтому для получения интерференции света нужно расщепить волну от единого источника на две и вновь сложить их на экране для получения интерференционной картины. Так делается во всех интерференционных схемах. Однако необходимо еще, чтобы время от расщепления до сложения обеих вторичных волн было примерно одинаковым и сдвиг по времени не превышал времени когерентности.

Предположим, что после расщепления и до интерференции первая волна (25.48):

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega t - k_1 x_1) = E_{10} \cos\left(\omega \left(t - \frac{x_1}{v_1}\right)\right) \quad (26.15)$$

прошла путь  $S_1$  в среде с показателем преломления  $n_1$ , а вторая волна

$$E_2 = E_{20} \cos(\omega t - k_2 x_2) = E_{20} \cos\left(\omega \left(t - \frac{x_2}{v_2}\right)\right) \quad (26.16)$$

прошла путь  $S_2$  в среде с показателем преломления  $n_2$ . Тогда набранная на этом участке разность фаз волн составит

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha_2 - \alpha_1 = \omega \left(t - \frac{x_2}{v_2}\right) - \omega \left(t - \frac{x_1}{v_1}\right) = \omega \left(\frac{x_1}{v_1} - \frac{x_2}{v_2}\right) = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 n_1 - x_2 n_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta. \end{aligned} \quad (26.17)$$

Здесь  $\lambda$  — длина волны в вакууме, *произведение геометрического пути волны на показатель преломления среды ( $xn$ ) называют оптической длиной пути*, а разность этих путей

$$\delta = x_1 n_1 - x_2 n_2 \quad (26.18)$$

называют *оптической разностью хода волн*.

Несложно понять, что волна проходит одинаковую оптическую длину пути в разных средах за одинаковое время. Воспользовавшись (26.11) и (26.17), получим, что интерференционный максимум имеет место в тех точках пространства, в которых оптическая разность хода равна целому числу волн:

$$\delta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (26.19)$$

Аналогично интерференционный минимум имеет место в тех точках пространства, в которых оптическая разность хода равна нечетному числу полуволн:

$$\delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (26.20)$$

### 26.3. Принцип Гюйгенса — Френеля. Расчет интерференционной картины двух источников

Существует немало схем для получения интерференции света, и во многих из них используется краеугольный принцип волновой оптики — *принцип Гюйгенса–Френеля*: *каждый элемент волновой поверхности можно рассматривать как центр, порождающий вторичные сферические волны, а результирующая волна в каждой точке пространства будет определяться интерференцией этих волн*. Напомним, что волновая поверхность — это поверхность, точки которой совершают колебания в одинаковой фазе.

Проведем *расчет интерференционной картины двух источников* для *опыта Юнга*, который впервые выполнен в 1802 г. В опыте Юнга (рис. 26.3) свет от источника, в качестве которого служила узкая щель  $S$ , падал на две близко расположенные щели  $S_1$  и  $S_2$ , игравшие роли когерентных источников. Каждая из щелей в соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля становилась источником вторичной волны. Интерференция наблюдалась на достаточно удаленном от вторичных источников экране в виде чередующихся светлых и темных полос. При этом между расстоянием  $d$  между вторичными щелями, расстоянием  $l$  между

экраном и плоскостью вторичных источников и расстоянием  $x$  от оси симметрии экрана до точки наблюдения  $P$  соблюдаются соотношения:

$$d \ll l, x \ll l. \quad (26.21)$$

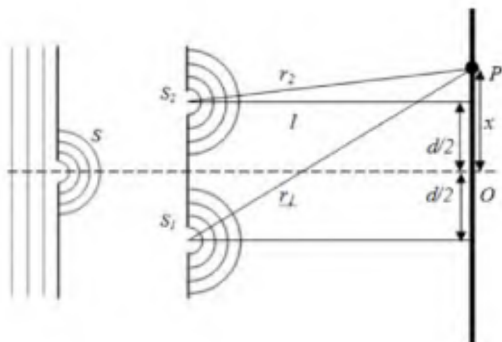


Рис. 26.3

При симметричном расположении щелей вторичные волны, испускаемые источниками  $S_1$  и  $S_2$ , проходят до точки наблюдения  $P$  разные расстояния  $r_1$  и  $r_2$ , причем разность этих расстояний определяет оптическую разность хода волн

$$\delta = r_1 - r_2. \quad (26.22)$$

Из геометрических соображений длина оптического пути первой и второй волн по теореме Пифагора равна:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2, \\ r_2^2 &= l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (26.23)$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим

$$r_1^2 - r_2^2 = 2xd. \quad (26.24)$$

С учетом малости  $d$  и  $x$  (26.21) сумму  $r_1 + r_2$  можно принять примерной равной  $2l$ , так что имеем

$$r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) \approx 2l(r_1 - r_2) = 2l\delta. \quad (26.25)$$

Из последних двух уравнений находим оптическую разность хода волн:

$$\delta = xd/l. \quad (26.26)$$

Из условий максимума (26.19)  $\delta = m\lambda$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и минимума (26.20)  $\delta = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) имеем координату на экране середины светлых полос

$$x_{\text{макс}} = \frac{m\lambda l}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (26.27)$$

и координату на экране середины темных полос

$$x_{\text{мин}} = \frac{(2m+1)\lambda l}{2d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (26.28)$$

Очевидно, что из соображений симметрии в центре экрана находится максимум (светлая полоса). Далее следуют темные и светлые полосы той же ширины, причем расстояние между соседними максимумами (или минимумами) составляет

$$\Delta x = \frac{\lambda l}{d}. \quad (26.29)$$

Допустим, что расстояние  $d$  между щелями  $S_1$  и  $S_2$  составляет 1 мм, а расстояние от щелей до экрана равно  $l = 1$  м. Например, для зеленого света ( $\lambda = 0,5$  мкм) получим  $\Delta x = 0,5$  мм, а для красного света ( $\lambda = 0,6$  мкм)  $\Delta x = 0,6$  мм. Таким способом Юнг впервые измерил длины световых волн. Отметим, что для интерференционной системы с выбранными параметрами соблюдаются условия достаточной удаленности экрана от источников (26.21).

До сих пор речь шла об интерференции в монохроматическом свете. Если в качестве источника использовать белый свет (который включает распределение длин волн всего видимого света), то из закона независимости световых пучков следует, что на экране будет представлено наложение картин интерференции всех цветов спектра. При этом полосы фиолетового цвета расположатся почти вдвое чаще, чем полосы красного цвета. Это объясняется с помощью (26.29), поскольку длина волны фиолетового цвета почти вдвое короче, чем красного.

## 26.4. Интерференция в тонких пленках

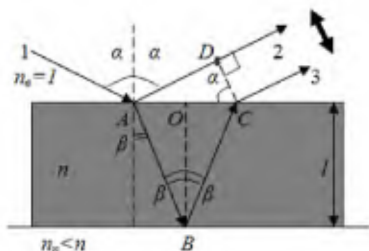


Рис. 26.4

для определенности, что луч падает на пластинку из воздуха с показателем преломления

$$n_0 = 1 < n, \quad (26.30)$$

а пластинка лежит на подложке с показателем преломления

$$n_n < n. \quad (26.31)$$

Такая ситуация имеет место, например, при интерференции в тонкой пластинке или пленке, окруженной воздухом.

Найдем оптическую разность хода интерферирующих лучей 2 и 3 между точкой  $A$  и плоскостью  $CD$ . Именно эта разность определяет интерференционную картину, поскольку расположенная далее собирающая линза (или глаз) лишь сводит два интерферирующих луча в один. При этом надо учесть, что в соответствии с опытом отражение от оптически более плотной среды в точке  $A$  ведет к изменению фазы на  $\lambda/2$  (на противоположную), а отражение от оптически менее плотной среды в точке  $B$  не ведет к изменению фазы волны. Таким образом, набирается оптическая разность хода интерферирующих лучей 2 и 3, равная:

$$\delta = (AB + BC)n - AD - \lambda/2. \quad (26.32)$$

Из  $\triangle ABO$  следует:

$$AB = OB/\cos\beta = l/\cos\beta; \quad (26.33)$$

$$AO = OB \operatorname{tg}\beta = l \operatorname{tg}\beta. \quad (26.34)$$

Из  $\triangle ACD$  с учетом закона преломления  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$  имеем:

$$\begin{aligned} AD &= AC \sin \alpha = 2AO \sin \alpha = 2l \operatorname{tg} \beta \sin \alpha = \\ &= 2l \operatorname{tg} \beta n \sin \beta = 2ln \sin^2 \beta / \cos \beta. \end{aligned} \quad (26.35)$$

Тогда оптическая разность хода

$$\delta = 2ln / \cos \beta - 2ln \sin^2 \beta / \cos \beta - \lambda / 2 = 2ln \cos \beta - \lambda / 2. \quad (26.36)$$

Эту формулу удобней анализировать, если из закона преломления выразить угол преломления через угол падения:

$$\delta = \frac{2ln\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n} - \frac{\lambda}{2} = 2l\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}. \quad (26.37)$$

Из условия максимума (26.19)  $\delta = m\lambda$  имеем

$$2l\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (26.38)$$

В свою очередь, условие минимума (26.20)  $\delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$  дает:

$$2l\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (26.39)$$

(В последней формуле нумерация целых чисел для упрощения вида формулы сдвинута на единицу.)

Согласно формулам в зависимости от угла падения монохроматического света пластинка в отраженном свете может выглядеть светлой или темной. Если пластинку освещать белым светом, то условия максимума и минимума могут выполняться для отдельных длин волн, и пластинка выглядит окрашенной. Этот эффект можно наблюдать на стенках мыльных пузырьков, на пленках масла и нефти, на крыльях насекомых и птиц, на поверхности металлов при их закалке (цвета побежалости).

Если монохроматический свет падает на пластинку переменной толщины, то условия максимума и минимума определяются толщиной  $l$ . Поэтому пластинка выглядит покрытой светлыми и темными полосами. При этом в клине это параллельные линии, а в воздушном промежутке между линзой и пластинкой — кольца (*кольца Ньютона*).

Прямое отношение к интерференции в тонких пленках имеет *просветление оптики*. Как показывают расчеты, отражение света приводит к уменьшению интенсивности прошедшего света на несколько процентов даже почти при нормальном падении света на линзу. Учитывая, что современные оптические устройства содержат достаточно большое количество линз, зеркал, светоделительных элементов, потери интенсивности световой волны без применения специальных мер могут стать значительными. Для уменьшения потерь на отражение используется покрытие оптических деталей пленкой со специальным образом подобранными толщиной  $l$  и показателем преломления  $n_n$ . Идея уменьшения интенсивности отраженного света от поверхности оптических деталей состоит в интерференционном гашении волны, отраженной от внешней поверхности пленки, волной, отраженной от внутренней поверхности пленки (см. рис. 26.5). Для осуществления этого амплитуды обеих волн должны быть равны, а фазы отличаться на  $180^\circ$ . Коэффициент отражения света на границе сред определяется относительным показателем преломления сред. Так, если свет проходит из воздуха в линзу с показателем преломления  $n$ , то условие равенства относительных показателей преломления на входе в пленку и выходе из пленки сводится к следующему:

$$n_n = \sqrt{n}. \quad (26.40)$$

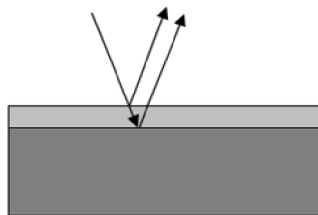


Рис. 26.5

Толщина пленки подбирается исходя из условия, чтобы дополнительный набег фазы света был равен нечетному числу полуволен. Таким способом удается ослабить отражение света в десятки раз.

## 27. Дифракция света

### 27.1. Метод зон Френеля.

#### Дифракция на круглом отверстии и круглом диске

*Дифракцией света* называют явление отклонения света от прямолинейного направления распространения при прохождении вблизи препятствий. Проиллюстрировать это явление могут волны на воде, которые огибают даже довольно крупное препятствие, а мелкое (по сравнению с длиной волны) препятствие проходят так, как будто его и не было. И свет при определенных условиях может заходить в область геометрической тени. Если на пути параллельного светового пучка расположено круглое препятствие (круглый диск или круглое отверстие в непрозрачном экране), то на экране, расположенном на достаточно большом расстоянии от препятствия, появляется *дифракционная картина*: чередующиеся светлые и темные кольца. Если препятствие прямолинейное (щель, нить, край экрана), то на экране возникают параллельные полосы.

Рассмотрим сначала *дифракцию на круглом отверстии* — дифракционную задачу о прохождении плоской монохроматической волны через небольшое круглое отверстие радиуса  $R$  в непрозрачном экране (рис. 27.1). Точка наблюдения  $P$  находится на оси симметрии на достаточно большом расстоянии  $L$  от экрана, причем

$$L \gg \lambda. \quad (27.1)$$

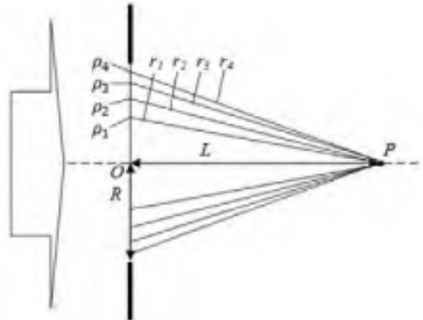


Рис. 27.1

В соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля можно разбить волновую поверхность плоскости отверстия на набор вторичных

источников, волны от которых дают интерференционную картину в точке  $P$ . Исходя из круговой симметрии задачи, Френель разбил волновую поверхность падающей волны на кольцевые зоны (зоны Френеля) так, чтобы расстояния от границ соседних зон до точки  $P$  отличались на полдлины волны:

$$r_1 = L + \lambda/2, r_2 = L + 2\lambda/2, r_3 = L + 3\lambda/2, \dots \quad (27.2)$$

Таким образом, волновая поверхность будет разбита на концентрические окружности. Найдем по теореме Пифагора радиусы  $\rho_m$  этих окружностей (зон Френеля):

$$\rho_m = \sqrt{r_m^2 - L^2} = \sqrt{m\lambda L + \frac{m^2\lambda^2}{4}} \approx \sqrt{m\lambda L}. \quad (27.3)$$

Здесь учтено условие удаленности экрана от отверстия, которое соблюдается на опыте обычно с большим запасом. Количество зон Френеля, укладывающихся на отверстии, определяется радиусом отверстия  $R$ :

$$m = \frac{R^2}{\lambda L}, \quad (27.4)$$

где  $m$  — не обязательно целое число, хотя для четкой интерференционной картины, как будет видно ниже,  $m$  с достаточно высокой точностью должно быть целым.

Результат интерференции в точке  $P$  зависит от числа  $m$  участвующих в интерференции зон Френеля. Покажем, что все зоны имеют одинаковую площадь  $S_m$ :

$$S_m = \pi\rho_m^2 - \pi\rho_{m-1}^2 = \pi\lambda L \quad (27.5)$$

Одинаковые по площади зоны, излучающие одинаковую по амплитуде волну, на первый взгляд, должны давать одинаковый вклад в освещенность в точке наблюдения. Однако это не совсем так. Чем больше номер зоны, тем больше угол  $\alpha$  между лучом  $r_m$  и нормалью к излучающей волновой поверхности. К тому же растет и расстояние до точки наблюдения  $r_m$ . Оба эти фактора приводят к небольшому

уменьшению амплитуды колебаний с увеличением  $m$  в точке наблюдения  $A_m$ , обеспечиваемой зоной  $m$ :

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots \quad (27.6)$$

При этом приближенно можно считать, что амплитуда колебаний  $A_m$ , вызываемых зоной  $m$ , равна среднему арифметическому амплитуд колебаний, вызываемых двумя соседними зонами:

$$A_m = (A_{m-1} + A_{m+1})/2. \quad (27.7)$$

Существенно, что возбуждаемые соседними зонами колебания находятся в противофазе, поскольку расстояния от них до точки наблюдения отличаются на  $\lambda/2$ . Поэтому волна от последующей зоны почти гасит волну от предыдущей зоны. При этом суммарная амплитуда в точке наблюдения равна конечной сумме, ограниченной величиной  $m$ :

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - \dots = A_1 - (A_2 - A_3) - (A_4 - A_5) - \dots < A_1. \quad (27.8)$$

В результате группировки амплитуд видно, что суммарная амплитуда колебаний в точке наблюдения всегда меньше амплитуды колебаний, которые вызвала бы одна первая зона Френеля. Если бы отверстие было бесконечно большим и были открыты все зоны Френеля, то до точки наблюдения дошла бы невозмущенная препятствием волна амплитудой  $A_0$ . Тогда имеем в результате группировки амплитуд бесконечную сумму, упрощающуюся с учетом (27.7):

$$A = A_0 = A_1/2 + (A_1/2 - A_2 + A_3/2) + (A_3/2 - A_4 + A_5/2) + \dots = A_1/2. \quad (27.9)$$

Таким образом, действие (амплитуда), вызванное всей волновой поверхностью невозмущенной волны, равно лишь половине действия одной первой зоны. Иными словами, если отверстие в непрозрачном экране оставляет открытой одну зону Френеля, то амплитуда колебаний в точке наблюдения возрастает в 2 раза (а интенсивность в 4 раза) по сравнению с действием невозмущенной волны. Если открыть две зоны, то амплитуда колебаний практически обращается в нуль. А если изготовить непрозрачный экран, который оставлял бы открытыми только несколько нечетных (или только несколько четных) зон,

то амплитуда колебаний в точке наблюдения резко возрастает. Так, если открыты первая, третья, пятая и седьмая зоны, то амплитуда колебаний возрастает в 8 раз, а интенсивность — в 64 раза. Можно сделать вывод, что *такие зонные пластинки обладают свойством фокусировать свет.*

Перейдем теперь к задаче о *дифракции на круглом диске*, не пропускающем свет. Предположим, что при этом зоны Френеля с номерами от 1 до  $m$  оказываются закрытыми. Тогда амплитуда колебаний в точке наблюдения по аналогии с предыдущими рассуждениями дается бесконечной суммой:

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - A_{m+4} + \dots = A_{m+1}/2 + (A_{m+1}/2 - A_{m+2} + A_{m+3}/2) + (A_{m+3}/2 - A_{m+4} + A_{m+5}/2) + \dots = A_{m+1}/2. \quad (27.10)$$

Здесь учтено, что выражения в скобках в соответствии с (27.7) равны нулю. Если экран закрывает не слишком много зон, то

$$A \approx A_0 \quad (27.11)$$

аналогично (27.9)

$$A_{m+1} \approx 2A_0. \quad (27.12)$$

Таким образом, в центре картины при дифракции света на диске наблюдается интерференционный максимум, называемый *пятном Пуассона*. Это пятно окружено светлыми и темными дифракционными кольцами, причем интенсивность максимумов убывает по мере удаления от центра.

Оценим теперь характерные размеры зон Френеля. Пусть, например, дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии  $L = 1$  м от препятствия, а длина волн света  $\lambda = 0,5$  мкм (зеленый свет). Тогда радиус первой зоны Френеля из (27.3)

$$\rho_1 = \sqrt{\lambda L} \approx 0,71 \text{ мм}, \quad (27.13)$$

а размер сотой зоны Френеля

$$\rho_{100} = \sqrt{100\lambda L} \approx 7,1 \text{ мм}. \quad (27.14)$$

Дифракционные явления проявляются наиболее отчетливо, когда на препятствии укладывается малое число зон (27.4):  $m = \frac{R^2}{\lambda L} \approx 1$ . Тогда

$$\lambda \approx \frac{R^2}{L}. \quad (27.15)$$

Это соотношение между длиной волны  $\lambda$ , размером препятствия  $R$  и расстоянием от препятствия до точки наблюдения  $L$  можно рассматривать как *границу применимости геометрической оптики*. При бóльших длинах волн дифракция существенна, а при меньших работает геометрическая оптика и понятие геометрического луча света.

## 27.2. Дифракция в параллельных лучах от одной щели

Перейдем теперь к рассмотрению *дифракции Фраунгофера*, или *дифракции в параллельных лучах*. Начнем с *дифракции на одной щели*. Пусть на узкую длинную щель, проделанную в непрозрачном экране, падает нормально к экрану параллельный пучок света. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля каждая точка волновой поверхности, проходящей через щель, является источником вторичных волн. Поскольку длинная щель (в отличие от круглых отверстия и экрана) является одномерным препятствием, то и дифракция будет не двумерной, а одномерной — в направлении, перпендикулярном границам щели  $AB$  (рис. 27.2). Это можно показать построением огибающей вторичных волн от точек.

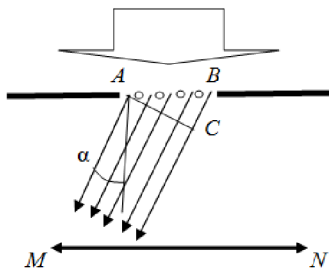


Рис. 27.2

Для рассмотрения такой задачи удобно разбить волновую поверхность, проходящую через щель, на узкие полоски, параллельные границам щели. Каждую из таких по-

лосок можно считать источником вторичной цилиндрической волны. Построение огибающих показывает, что, проходя щель, свет распространяется во всех направлениях: от  $\alpha = -90^\circ$  до  $\alpha = 90^\circ$ . Щель рассматривает картину дифракции на бесконечном удалении, что на практике обеспечивается сведением пучков света с помощью объектива  $MN$ .

Рассмотрим свет, проходящий через щель шириной  $a = AB$  под определенным углом  $\alpha$ . Выберем ширину полосок так, чтобы свет от них шел в противофазе и разность хода между двумя соседними пучками света равнялась  $\lambda/2$ . Очевидно, что такие полоски волновой поверхности являются зонами Френеля. Число зон на щели  $m$  определяется из геометрических соображений. Из треугольника  $ABC$  видно, что разность хода на краях щели равна

$$BC = a \sin \alpha, \quad (27.16)$$

откуда получаем соотношение для числа зон Френеля на щели:  $m \frac{\lambda}{2} = a \sin \alpha$  и

$$m = \frac{2a \sin \alpha}{\lambda}. \quad (27.17)$$

Если угол  $\alpha$  выбран так, что на щели укладывается четное число зон Френеля, то свет от каждой зоны будет погашен светом соседней зоны, и под таким углом наблюдается минимум. Следовательно, условие минимумов (с учетом возможности отрицательных углов) записывается следующим образом:

$$a \sin \alpha = \pm m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (27.18)$$

Если на щели укладывается нечетное число зон Френеля, то некомпенсированная зона обеспечивает максимум. Условие максимумов (с учетом возможности отрицательных углов) записывается следующим образом:

$$a \sin \alpha = \pm (m + \frac{1}{2}) \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (27.19)$$

Особого рассмотрения требует угол  $\alpha = 0$ . В этом случае вся щель представляет единую зону, излучающую свет в одинаковой

фазе, что обеспечивает яркий и широкий центральный максимум. Картина интерференции от щели — зависимость относительной интенсивности излучения  $I_{отн}$  от  $\sin\alpha$  — представлена на рис. 27.3. Ширина центрального максимума ограничена положениями первого минимума (27.18) в соответствии с формулой:

$$\sin\alpha = \pm\lambda/a. \quad (27.20)$$

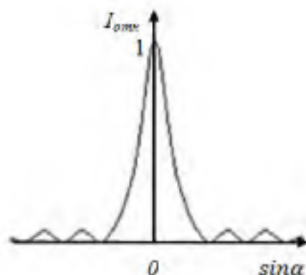


Рис. 27.3

Чем больше длина волны и чем уже щель, тем дальше отстоят друг от друга максимумы. Поэтому если щель освещать белым светом, то каждый максимум, кроме главного, разложится в разноцветный спектр.

Интересно рассмотреть предельные случаи соотношения ширины щели  $a$  и длины волны  $\lambda$ . Если  $a \gg \lambda$ , то при большом запасе этой малости из (27.19):

$$\sin\alpha = \pm(m + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{a} \quad (27.21)$$

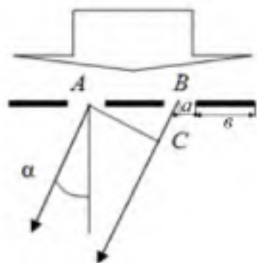
следует малость угла  $\alpha$ . Это означает, что при очень широкой щели дифракционная картина не наблюдается. Если  $a \ll \lambda$ , то уже центральный максимум в соответствии с (27.20) может заполнить весь экран. Излишнее уменьшение щели ведет к тому, что опять же дифракция не наблюдается, а вместо нее экран будет слабо и почти однородно освещен. Такая картина, как видно из (27.21), будет наблюдаться уже при  $a \approx \lambda$ .

## 27.3. Дифракционная решетка. Условия главных максимумов. Дисперсия и разрешающая способность решетки

При анализе действия зонных пластинок мы выяснили, что в дифракции наиболее эффективно работают периодические структу-

ры. И это не удивительно. Ведь дифракция — волновой эффект, а волны и сами представляют собой периодическую структуру. Поэтому можно ожидать, что набор равноудаленных щелей должен в некоторых случаях давать более эффективную и полезную для практических применений дифракционную картину.

В связи с этим рассмотрим точный оптический прибор — дифракционную решетку. Простейшей *дифракционной решеткой* называют совокупность большого количества узких, параллельных, одинаковых, равноотстоящих друг от друга щелей. Такая решетка работает в проходящем свете. Иногда используют и дифракционную решетку в отраженном свете, которую изготавливают путем нанесения большого количества узких, параллельных, одинаковых, равноотстоящих друг от друга препятствий на зеркало. Часто решетку изготавливают путем нанесения непрозрачных штрихов на прозрачное стекло или зеркало. Поэтому характеризуют ее не количеством щелей, а аналогичным количеством штрихов. Первую работающую дифракционную решетку сделал в XVII в. шотландский ученый Джеймс Грегори, который использовал для этого птичьи перья. У современных решеток число штрихов достигает миллиона на поверхности до нескольких десятков см.



Описание дифракции на дифракционной решетке выполняется подобно описанию дифракции в параллельных лучах на щели (рис. 27.4). Сумму ширины щели  $a$  и промежутка между щелями (штриха)  $b$  называют *периодом решетки*:

Рис. 27.4

$$d = a + b. \quad (27.22)$$

Пусть на решетку перпендикулярно плоскости решетки падает пучок параллельных лучей, который далее в соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля дает вторичные интерферирующие волны. Выберем некоторое направление прохождения этих вторичных волн, определяемое углом  $\alpha$ . Если разность хода волн между серединами соседних щелей равна целому числу волн, то имеет место их взаимное усиление

$$BC = d \sin \alpha = \pm m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (27.23)$$

Очевидно, что такая же разность хода будет и для левых краев щелей, и для правых краев, и для любых других пар точек, удаленных друг от друга на расстояние  $d$ . Более того, если щели не являются соседними и расстояние между их центрами равно не  $d$ , а  $2d$ ,  $3d$ ,  $4d$ ..., то из геометрических соображений очевидно, что разность хода увеличится в целое число раз и останется равной целому числу волн. Это означает многократное взаимное усиление волн от всех щелей решетки и ведет к появлению на экране ярких максимумов, называемых *главными максимумами*. Положение главных максимумов в соответствии с (27.23) задается *основной формулой дифракционной решетки*:

$$d \sin \alpha = \pm m \lambda, \quad (27.24)$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  — порядок главных максимумов. Они расположены симметрично относительно центрального максимума, для которого  $m = 0$ .

Кроме главных максимумов существуют дополнительные, когда пучки от одних щелей усиливают друг друга, а от других — гасят. Эти дополнительные максимумы обычно слабые и не представляют интереса.

Перейдем теперь к определению положения минимумов. Очевидно, что в тех направлениях, куда не шел свет от одной щели, он не пойдет и от нескольких. Поэтому условие (27.18) определяет положение *главных минимумов дифракционной решетки*:

$$a \sin \alpha = \pm m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (27.25)$$

При этом если положение главного минимума попадает на положение главного максимума, то главный максимум исчезает.

Однако кроме этих минимумов появятся дополнительные минимумы, обусловленные приходом в противофазе света от разных щелей. Сделаем упрощенную оценку их положения, пренебрегая ролью штрихов. В этом приближении вся решетка представляется единой щелью, ширина которой равна  $Nd$ , где  $N$  — число щелей решетки. По аналогии с (27.25) имеем:

$$Nd \sin \alpha = \pm m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (27.26)$$

Сразу видно, что эта оценка включает в себя позиции более строго вычисленных (с учетом роли штрихов) главных максимумов (27.24). Очевидно, что эти ложные позиции надо исключить. После этого получается достаточно точная формула для определения положения большого количества *дополнительных минимумов дифракционной решетки*:

$$d \sin \alpha = \pm m \lambda / N, \quad m = 1, 2, 3, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \quad (27.27)$$

Анализ формулы показывает, что между каждыми двумя главными максимумами имеется  $N-1$  дополнительных минимумов. При этом чем больше щелей, тем больше минимумов между главными максимумами и тем резче и ярче главные максимумы относительно тусклого фона между максимумами. Если дифракционную решетку осветить двумя пучками света с близкой длиной волны, то решетка с большим числом щелей позволит в дифракционной картине четко разделить и определить эти длины волн. А если осветить решетку белым светом, то каждый главный максимум (кроме центрального) получится разложенным в спектр, называемый *дифракционным спектром*.

Качество дифракционной решетки как оптического прибора определяется ее угловой дисперсией и разрешающей способностью. *Угловая дисперсия  $D$*  характеризует угловую ширину спектра и показывает, какой интервал углов приходится на единичный интервал длин волн:

$$D = \frac{d\alpha}{d\lambda}. \quad (27.28)$$

Взяв дифференциал от (27.24), получим:

$$d \cos \alpha \, d\alpha = m d\lambda, \quad (27.29)$$

откуда

$$D = \frac{m}{d \cos \alpha}. \quad (27.30)$$

При работе с дифракционной решеткой обычно используют малые углы, так что  $\cos \alpha \approx 1$ . Поэтому окончательно получаем, что уг-

ловая дисперсия (и угловое расстояние между центрами близких спектральных линий) тем больше, чем больше порядок спектра и чем меньше постоянная решетки:

$$D = \frac{m}{d}. \quad (27.31)$$

Возможность различать близкие спектральные линии зависит не только от расстояния между центрами линий, но и от ширины линий. Поэтому в оптике вводят еще одну характеристику — разрешающую способность оптического прибора, которая показывает, как хорошо прибор различает мелкие детали предмета. Для дифракционной решетки под *разрешающей способностью* понимают отношение длины волны к разности близких длин волн, которые решетка еще способна делить:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (27.32)$$

Обычно порог различения линий определяют *критерием Рэля*: оптический прибор разрешает две соседние линии спектра, если максимум одной из них попадает в ближайший минимум другой (рис. 27.5). В этом случае посередине между интенсивностями центров линий  $I = I_1 = I_2$  имеется еще обычно различимый глазом или прибором минимум с интенсивностью:

$$I_M = 0,8I. \quad (27.33)$$

Положение главного максимума первой волны  $\lambda_1$  дается уравнением (27.24):

$$d \sin \alpha = m\lambda_1. \quad (27.34)$$

Положение ближайшего добавочного минимума близкой второй волны  $\lambda_2$  с учетом (27.24) и (27.27) определяется суммой:

$$d \sin \alpha = m\lambda_2 + \lambda_2/N. \quad (27.35)$$

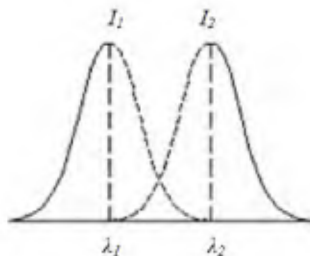


Рис. 27.5

На пороге разрешения эти положения (и углы наблюдения) совпадают:

$$m\lambda_1 = m\lambda_2 + \lambda_2/N. \quad (27.36)$$

Отсюда разрешающая способность дифракционной решетки равна:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = mN. \quad (27.37)$$

Таким образом, разрешающая способность решетки тем больше, чем больше в ней штрихов и чем больше порядок спектра.

## 27.4. Дифракция от объемных решеток

Мы рассмотрели дифракцию на одномерной решетке, когда периодичность решетки наблюдается лишь в одном измерении. Но можно представить *двумерные решетки* (например, две скрещенные одномерные решетки) и *трехмерные*. Двумерные решетки применяются для анализа спектров двумерных сигналов, например спектров изображений.

Типичным примером трехмерной решетки является кристалл. В нем атомы (промежутки между просветами) образуют трехмерную оптическую систему. Наблюдать дифракцию света на кристаллах возможно, правда видимый свет для этой цели не годится из-за малости периода такой решетки (порядка  $10^{-10}$  м). Ведь, как было отмечено выше, если длина волны существенно больше размера щели, с наблюдением дифракционной картины возникают сложности. Однако для этой цели можно использовать рентгеновское излучение, длина волны которого сравнима с расстоянием между атомами. Рентгеновские лучи проникают внутрь кристалла и отражаются от каждой плоскости атомов. Рассмотрим два рентгеновских луча 1 и 2, падающих на соседние плоскости атомов (рис. 27.6). Разность хода отраженных лучей

$$\delta = BC + CB = 2d \sin\theta, \quad (27.38)$$

где  $d$  — расстояние между плоскостями.

Максимумы  
ции по-прежнему имеют место,  
когда разность хода равна цело-  
му числу длин волн:

$$2d \sin\theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (27.39)$$

Полученное условие максимумов называется *формулой Брэгга-Вульфа*. Эти максимумы могут быть зафиксированы для наблюдения, например, на рентгеновской фотопленке.

Таким образом, по соответствующим максимумам углам  $\theta$  можно найти расстояние между плоскостями атомов, а при более тонких экспериментах — провести более детально исследование структуры вещества. Такой метод называется *рентгеноструктурным анализом*. Помимо кристаллов этим методом исследуют и другие структуры, в частности сложные биологические молекулы. Среди них молекулы белка и хромосомы живых клеток. Помимо этого отметим и более традиционное применение дифракции от объемных решеток в рентгеновских спектрографах, которые по известному расстоянию между плоскостями атомов определяют длину волны излучения.

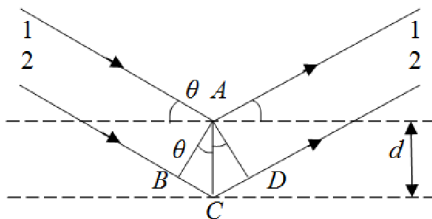


Рис. 27.6

## 28. Поляризация света

### 28.1. Естественный и поляризованный свет.

#### Поляризация света при отражении и преломлении. Закон Брюстера

*Поляризованной* называют электромагнитную волну, в которой векторы напряженности электрического (и магнитного) поля каким-то образом упорядочены. Как отмечалось выше, электромагнитные волны поперечны: вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и лежат

в плоскости, перпендикулярной вектору скорости распространения волны. Такая связь позволяет описывать поляризацию волны (и света) с помощью одного из двух векторов, причем обычно выбирают вектор  $\vec{E}$ . Поэтому плоскость, проходящую через вектор  $\vec{E}$  и вектор направления распространения волны, называют *плоскостью поляризации*.

Волна является *плоскополяризованной*, если плоскость поляризации не меняет своего положения в пространстве. Атомы излучают плоскополяризованные волны цугами длительностью  $10^{-8}$  с. Свет от обычных источников (солнца, лампы, пламени и т. д.) излучается отдельными атомами, причем плоскости излучаемых цугов никак не согласованы между собой. Поэтому результирующая плоскость поляризации хаотически меняет направление. Свет (и волна) с хаотически меняющей направление плоскостью поляризации называют *неполяризованным*, или *естественным*. Если конец вектора  $\vec{E}$  описывает эллипс или окружность, то свет соответственно называют *поляризованным по эллипсу* или *по кругу*. Волну, поляризованную по эллипсу или по кругу, можно разложить на две плоскополяризованные волны. В свою очередь, плоскополяризованную волну можно представить как сумму двух поляризованных по кругу волн, в которых вектор  $\vec{E}$  вращается в противоположных направлениях.

Отдельно выделяют *частично поляризованный свет*, состоящий из естественной и поляризованной составляющих. Характеристикой частично поляризованного (и иного) света является *степень поляризации*:

$$P = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}), \quad (28.1)$$

определяемая соотношением минимальной  $I_{\min}$  и максимальной  $I_{\max}$  интенсивностей света, пропускаемой анализатором (см. ниже). Очевидно, что для естественного и поляризованного по кругу света  $P = 0$ , а для плоскополяризованного света  $P = 1$ .

Для создания плоскополяризованного света из естественного нужно создать прибор, который одну из составляющих естественного света задерживает, а другую пропускает. Ниже рассмотрен ряд

приборов, основанных на этом принципе. При работе с поляризованным светом приходится решать две проблемы: как создать поляризованный свет и как зарегистрировать его поляризацию. Прибор для решения первой задачи называется *поляризатором*, для решения второй — *анализатором*. Поляризатор и анализатор обычно взаимозаменяемы.

Поляризованный свет можно получить, используя отражение или преломление света, например, от стекла. Как отраженный, так и преломленный свет оказываются поляризованными. *В отраженном луче преобладают перпендикулярные плоскости падения колебания, а в преломленном — параллельные.* Это можно показать с помощью уравнений Максвелла с учетом граничных условий. Степень поляризации обоих лучей зависит от угла падения луча. Существует угол падения (у каждой пары прозрачных сред он свой), при котором отраженный свет становится плоскополяризованным (степень поляризации равна единице), а преломленный луч остается частично поляризованным. Этот угол  $\alpha_B$ , называемый *углом Брюстера*, определяется *законом Брюстера*:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = n. \quad (28.2)$$

Используя закон преломления, легко показать, что при угле Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

## 28.2. Поляризационные приборы. Закон Малюса

Закон Брюстера может быть использован при изготовлении прибора для получения поляризованного света — поляризатора. При этом, чтобы получить более высокую степень поляризации преломленного луча, его пропускают через стопу стеклянных пластинок. С прохождением каждой последующей пластинки стопы степень поляризации преломленного луча увеличивается. Например, для стекла степень поляризации преломленного луча равна 0,15, так что уже 10 пластинок дают сильно поляризованный свет.

Приведем примеры других типов поляризаторов. Существуют кристаллы, в которых плоскополяризованный свет поглощается существенно по-разному в зависимости от положения плоскости колебаний: при одном положении этой плоскости поглощение слабое (*плоскость пропускания*), а при положении, перпендикулярном к первому, наоборот, — очень сильное. В промежуточных положениях плоскости колебаний поглощение света постепенно меняется от максимума до минимума. Вещества с такими свойствами называются *дихроичными*. К таким веществам, в частности, относится кристалл турмалина. Пластика из турмалина даже толщиной 1–2 мм может служить поляризатором и анализатором. Другим примером поляризатора может служить поляроид — искусственно приготовленная пленка, обладающая также свойством дихроичности (кристаллики из геропатита, вводимые в желатин или целлюлозу). Поляроиды обычно дают лишь частично поляризованный свет, степень поляризации которого не очень велика.

Прибор, в котором на пути пучка света последовательно расположены поляризатор и анализатор, называется *поляриметром*. Поляризатор делает из естественного света плоскополяризованный. Далее анализатор пропускает свет полностью (не считая поглощения), если плоскость поляризации света совпадает с плоскостью пропускания анализатора. Если поворачивать анализатор вокруг оси поляриметра, то интенсивность проходящего света будет меняться от максимального значения до нуля (в таком положении поляризатор и анализатор *скрещены*).

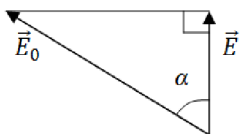


Рис. 28.1

Найдем закон изменения интенсивности света, прошедшего через анализатор, от угла поворота последнего. Пусть угол между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора равен  $\alpha$  (рис. 28.1). Прошедший через поляризатор вектор  $\vec{E}_0$ , очевидно, лежит в плоскости пропускания поляризатора. В свою очередь, через анализатор пройдет только проекция  $\vec{E}_0$  на плоскость пропускания анализатора

$$E = E_0 \cos \alpha, \quad (28.3)$$

а вторая составляющая поглотится. Интенсивность света пропорциональна квадрату напряженности, откуда следует, что интенсивность прошедшего света пропорциональна квадрату косинуса:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (28.4)$$

где  $I_0$  — интенсивность падающего на поляризатор света.

Выведенное соотношение называют законом Малюса.

Помещая между поляризатором и анализатором в трубе поляриметра различные среды, можно наблюдать различные проявления поляризации. Например, у поляризованного света, прошедшего через раствор сахара, плоскость поляризации поворачивается, причем угол поворота пропорционален концентрации сахара в растворе.

### **28.3. Двойное лучепреломление. Поляризация света в одноосных кристаллах. Построения волновых поверхностей. Призма Николя**

Из теории Максвелла для анизотропных сред следует любопытное следствие. Некоторые кристаллы обладают свойством двойного лучепреломления. Это свойство проявляется в раздваивании падающего на кристалл луча и тесно связано с поляризацией света. Впервые оно наблюдалось в кристаллах исландского шпата  $CaCO_3$ . При этом лишь в одном направлении кристалла исландского шпата, называемом оптической осью кристалла, не наблюдается двойного лучепреломления. Такие кристаллы называются одноосными. Направление, в котором не наблюдается двойного лучепреломления, называется оптической осью кристалла. Кристаллы, у которых такое выделенное направление является единственным, называются одноосными. К одноосным кристаллам принадлежат также кварц и турмалин.

Бывают также двуосные кристаллы. Если через такой кристалл смотреть на окружающие предметы, то каждый предмет будет раздваиваться. Особенностью двойного лучепреломления

является то, что один из преломленных лучей, называемый *обыкновенным лучом*, подчиняется закону преломления: его показатель преломления не зависит от угла падения, а падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости с перпендикуляром, восстановленным к отражающей плоскости в точке падения. Другой луч, называемый *необыкновенным лучом*, этому закону не подчиняется. Даже при нормальном падении света на поверхность кристалла необыкновенный луч обычно меняет при преломлении направление движения (рис. 28.2)

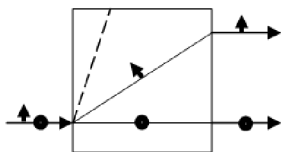


Рис. 28.2

Точками (перпендикулярно плоскости рисунка) и жирными короткими стрелками (параллельно плоскости рисунка) на рисунке показано направление плоскости поляризации лучей, а пунктиром — направление оптической оси кристалла. Оба преломленных луча плоскополяризованы, причем их плоскости поляризации взаимно перпендикулярны.

Двойное лучепреломление объясняется тем, что из-за анизотропии кристалла распространяющийся в нем свет имеет две характерные фазовые скорости. Если колебания в световой волне происходят параллельно оптической оси, то свет распространяется с одной скоростью. А если колебания идут в перпендикулярной оптической оси плоскости, то фазовая скорость другая. Для обыкновенной волны плоскость колебаний всегда перпендикулярна оптической оси, поэтому она имеет одинаковую скорость  $v_0$  и показатель преломления  $n_0$  по всем направлениям

$$v_0 = c/n_0. \quad (28.5)$$

А необыкновенную волну можно разбить на составляющие с колебаниями вдоль и поперек оптической оси и с разной фазовой скоростью. При этом при распространении вдоль оптической оси скорость необыкновенной волны равна скорости обыкновенной волны (28.5). А при распространении в направлениях поперек оптической оси скорость необыкновенной волны наиболее сильно отлича-

ется от (28.5) и определяется показателем преломления  $n_e$  необыкновенного луча:

$$v_e = c/n_e. \quad (28.6)$$

Ход обыкновенных и необыкновенных лучей удобно представить с помощью *волновых поверхностей*. Предположим, что внутри кристалла произошли две вспышки, давшие начало распространению во всех направлениях обыкновенной и необыкновенной волн. Тогда на основании вышеприведенных рассуждений можно понять, что волновая поверхность обыкновенной волны задается сферой. В свою очередь, волновая поверхность необыкновенной волны задается эллипсоидом. При этом одна из осей эллипсоида равна диаметру сферы. Если эллипсоид вписан в сферу и  $v_e < v_o$ , то такой кристалл называется *положительным*. Если эллипсоид описан вокруг сферы и  $v_e > v_o$ , то такой кристалл называется *отрицательным*. Например, кристалл исландского шпата является отрицательным, причем  $n_e = 1,49$  и  $n_o = 1,66$ .

Обыкновенный и необыкновенный лучи обычно слишком мало разведены в пространстве, и это затрудняет непосредственное использование двойного лучепреломления для изготовления поляризаторов. Приходится делать специальное устройство, называемое *призмой Николя* (сокращенно — *николь*). Оно состоит из двух прямоугольных призм из исландского шпата, склеенных слоем канадского бальзама (рис. 28.3). Обыкновенный луч сильнее преломляется, чем необыкновенный, и на границе исландский шпат — канадский бальзам испытывает полное внутреннее отражение, уходя в сторону и поглощаясь черненой поверхностью.



Рис. 28.3

Поэтому только необыкновенный луч проходит призму, давая плоскополяризованный луч. Вторая призма имеет вспомогатель-

ное значение и лишь спрямляет образованный луч по отношению к входящему лучу.

## 29. Дисперсия света

### 29.1. Нормальная и аномальная дисперсия

*Дисперсией света* называют зависимость показателя преломления вещества от частоты света. Иногда в этом определении вместо показателя преломления вещества рассматривают фазовую скорость световых волн, а вместо частоты света — длину волны.

При этом количественной мерой дисперсии, называемой *дисперсией вещества*, является производная

$$D = \frac{dn}{d\lambda} \quad (29.1)$$

Дисперсия вещества показывает, как быстро меняется показатель преломления с изменением длины волны. Для прозрачных веществ показатель преломления с увеличением длины волны (и уменьшением частоты) уменьшается:

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0. \quad (29.2)$$

В таком случае говорят, что имеет место *нормальная дисперсия*. На явлении нормальной дисперсии основана работа призмных спектрографов. Дисперсия проявляется, например, при разложении в спектр стеклянной треугольной призмой пучка белого света. При этом красные лучи отклоняются слабее, чем фиолетовые.

Вблизи линий и полос поглощения показатель преломления с увеличением длины волны (и уменьшением частоты) увеличивается. В этом случае говорят, что имеет место *аномальная дисперсия*.

## 29.2. Электронная теория дисперсии

В классической электронной теории дисперсии каждый атом среды можно рассматривать как систему зарядов, имеющих возможность совершать гармонические колебания с различными собственными частотами и коэффициентами затухания.

В соответствии с теорией Максвелла при  $\mu = 1$

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \quad (29.3)$$

По своему определению диэлектрическая проницаемость вещества  $\varepsilon$  показывает, во сколько раз напряженность  $E_0$  электрического поля в вакууме больше, чем напряженность  $E$  поля в среде. Поэтому с учетом (19.6):

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E} = \frac{E + \frac{P}{\varepsilon_0}}{E} = 1 + \frac{Np}{\varepsilon_0 E}. \quad (29.4)$$

Здесь учтена связь поляризованности  $P$  с концентрацией атомов  $N$  и дипольным моментом атома  $p$ , наведенным полем световой волны:

$$P = Np. \quad (29.5)$$

(По определению, поляризованность — сумма дипольных моментов единицы объема среды.) Так как  $\varepsilon = n^2$ , то получим связь показателя преломления среды  $n$  с дипольным моментом отдельных атомов  $p$ :

$$n^2 = 1 + \frac{Np}{\varepsilon_0 E}. \quad (29.6)$$

В соответствии с теорией вынужденных колебаний под действием поля световой волны переменные величины  $E = E(t)$  и  $p = p(t)$  колеблются с вынуждающей частотой поля, но в общем случае с несовпадающей фазой. Показатель преломления — характеристика,

усредненная по периоду таких колебаний. Поэтому для нахождения показателя преломления надо усреднить по времени отношение  $p(t)/E(t)$ :

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \langle \frac{p(t)}{E(t)} \rangle. \quad (29.7)$$

Выведем теперь связь дипольного момента атома с напряженностью поля световой волны. Будем считать, что под действием световой волны совершают колебания только внешние электроны атома, называемые *оптическими электронами*. Для простоты сначала предположим, что каждый атом имеет один оптический электрон. Оптический электрон движется под действием упругой силы, силы трения и вынуждающей силы электрического поля световой волны. Опять же для простоты рассмотрим поляризованную световую волну, тогда все эти силы действуют вдоль одной прямой, и задача сводится к одномерной.

Рассмотрим колебания электрона, если к нему (наряду с силой упругости  $F_{упр} = -kx$  и силой сопротивления  $F_c = -rv$ ) приложена внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону:

$$F_{вн} = F_m \cos \omega t = e E_m \cos \omega t. \quad (29.8)$$

Уравнение движения, описывающее вынужденные колебания с затуханием получается из второго закона Ньютона:

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f_m \cos \omega t; \quad (29.9)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m};$$

$$\beta = \frac{r}{2m};$$

$$f_m = \frac{eE_m}{m},$$

где  $x$  — координата электрона;

$\omega_0$  — собственная частота незатухающих колебаний электрона;

$\beta$  — коэффициент затухания;

$E_m$  — амплитуда световой волны;

$\omega$  — циклическая частота световой волны;

$m$  — масса электрона;  
 $e$  — элементарный заряд.

В соответствии с теорией вынужденных колебаний стационарное решение этого уравнения движения имеет вид

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (29.10)$$

где зависящая от частоты амплитуда

$$A = \frac{eE_m/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad (29.11)$$

а сдвиг фазы  $\varphi$  определяется соотношением

$$tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (29.12)$$

Подставим теперь значение дипольного момента атома

$$p(t) = -e x(t) \quad (29.13)$$

и напряженности электрического поля волны

$$E(t) = -E_m \cos\omega t \quad (29.14)$$

в уравнение для нахождения показателя преломления (29.7):

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \left\langle \frac{-e x(t)}{-E_m \cos\omega t} \right\rangle = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \left\langle \frac{e A \cos(\omega t - \varphi)}{E_m \cos\omega t} \right\rangle = \\ &= 1 + \frac{Ne A}{\varepsilon_0 E_m} \left\langle \frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\cos\omega t} \right\rangle = 1 + \frac{Ne A}{\varepsilon_0 E_m} \cos\varphi. \end{aligned} \quad (29.15)$$

При этом знак минус в уравнении для напряженности соответствует знаку плюс в уравнении для силы, действующей на отрицательный электрон. Кроме того, при усреднении по времени учтено, что

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\cos\omega t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\cos\omega t \cos\varphi + \sin\omega t \sin\varphi}{\cos\omega t} \right\rangle = \\ &= \langle \cos\varphi + tg\omega t \sin\varphi \rangle = \cos\varphi. \end{aligned} \quad (29.16)$$

Подставив в формулу для показателя преломления выражение для амплитуды  $A$  колебаний электрона, получим

$$n^2 = 1 + \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\varphi. \quad (29.17)$$

### 29.3. Анализ результатов электронной теории дисперсии

Проанализируем полученную зависимость  $n(\omega)$ . Если частота света близка к частоте собственных колебаний электрона

$$\omega_0^2 - \omega^2 \ll 2\beta\omega, \quad (29.18)$$

то имеет место резонанс, приводящий к раскашке колебаний электрона за счет колебаний света. При этом световая волна сильно затухает. При  $\omega = \omega_0$  из выражений для фазы и амплитуды следует, что  $\varphi = \pi/2$ ,  $\cos\varphi = 0$  и  $n = 1$ .

Напротив, затухание оказывает незначительное влияние на движение электрона, если

$$\omega_0^2 - \omega^2 \gg 2\beta\omega. \quad (29.19)$$

В этом случае

$$\varphi = 0, \text{ если } \omega < \omega_0; \quad (29.20)$$

$$\varphi = \pi, \text{ если } \omega > \omega_0. \quad (29.21)$$

В любом случае при этом

$$\cos\varphi = 1. \quad (29.22)$$

Тогда в формуле для показателя преломления членом, связанным с затуханием, под корнем можно пренебречь, и формула приобретает вид

$$n^2 = 1 + \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (29.23)$$

Проведенный анализ позволяет изобразить примерный график зависимости показателя преломления от циклической частоты (рис. 29.1). На участках  $AB$  и  $DE$  показатель преломления растет с ростом частоты, что означает нормальную дисперсию. На участке  $BD$  дисперсия аномальная, поскольку с ростом частоты показатель преломления падает.

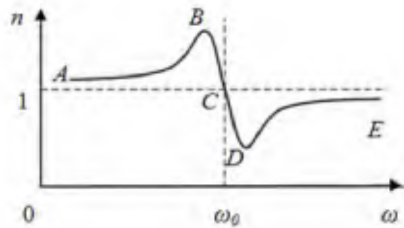


Рис. 29.1

Предположим теперь, что в веществе имеются разные заряды  $q_i$ , массы  $m_i$  и концентрации, колеблющиеся с разными собственными частотами  $\omega_{0i}$  и коэффициентами затухания  $\beta_i$ . В такой ситуации формула для  $n^2$  будет включать набор областей аномальной дисперсии, каждая из которых соответствует своей частоте  $\omega_{0i}$ :

$$n^2 = 1 + \sum_i \frac{N_i q_i^2 \cos \varphi_i}{\varepsilon_0 m_i \sqrt{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_i^2 \omega^2}}. \quad (29.24)$$

Такой вид зависимости показателя преломления от частоты неплохо согласуется с экспериментом.

## Часть III. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

---

### 30. Квантовая природа света. Давление света. Фотоэффект и эффект Комптона

#### 30.1. Квантовая природа света. Фотоны

*Квантовая физика* — раздел физики, изучающий квантовую оптику и тепловое излучение, атомную и ядерную физику, а также дающий представление о современной физической картине мира.

В соответствии с современными представлениями *свет имеет двойственную корпускулярно-волновую природу*: в одних явлениях свет обнаруживает свойства волн, а в других — свойства частиц. Волновые и квантовые свойства неотъемлемо дополняют друг друга. Волновые световые явления — интерференция, дифракция, поляризация, дисперсия — изучены волновой оптикой. При этом частицу (корпускулу) электромагнитного излучения называют *фотоном*, или *квантом*. Квантовые световые явления — фотоэффект, эффект Комптона, давление света, линейчатость спектров испускания и поглощения атомов и молекул — изучаются квантовой оптикой. Мы привыкли, что волны на воде и миллиардные шары (частицы) совершенно не похожи друг на друга и проявляют себя абсолютно по-разному. Однако свет не обязан быть похожим на привычные нам объекты макромира и способен одновременно проявлять и волновые, и корпускулярные свойства.

Не всегда волну можно рассматривать как поток фотонов. Достаточно в опыте Юнга уменьшить интенсивность источника света

(например, до уровня излучения одного фотона в час), а для регистрации интерференционной картины использовать фотопластинку. В таком опыте каждый фотон на фотопластинке регистрируется точкой и как частица локализован в пространстве. Однако по мере накопления информации о разных фотонах распределение точек не соответствует классическим представлениям о поведении частиц: на фотопластинке появляется характерная для волн интерференционная картина.

Фотон является элементарной частицей, движущейся в любой системе отсчета со скоростью света  $c$  и обладающей определенными энергией и импульсом. Энергия  $E$  и импульс  $p$  частицы в соответствии с теорией относительности связаны через массу  $m$  частицы релятивистским инвариантом:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (30.1)$$

При этом для движущегося в вакууме со скоростью света  $c$  фотона знаменатели релятивистских выражений для энергии и импульса обращаются в ноль. Поэтому, чтобы эти выражения не давали бесконечность, логично обратить и числитель в ноль, предположив, что масса фотона равна нулю. Это предположение подтверждается электродинамическими расчетами и астрофизическими наблюдениями. Нулевая масса фотона позволяет получить из релятивистского инварианта простое выражение, связывающее энергию и импульс фотона:

$$E = pc. \quad (30.2)$$

В 1900 г. Макс Планк создал теорию теплового излучения (см. ниже), высказав гипотезу, что излучение электромагнитных волн происходит квантами (порциями) с энергией

$$E = h\nu, \quad (30.3)$$

где  $\nu$  — частота электромагнитной волны;

$h$  — постоянная Планка:

$$h \approx 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}. \quad (30.4)$$

Часто используют также *приведенную* (перечеркнутую) *постоянную Планка*:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}. \quad (30.5)$$

В развитие *гипотезы Планка* Альберт Эйнштейн предположил, что эта дискретность определяется не механизмом поглощения и испускания, а тем, что само излучение состоит из неделимых квантов энергии, поглощаемых или испускаемых только целиком. Это позволило Эйнштейну создать теорию фотоэффекта.

Из вышеприведенных формул несложно получить выражение для импульса фотона:

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (30.6)$$

где  $\lambda$  — длина волны света.

В квантовой физике часто удобным оказывается использовать понятие волнового вектора  $\vec{k}$ , модуль которого (волновое число) выражается через длину волны света:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (30.7)$$

Легко получить, что энергия и импульс фотона симметрично выражаются через волновой вектор и приведенную постоянную Планка:

$$E = pc = \hbar ck; \quad (30.8)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k, \quad (30.9)$$

в векторном виде

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}. \quad (30.10)$$

## 30.2. Давление света

Не очевидно, что поперечная волна давит на препятствие — вспомним волны на воде. А с корпускулами все очевидно: при

столкновении с поверхностью они оказывают давление. Рассчитаем давление фотонов, нормально падающих на поверхность. Пусть коэффициент отражения равен  $\rho$ , так что при падении в единицу времени на единицу площади  $N$  фотонов отражается  $\rho N$  фотонов. Каждый поглощенный фотон отдает свой импульс  $h\nu/c$  поверхности, а каждый отраженный меняет свой импульс на противоположный, так что воздействие и отданный импульс получается вдвое больше. Давление света равно импульсу, переданному единице поверхности в единицу времени:

$$p = \rho N 2h\nu/c + (1 - \rho)N h\nu/c = (1 + \rho)N h\nu/c. \quad (30.11)$$

Энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени, называется энергетической освещенностью (облученностью) и равна:

$$\mathcal{E} = N h\nu. \quad (30.12)$$

В единицу времени на поверхность попадают фотоны, расположенные от поверхности не далее чем на расстоянии, численно равное скорости света  $c$ . С учетом этого объемная плотность энергии излучения  $w$  выражается через энергетическую освещенность соотношением

$$w = \mathcal{E}/c. \quad (30.13)$$

Тогда можно получить связь давления света и объемной плотности энергии излучения:

$$p = (1 + \rho) \mathcal{E}/c = w(1 + \rho). \quad (30.14)$$

Отметим, что эту формулу можно получить и из волновой теории Максвелла.

Энергетическая освещенность границы атмосферы Земли составляет  $1400 \text{ Вт/м}^2$ . Считая эту границу абсолютной поглощающей поверхностью ( $\rho = 0$ ), получим давление  $p = 4,3 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2$ . Общее давление солнечного излучения на земную атмосферу равно  $6 \cdot 10^8 \text{ Н}$ , что в  $10^{13}$  раз меньше силы притяжения Солнца.

До поверхности Земли (в зависимости от высоты Солнца над горизонтом и длины пути света в атмосфере) доходит от 1100 до 40 Вт/м<sup>2</sup>. Так, в июле в ясный полдень в Москве до поверхности Земли может дойти 930 Вт/м<sup>2</sup>.

Давление света играет важную роль в астрономических и атомарных явлениях. Так, давление света наряду с давлением газа обеспечивает стабильность звезд, компенсируя силы гравитационного сжатия. Его приходится учитывать при расчете орбит искусственных спутников Земли. В атомах давление света приводит к эффекту световой отдачи, которую испытывает атом при испускании фотона. Важным перспективным применением давления света является проект *солнечного паруса*, который позволит разгонять космические корабли будущего до скорости, близкой к скорости света.

### 30.3. Фотоэффект. Уравнение Эйнштейна

Открытие фотоэффекта началось с наблюдения Г. Герца (1887 г.), который заметил, что электрический пробой воздуха требует меньшего напряжения, если освещать электроды ультрафиолетовым излучением. Детальные исследования явления были выполнены русским ученым А. Г. Столетовым. Выяснилось, что причиной фотоэффекта является испускание электронов веществом под действием падающего света. Различают внешний и внутренний фотоэффекты. *Внешним фотоэффектом* (или просто *фотоэффектом*) называют испускание электронов веществом под влиянием электромагнитного излучения. *Внутренним фотоэффектом* называют переход электронов из связанных состояний в свободные внутри полупроводника или диэлектрика под влиянием электромагнитного излучения, приводящий к повышению электропроводности.

В рамках классической электродинамики можно было бы предположить, что чем выше интенсивность электромагнитной волны, тем больше энергия выбиваемых при фотоэффекте электронов. Однако эксперименты показали, что энергия выбиваемых при фотоэффекте электронов зависит от частоты волны, а увеличение интенсивно-

сти электромагнитной волны вызывает лишь рост количества выбиваемых электронов.

В экспериментах использовался стеклянный вакуумный баллон с металлическими электродами (рис. 30.1). Катод через кварцевое окно (пропускающее ультрафиолетовое излучение) освещался светом с длиной волны  $\lambda$ . При этом снималась зависимость силы фототока  $I$  (тока, вызванного освещением) от приложенного напряжения  $U$ . На рис. 30.2 изображена характерная кривая зависимости силы фототока от приложенного напряжения.

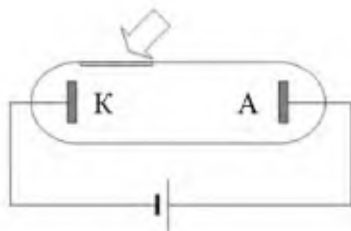


Рис. 30.1

Поведение этой кривой несложно интерпретировать с помощью квантовой теории. При достаточно больших положительных напряжениях на аноде относительно катода, фототок достигает насыщения  $I_n$ , так как все электроны, вырванные светом из катода, достигают анода. При этом чем больше фотонов, тем больше выбивается электронов, ток насыщения пропорционален интенсивности падающего света. Если напряжение на аноде отрицательно, то электрическое поле тормозит электроны. Анода могут достичь только те электроны, кинетическая энергия которых превышает работу по перемещению в поле  $|eU|$ . Если напряжение на аноде меньше  $-U_3$ , то кинетическая энергия выбитых электронов оказывается недостаточной, и фототок прекращается. Измеряя запирающее напряжение  $U_3$ , можно определить максимальную кинетическую энергию выбитых электронов. Зависимость запирающего напряжения  $U_3$  от частоты  $\nu$  падающего света представлена на рис 30.3.

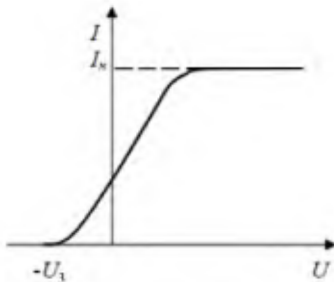


Рис. 30.2

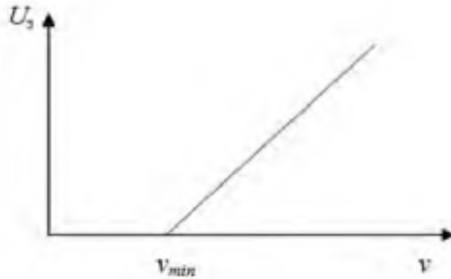


Рис. 30.3

Таким образом, экспериментально были установлены закономерности фотоэффекта:

1. Максимальная кинетическая энергия выбитых электронов линейно растет с увеличением частоты света  $\nu$  и не зависит от интенсивности света.

2. Для каждого вещества существует так называемая *красная граница фотоэффекта* — наименьшая частота  $\nu_{min}$ , при которой возможен фотоэффект.

3. Количество выбитых электронов пропорционально интенсивности света.

Эти свойства фотоэффекта с помощью квантовой теории и закона сохранения энергии впервые объяснил Альберт Эйнштейн. По закону сохранения энергии фотона  $h\nu$  тратится на работу по вырыванию электрона из металла (*работу выхода*  $A_0$ ) и на кинетическую энергию выбитого электрона  $T_{кин}$ :

$$h\nu = T_{кин} + A_0. \quad (30.15)$$

Это уравнение называется *уравнением Эйнштейна* для фотоэффекта.

Если выбитый электрон не является релятивистским, то уравнение Эйнштейна можно переписать в виде

$$h\nu = m v^2/2 + A_0, \quad (30.16)$$

где  $m$  — масса электрона,

$v$  — его максимальная скорость.

Отметим, что при выбивании часть энергии электрона может потеряться при взаимодействии с веществом. Поэтому, строго говоря, уравнение Эйнштейна определяет лишь максимальную кинетическую энергию и максимальную скорость выбитых электронов.

Работа выхода определяется силой связи электрона с поверхностью конденсированной среды (твёрдого тела или жидкости). Среди металлов наименьшая работа выхода (примерно 2 эВ) — у щелочных металлов (цезий, рубидий, калий), а наибольшая (примерно 6 эВ) — у металлов группы платины.

В соответствии с уравнением Эйнштейна кинетическая энергия выбитых электронов зависит не от интенсивности света, а от частоты света и работы выхода. Красная граница фотоэффекта имеет место при нулевой кинетической энергии выбитых электронов:

$$h\nu_{min} = A_0. \quad (30.17)$$

Чем больше падает фотонов, тем больше выбивается электронов.

Отметим также, что при фотоэффекте электрон приобретает кинетическую энергию не постепенно (как можно было бы предположить в волновой теории — ускоряясь электрическим полем волны), а практически мгновенно — в результате акта столкновения.

## 30.4. Эффект Комптона

В 1923 г. А. Комптон поставил эксперимент по рассеянию рентгеновских лучей на графите. *Рассеяние частиц — процесс взаимодействия частиц со средой, при котором они меняют направление движения.* Известно, что видимый свет рассеивается на мелких, но все же макроскопических частицах, размер которых сравним с длиной волны света — например, на пыли или мелких каплях жидкости. В свою очередь, рентгеновские лучи имеют гораздо меньшую длину волны и могут рассеиваться на электронах и атомах.

В соответствии с волновой теорией длина волны излучения не должна меняться при рассеянии, поскольку электрон под действием

поля световой волны совершает вынужденные колебания на частоте волны и должен излучать рассеянные волны той же частоты.

Однако Комптон обнаружил в рассеянном излучении фотоны с увеличенной длиной волны, причем разность длин волн  $\Delta\lambda$  по сравнению с исходной длиной волны зависит лишь от угла рассеяния. Объяснить это смогла лишь квантовая теория.

Рассмотрим сначала рассеяние рентгеновских лучей на внешних, валентных электронах атомов. Энергия связи таких электронов мала по сравнению с энергией рентгеновских фотонов, и этой энергией связи можно пренебречь. Поэтому будем рассматривать такие электроны в процессе столкновения с рентгеновскими фотонами как свободные. Опишем упругое столкновение фотона, имеющего энергию  $E_0 = h\nu_0 = hc/\lambda_0$  и импульс  $p_0 = h\nu_0/c = h/\lambda_0$ , с покоящимся электроном. Учтем, что фотон столь высокой энергии способен сообщить электрону скорость, сравнимую со скоростью света. Поэтому запишем законы сохранения энергии и импульса в релятивистском виде:

$$hc/\lambda_0 + mc^2 = hc/\lambda + \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (30.18)$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e, \quad (30.19)$$

где  $mc^2$  — энергия покоя электрона;

$hc/\lambda$  — энергия рассеянного фотона;

$\sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4}$  — релятивистская полная энергия электрона после столкновения;

$\vec{p}$  и  $\vec{p}_e$  — импульсы соответственно фотона и электрона после столкновения.

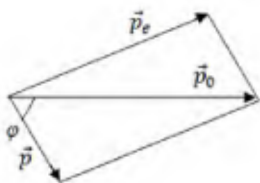


Рис. 30.4

Векторный закон сохранения проиллюстрирован рис. 30.4. В качестве одного из основных параметров задачи выбран угол  $\varphi$  между начальным и конечным импульсом фотона — угол рассеяния фотона.

В законе сохранения энергии необходимо избавиться от корня, уединив его и возведя полученное уравнение в квадрат. Тогда после преобразования получим для квадрата импульса электрона:

$$p_e^2 = (h/\lambda_0 - h/\lambda)^2 + 2m(hc/\lambda_0 - hc/\lambda). \quad (30.20)$$

В законе сохранения импульса уединим импульс электрона и возведем уравнение в квадрат:

$$p_e^2 = p_0^2 - 2p_0p \cos\varphi + p^2 = \frac{h^2}{\lambda_0^2} - 2\frac{h^2}{\lambda_0\lambda} \cos\varphi + \frac{h^2}{\lambda^2}. \quad (30.21)$$

Приравняв правые части последних двух уравнений, после упрощений получим формулу Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) = \Lambda(1 - \cos\varphi) = 2\Lambda \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (30.22)$$

где  $\Lambda = \frac{h}{mc} = 2,43 \cdot 10^{-12}$  м — *комптоновская длина волны электрона*. (30.23)

Таким образом, комптоновская длина волны является константой, выражающейся через фундаментальные константы  $h$ ,  $c$  и  $m$ .

Эксперимент показывает, что рассеяние рентгеновских лучей происходит не только на электронах, но и на атомах. Однако при этом комптоновская длина волны вследствие величины массы атома оказывается на несколько порядков меньшей, чем в случае электронов. На несколько порядков меньшим оказывается и увеличение длины волны, и этим увеличением обычно можно пренебречь. Поэтому на эксперименте при изучении рассеянных фотонов наряду со смещенной линией с длиной волны  $\lambda$  наблюдается и несмещенная линия практически с первоначальной длиной волны  $\lambda_0$ .

## 31. Тепловое излучение

### 31.1. Равновесное излучение.

#### Лучеиспускательная и лучепоглощательная способность. Черное и серое тело

Каждое тело, имеющее ненулевую (по Кельвину) температуру, излучает. Ведь в соответствии с распределением Максвелла и

Больцмана часть частиц тела имеет энергию, достаточную для возбуждения молекул с последующим излучением фотонов. *Излучение* света, обусловленное нагреванием тел, называют *тепловым*. Рассмотрим такое излучение для системы тел.

При термодинамическом равновесии все части системы тел имеют одну температуру. При этом энергия теплового излучения, испускаемого каждым телом, компенсируется поглощаемой этим телом энергией. В такой ситуации имеет место *равновесное излучение* — тепловое излучение, находящееся в термодинамическом равновесии с веществом.

Количественной характеристикой теплового излучения является *спектральная лучеиспускательная способность (спектральная энергетическая светимость) тела* — мощность излучения в единичном интервале частот с единицы площади поверхности тела, имеющего температуру  $T$ :

$$R_{\nu,T} = \frac{dW_{\text{изл}}}{d\nu}, \quad (31.1)$$

где  $dW_{\text{изл}}$  — энергия излучения, испускаемого в единицу времени с единицы площади в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ .

Эту формулу можно выразить и через длины волн, воспользовавшись тем, что интервалу частот соответствует интервал длин волн:

$$dW_{\text{изл}} = R_{\nu,T} d\nu = R_{\lambda,T} d\lambda. \quad (31.2)$$

Поскольку  $c = \lambda\nu$ , то

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{\lambda^2}{c}. \quad (31.3)$$

В результате, опустив несущественный здесь знак минус, получим искомую связь:

$$R_{\nu,T} = R_{\lambda,T} \lambda^2 / c. \quad (31.4)$$

Зависимость спектральной лучеиспускательной способности от длины волны называют *спектром излучения тела*.

Интегральная *лучеиспускательная способность* (энергетическая светимость) тела получается из спектральной лучеиспускательной способности интегрированием по всем частотам:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\nu,T} d\nu. \quad (31.5)$$

Лучеиспускательная способность измеряется в Вт/м<sup>2</sup>.

Введем теперь понятие *спектральной лучепоглощательной способности* (спектрального коэффициента поглощения), которая показывает долю поглощаемой телом падающей энергии света частотой  $\nu$ .

$$A_{\nu,T} = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW_{\nu}}, \quad (31.6)$$

где  $dW_{\nu}$  — энергия света частотой  $\nu$ , падающего на тело;

$dW_{\text{погл}}$  — поглощенная энергия света частотой  $\nu$ .

Иногда удобно пользоваться и понятием интегральной *лучепоглощательной способности* (коэффициента поглощения) для характерных распределений интенсивности света по частоте  $f(\nu)$ , которая показывает долю поглощаемой телом падающей энергии света.

$$A_{f,T} = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW_f}, \quad (31.7)$$

где  $dW_f$  — энергия света, падающего на тело, с распределением интенсивности по частоте  $f(\nu)$ ;

$dW_{\text{погл}}$  — поглощенная энергия света.

Лучеиспускательная и лучепоглощательная способность зависят от природы тела, его температуры и частоты излучения. Тело, способное полностью поглощать при любой температуре падающее излучение любой частоты, называется *черным*. Для черного тела:

$$A_{\nu,T} \equiv 1. \quad (31.8)$$

Сажа и черный бархат близки по оптическим свойствам к черному телу. Так, сажа в видимом диапазоне поглощает до 99% па-

дающего излучения, впрочем, инфракрасное излучение поглощается ей значительно хуже. Еще более идеальным черным телом является небольшое отверстие на замкнутой полости с зачерненной внутренней поверхностью. Попадая на это отверстие, свет исчезает за несколько переотражений на темной внутренней поверхности. По этой причине открытые окна квартир, освещаемых внешним светом, с улицы часто кажутся черными, даже несмотря на отсутствие зачернения стен. Часто используют понятие *серого тела*, для которого лучепоглощательная способность меньше единицы и является одинаковой для всех частот:

$$0 \leq A_{\nu,T} = A_T = \text{const} < 1. \quad (31.9)$$

Значения  $A_T$  в широком диапазоне температур для металлов равны 0,1–0,4, а для угля и окислов металлов — 0,5–0,9. Для инфракрасного диапазона тело человека можно в оценках считать серым телом света с  $A_T = 0,9$ .

## 31.2. Закон Кирхгофа

Между испускательными и поглощательными свойствами любого излучающего тела должна существовать связь. Ведь в эксперименте с равновесным тепловым излучением равновесие в системе может установиться только в том случае, если каждое тело будет излучать в единицу времени столько же энергии, сколько оно поглощает. Это означает, что тела, интенсивнее поглощающие излучение какой-либо частоты, будут это излучение интенсивнее испускать.

Пусть в замкнутой адиабатной оболочке в условиях термодинамического равновесия находятся два разных тела с одинаковой температурой. Каждое из них поглощает и излучает одинаковую энергию. Более того, спектр излучения каждого тела должен совпадать со спектром поглощения — иначе нарушились бы условия термодинамического равновесия. Так, если одно из тел активнее излучает ультрафиолетовые волны, то оно должно их активней и поглощать. Поэтому в соответствии с таким *принципом детального*

*равновесия* отношение испускательной и поглощательной способностей одинаково для всех тел в природе, включая черное тело и при данной температуре является одной и той же универсальной функцией частоты (или длины волны). Этот закон теплового излучения, установленный в 1859 г. Г. Кирхгофом при рассмотрении термодинамических закономерностей равновесных систем с излучением, можно записать через *универсальную функцию Кирхгофа*  $r_{\nu,T}$  в виде соотношения

$$\frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = r_{\nu,T}. \quad (31.10)$$

Из *закона Кирхгофа для излучения* (31.10) следует, что универсальная функция Кирхгофа  $r_{\nu,T}$  — это спектральная лучеиспуска- тельная способность черного тела. Излучение черного тела имеет универсальный характер в квантовой теории теплового излучения. Реальное тело излучает при любой температуре меньше энергии, чем черное тело. Зная лучеиспуска- тельную способность черного тела (универсальную функцию Кирхгофа) и лучепоглощательную спо- собность реального тела, из закона Кирхгофа можно определить энергию, излучаемую этим телом в любом диапазоне частот или длин волн. Поскольку подстановка закона Кирхгофа дает

$$R_T = \int_0^{\infty} A_{\nu,T} r_{\nu,T} d\nu, \quad (31.11)$$

то для серого тела

$$R_T = A_T \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = A_T R_e, \quad (31.12)$$

где  $R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu$  (31.13)

— *энергетическая светимость* черного тела.

### 31.3. Закон Стефана-Больцмана

Экспериментальные исследования Й. Стефана (1879 г.) и теоретические исследования Л. Больцмана (1884 г.) позволили доказать важный закон теплового излучения черного тела. Этот закон утверждает, что энергетическая светимость черного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры, т. е.

$$R_e = \sigma T^4, \quad (31.14)$$

где постоянная Стефана-Больцмана  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>).

Для реальных тел закон Стефана-Больцмана выполняется приближенно: с ростом температуры энергетические светимости всех тел увеличиваются.

Для серых тел зависимость энергетической светимости от температуры имеет вид

$$R = A_T R_e = A_T \sigma T^4. \quad (31.15)$$

Для серых тел иногда удобно использовать *эффективную радиационную температуру*  $T_p$ , которая определяется как температура черного тела, имеющего ту же энергетическую светимость, что и реальное тело. Радиационная температура тела всегда меньше истинной температуры тела  $T$ . Действительно, для реального тела вышеприведенная зависимость энергетической светимости от температуры даст

$$T_p = T \sqrt[4]{A_T}, \quad (31.16)$$

откуда  $T_p < T$ , поскольку у реальных тел  $A_T < 1$ .

### 31.4. Закон смещения Вина

В 1893 г. немецкий физик В. Вин теоретически рассмотрел термодинамический процесс сжатия излучения, заключенного в полости с идеально отражающими стенками. Учтя изменение частоты из-

лучения за счет эффекта Доплера при отражении от движущегося зеркала, Вин сделал вывод, что в выражение для лучеиспускательной способности температура входит лишь в виде произведения  $\lambda T$ . Это позволяет предсказать поведение функции лучеиспускательной способности. В частности, эта функция имеет максимум на длине волны  $\lambda_{\text{макс}}$ , которая зависит от температуры тела по закону

$$\lambda_{\text{макс}} T = \text{const} \quad (31.17)$$

В результате Вин сформулировал закон теплового излучения, в соответствии с которым длина волны, на которую приходится максимум лучеиспускательной способности черного тела, обратно пропорциональна его абсолютной температуре:

$$\lambda_{\text{макс}} = b/T, \quad (31.18)$$

где *постоянная Вина*  $b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

Этот закон называют *законом смещения Вина*. Выполняется он и для серых тел. Благодаря этому закону при обычных температурах тела излучают в основном в инфракрасном диапазоне, и это излучение не видно глазом. Так, если считать кожу человека черным телом температурой 309 К, то ее максимум лучеиспускательной способности приходится на длину волны 9,4 мкм. При сильном нагреве черного тела оно начинает светиться красным цветом, который после 1000 К переходит в оранжевый, а после 2000 К — в желтый. Белый цвет соответствует 6000 К — температуре поверхности Солнца. А при температуре тела свыше 7000 К тело приобретает голубоватый оттенок.

Закон смещения Вина в совокупности с законом Стефана-Больцмана позволяет объяснить явление, широко используемое в специальной технике — *ночное видение*. Ночью, при отсутствии солнечного света, человек в темноте перестает видеть окружающие предметы. Однако все они, имея ненулевую температуру, испускают электромагнитное тепловое излучение и ночью. Можно считать, что тепловое свечение отчетливо видно для тел температурой 900 К. Тогда в соответствии с законом Стефана-Больцмана тело обычной температуры (300 К) излучает в 100 ( $3^4$ ) раз меньше энергии. Более того,

из оценки с помощью закона Вина следует, что при средней температуре тел 300 К основная энергия их теплового излучения приходится на инфракрасное излучение длиной волны порядка 10 мкм. Излучение в видимой области спектра ( $0,4 \text{ мкм} < \lambda < 0,8 \text{ мкм}$ ) при таких температурах имеет слишком малую энергию и не может быть обнаружено невооруженным глазом.

Тем не менее тела, температура которых несколько больше, чем температура земной поверхности, могут быть зафиксированы как излучающие объекты. Несложно показать с помощью закона Стефана-Больцмана, что при обычных температурах повышение температуры на 1% (3 К) дает увеличение энергии свечения тела на 4%. Увидеть такие источники инфракрасного излучения можно только с помощью специальных приборов, в которых невидимое глазом излучение регистрируется датчиками инфракрасного излучения. С помощью современных биноклей и прицелов ночного видения наблюдатель может получить в темноте видимое изображение достаточно высокого качества человека на расстоянии нескольких сот метров или движущегося танка на расстоянии нескольких километров. А пилотажные очки ночного видения позволяют управлять вертолетом практически круглые сутки.

### 31.5. Формула Рэлея-Джинса

Попробуем теперь оценить возможный вид универсальной функции Кирхгофа (спектральной лучеиспускательной способности черного тела)  $r_{\nu,T}$ . Эту функцию можно строго найти, рассмотрев стоячие волны теплового равновесного излучения в замкнутой полости. Но для упрощения оценки будем исходить из *соображений размерности*. С одной стороны,  $r_{\nu,T}$  — это энергия, излучаемая в секунду в единичном интервале частот с квадратного метра поверхности тела. Поэтому ее размерность

$$[r_{\nu,T}] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}. \quad (31.19)$$

С другой стороны,  $r_{\nu,T}$  является функцией температуры (которую в данном случае логично определять средней энергией молекул размерностью [кТ] = Дж) и частоты ( $[\nu] = \text{с}^{-1}$ ). Из этих величин нельзя составить комбинацию требуемой размерности  $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$ . Однако для описания светового излучения естественным добавлением в формулу может являться скорость света  $c$  размерностью м/с. Из этих трех величин можно составить единственную комбинацию требуемой размерности, что позволяет получить из соображений размерности оценку вида универсальной функции Кирхгофа:

$$r_{\nu,T} \approx \frac{\nu^2 kT}{c^2}. \quad (31.20)$$

Строгий вывод показывает, что полученная оценка должна быть дополнена безразмерным коэффициентом  $2\pi$ . В результате имеем для универсальной функции Кирхгофа (спектральной лучеиспускательной способности черного тела) формулу Рэлея-Джинса:

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2 kT}{c^2}. \quad (31.21)$$

Эта формула хорошо согласуется с экспериментом при малых частотах и больших температурах. Однако при больших частотах эта формула не может быть верной, поскольку в соответствии с (31.13) дает бесконечную интегральную лучеиспускательную способность:

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu,T} d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi\nu^2 kT}{c^2} d\nu \rightarrow \infty. \quad (31.22)$$

Таким образом, полученная в рамках классической физики формула Рэлея-Джинса дает парадоксальный результат: мощность теплового излучения любого нагретого тела должна быть бесконечной. Этот парадокс физики назвали *ультрафиолетовой катастрофой*.

## 31.6. Квантовая гипотеза и закон Планка. Связь закона Планка и законов излучения абсолютно черного тела

Парадокс излучения черного тела был решен Максом Планком с помощью гипотезы о том, что в соответствии с теорией вынужденных колебаний тело излучает и поглощает энергию не непрерывно, а квантами. Он представил тело как совокупность осцилляторов, которые совершают колебания частотой  $\nu$  и могут получать или отдавать энергию квантами величиной  $h\nu$ . Каждому осциллятору соответствует колебательная степень свободы, причем на эту степень в квантовой теории может приходиться средняя энергия, существенно меньшая  $kT$  (средняя энергия  $kT$  приходится на колебательную степень свободы в классической теории).

Рассмотрим эту задачу подробнее. Энергия осциллятора в квантовой физике может принимать дискретные значения:

$$\varepsilon = nh\nu, \quad (31.23)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Распределение энергий по осцилляторам определяется распределением Больцмана:

$$N_n = N_0 \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right). \quad (31.24)$$

Это распределение позволяет найти среднюю энергию, приходящуюся на осциллятор:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{ср}} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N_n \varepsilon_n}{\sum_{n=0}^{\infty} N_n} = h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)} = \\ &= h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-na)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-na)} = -h\nu \frac{d}{da} \ln \left( \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-na) \right), \end{aligned} \quad (31.25)$$

где  $a = \frac{h\nu}{kT}$ .

Выражение под логарифмом — это сумма членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем  $\exp(-a)$ , равная  $\frac{1}{1-\exp(-a)}$ . В результате средняя энергия осциллятора

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{ср}} &= -h\nu \frac{d}{da} \ln \frac{1}{1-\exp(-a)} = \\ &= h\nu \frac{d}{da} \ln(1-\exp(-a)) = \frac{h\nu \exp(-a)}{1-\exp(-a)} = \\ &= \frac{h\nu}{\exp a - 1} = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.\end{aligned}\quad (31.26)$$

Заменяв в формуле Рэля-Джинса классическую среднюю энергию осциллятора  $kT$  на полученную квантовую, получим *закон Планка* для спектральной лучеиспускательной способности черного тела:

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.\quad (31.27)$$

Этот закон в широком диапазоне параметров хорошо согласуется с экспериментом и позволяет получить частные законы излучения черного тела. Так, разложение в ряд для  $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$  экспоненты дает формулу Рэля-Джинса.

Для энергетической светимости черного тела табличный интеграл приводит к следующему результату:

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu,T} d\nu = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2 h^3} T^4,\quad (31.28)$$

что дает для постоянной Стефана-Больцмана хорошо согласующееся с экспериментом выражение через фундаментальные физические константы:

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2 h^3}.\quad (31.29)$$

Из закона Планка следует и закон смещения Вина, определяющий длину волны, на которую приходится максимум лучеиспускательной способности черного тела в зависимости от температуры. Приравнивание производной от закона Планка к нулю дает трансцендентное уравнение. Метод последовательных приближений позволяет получить решение этого уравнения:

$$b = \frac{hc}{4,965k}. \quad (31.30)$$

## 32. Планетарная модель атома и спектры

### 32.1. Опыты Резерфорда. Классическая модель атома

Представление об атомах как неделимых мельчайших частицах вещества возникло еще в древности. В XVIII в. А. Лавуазье и М. В. Ломоносов доказали реальность существования атомов. Русский химик Д. И. Менделеев разработал в 1869 г. периодическую систему элементов, показывающую единую природу атомов. В 1896 г. А. Беккерель обнаружил радиоактивность — испускание атомами невидимых проникающих излучений. В 1897 г. Дж. Томсон открыл составную частицу атома — электрон и измерил отношение заряда электрона к массе. Стало понятно, что атомы вещества имеют сложное внутреннее строение. В электрически нейтральном атоме легкие электроны несут отрицательный заряд, а основная часть массы атомов связана с положительным зарядом. В 1903 г. Дж. Томсон предположил, что атом является шаром, имеющим радиус примерно  $10^{-10}$  м с равномерно распределенным по объему положительным зарядом и вкраплением электронов — по типу булочки с изюмом.

Первые эксперименты по исследованию внутренней структуры атомов были выполнены Э. Резерфордом в 1909–1911 гг. Резерфорд

подверг бомбардировке  $\alpha$ -частицами фольгу, состоящую их атомов тяжелых металлов (платины, золота, серебра, меди и др.). Возникающие при радиоактивном распаде  $\alpha$ -частицы с кинетической энергией 5 МэВ (скорость порядка  $10^7$  м/с) представляют собой полностью ионизированные атомы гелия. При этом наблюдалось частичное рассеяние (изменение направления движения)  $\alpha$ -частиц. Такое рассеяние тяжелых  $\alpha$ -частиц по законам механики не могло обеспечиваться столкновениями с легкими электронами. Поэтому причиной рассеяния могли стать лишь столкновения со столь же тяжелым положительным зарядом атомов.

Однако небольшая вероятность рассеяния свидетельствовала о том, что положительный заряд сосредоточен в малой области атома. Резерфорд предположил, что эта область расположена в центре атома и назвал ее *атомным ядром*. Анализ опытов Резерфорда показал, что диаметр ядра не превышает  $10^{-14}$ – $10^{-15}$  м. Ядро занимает  $10^{-12}$  часть объема атома, но содержит **весь** положительный заряд и не менее 99,95% массы атома. Плотность ядерного вещества составляет  $\rho \approx 10^{18}$  кг/м<sup>3</sup>. Впоследствии установили, что если заряд электрона принять за единицу, то заряд ядра равен номеру данного элемента в периодической системе элементов Менделеева.

Резерфорд в рамках классических представлений предложил *планетарную модель атома*. Согласно этой модели в центре атома располагается тяжелое положительно заряженное ядро. Вокруг ядра, подобно планетам вокруг Солнца, вращаются легкие отрицательные электроны. Находясь в состоянии покоя электроны не могут, так как под действием кулоновских сил притяжения ядра они упали бы на ядро. Однако планетарная модель оказалась неспособной объяснить стабильность существования атома. По законам классической электродинамики, движущийся с ускорением заряд должен излучать электромагнитные волны, уносящие энергию. Поэтому за короткое время порядка  $10^{-8}$  с электроны в атоме Резерфорда должны истратить всю свою энергию и упасть на ядро. Стало понятно, что внутренние процессы в атоме не подчиняются классическим законам.

В классической боровской теории наиболее простым и эффективным оказалось рассмотрение *водородоподобного атома*, кото-

рый имеет 1 электрон зарядом  $-e$  на орбите и ядро зарядом  $Ze$ . В число водородоподобных атомов входят сам атом водорода и водородоподобные ионы, обладающие единственным электроном. Масса ядра на несколько порядков больше массы электрона, поэтому ядро в первом приближении можно считать неподвижным и рассматривать только движение электрона. Между ядром и электроном действует кулоновская сила притяжения  $kZe^2/r^2$ , обеспечивающая центростремительное ускорение  $v^2/r$  и движение по окружности радиуса  $r$ :

$$mv^2/r = kZe^2/r^2, \quad (32.1)$$

откуда

$$mv^2 = kZe^2/r. \quad (32.2)$$

Здесь возникает еще одна проблема — проблема размера атома. Из полученного уравнения не следует никаких ограничений на радиус орбиты электрона. Классическая механика позволяет атому иметь любой размер, опыт же показывает, что  $r \approx 10^{-10}$  м.

## 32.2. Постулаты Бора и их следствия

*Проблемы стабильности и размера атома* были частично решены Н. Бором на основе двух сформулированных им постулатов для водородоподобного атома.

*Первый постулат Бора.* Существуют стационарные состояния атома, в которых он не излучает электромагнитных волн и момент импульса электрона  $L_n$  кратен перечеркнутой постоянной Планка (постулат квантования момента импульса):

$$L_n = m_e v r_n = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \quad (32.3)$$

где  $m_e$  — масса;

$v$  — скорость;

$r_n$  — радиус круговой орбиты электрона. Число  $n$  называют главным квантовым числом.

*Второй постулат Бора.* Излучение испускается или поглощается в виде квантов энергии  $\hbar\omega$  при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое:

$$\hbar\omega = E_n - E_m, \quad (32.4)$$

где  $E_n$  и  $E_m$  — энергии стационарных состояний атома.

Исключим из уравнений  $m_e v^2 = kZe^2/r_n$  и  $L_n = m_e v r_n = n\hbar$  скорость  $v$ . В результате для радиусов стационарных орбит  $r_n$  получим

$$r_n = n^2 \hbar^2 / (k m_e Z e^2) = 4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2 / (m_e Z e^2). \quad (32.5)$$

Радиус первой орбиты атома водорода ( $n = 1, Z = 1$ ) называется *первым боровским радиусом* (или просто *боровским радиусом*):

$$r_1 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m_e e^2) = 0,0529 \text{ нм}. \quad (32.6)$$

Полная энергия  $E$  водородоподобного атома равна сумме кинетической энергии  $T = m_e v^2/2$ , и отрицательной потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром  $U = -kZe^2/r$ , т. е.

$$E = m_e v^2/2 - kZe^2/r. \quad (32.7)$$

Из уравнений  $m_e v^2 = kZe^2/r$  следует, что кинетическая энергия вдвое меньше модуля отрицательной потенциальной энергии, откуда имеем для полной энергии:

$$E = -kZe^2/(2r). \quad (32.8)$$

Подставив сюда выражение для  $r_n$ , получим полную энергию стационарного состояния водородоподобного атома, зависящую от главного квантового числа  $n$ :

$$E_n = -k^2 Z^2 m_e e^4 / (2 \hbar^2 n^2). \quad (32.9)$$

Состояние атома при главном квантовом числе  $n = 1$  называют *основным состоянием атома*. Если  $n > 1$ , то *состояние атома* называют *возбужденным*. Для примера вычислим энергию основного состояния атома водорода:

$$E_1 = -k^2 m_e e^4 / (2 \hbar^2) = -2,18 \cdot 10^{18} \text{ Дж} = -13,6 \text{ эВ}. \quad (32.10)$$

Эта энергия определяет *энергию ионизации*  $E_u$  атома водорода — энергию, необходимую для отрыва электрона от атома и удаление его на большое расстояние:

$$E_u = -E_1 = k^2 m_e e^4 / (2 \hbar^2) = 2,18 \cdot 10^{18} \text{ Дж} = 13,6 \text{ эВ}. \quad (32.11)$$

С учетом коэффициента перевода энергии в электронвольты можно записать для атома водорода:

$$E_n = -13,6/n^2 \text{ эВ} \quad (32.12)$$

и для водородоподобного атома:

$$E_n = -13,6 Z^2/n^2 \text{ эВ}. \quad (32.13)$$

### **32.3. Дискретность энергетических уровней в атоме и происхождение линейчатых спектров. Опыты Франка и Герца**

Согласно второму постулату Бора, при переходе электрона с одной стационарной орбиты с энергией  $E_n$  на другую с энергией  $E_m < E_n$  водородоподобный атом испускает квант света, частота  $\nu_{nm}$  которого

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{m_e Z^2 e^4}{8 \varepsilon_0^2 \hbar^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (32.14)$$

Эта формула согласуется с полученной ранее эмпирически *формулой Ридберга* для спектральных серий атома водорода:

$$\nu_{nm} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (32.15)$$

где  $R = \frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 \hbar^3}$  — постоянная Ридберга (32.16)

Таким образом, боровская теория атома водорода и водородоподобных ионов показала хорошее согласие с экспериментом. Почти одновременно с созданием теории Бора было получено прямое экс-

периментальное доказательство существования стационарных состояний и квантования энергии у сложных атомов.

Дискретность энергетических состояний была продемонстрирована в 1913 г. в опыте Д. Франка и Г. Герца, в котором исследовалось столкновение электронов с атомами ртути. Оказалось, что если энергия электронов меньше 4,9 эВ, то их столкновение с атомами ртути происходит упруго, без потери энергии. А если энергия электронов достигает 4,9 эВ и более, то имеет место неупругое столкновение с атомами ртути, и электроны теряют 4,9 эВ. При этом атомы ртути, поглощая энергию, переходят из основного состояния в первое возбужденное состояние, причем

$$E_2 - E_1 = 4,9 \text{ эВ}. \quad (32.17)$$

В соответствии с теорией Бора при обратном самопроизвольном процессе атом должен испускать фотоны частотой

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ Гц}. \quad (32.18)$$

Триумфом теории Бора стало то, что спектральная линия с такой частотой была действительно обнаружена в ультрафиолетовой части спектра излучения ртути. Стало понятно, что атомы — это квантовые системы с дискретными энергетическими уровнями.

Однако попытки количественно применить теорию Бора к сложным атомам столкнулись с большими трудностями. И это не удивительно. Ведь даже атом с двумя электронами требует решения физической задачи взаимодействия трех тел (ядра и 2 электронов), что гораздо сложнее, чем задача взаимодействия двух тел водородоподобного атома (ядра и электрона). К тому же Бор не смог дать физическое объяснение правилу квантования. Введение понятия о дискретных энергетических уровнях противоречит классической физике. Поэтому возникла проблема, не противоречит ли квантовая теория классической физике. Тем не менее впоследствии выяснилось, что квантовая физика не отменила основных классических законов сохранения энергии, импульса, электрического заряда и др.

## 32.4. Спектры атома водорода и водородоподобных ионов. Недостатки теории Бора

Рассмотрим подробнее энергетические уровни атома водорода  $E_n$  в зависимости от главного квантового числа  $n$ . В области отрицательных значений полной энергии энергетический спектр электрона является дискретным, причем энергии состояний довольно быстро стремятся к нулю:

$$E_1 = -13,6 \text{ эВ}; E_2 = E_1/4 = -3,4 \text{ эВ}; E_3 = E_1/9 = -1,51 \text{ эВ}; \\ E_4 = E_1/16 = -0,85 \text{ эВ}; \dots \quad (32.19)$$

В области положительных энергий электрон является свободным и имеет непрерывный энергетический спектр.

Обычно атом находится в основном состоянии с наименьшим значением энергии  $E_1$ . Если атом получает дополнительную энергию (например, при столкновении с ускоренной частицей), то может произойти *возбуждение атома* с переходом электрона на орбиту большего радиуса. Если переданная энергия превышает 13,6 эВ, то электрон отрывается от атома, и происходит *ионизация атома*. Возбужденное состояние атома не является стабильным, поскольку атом стремится занять состояние с наименьшей энергией. Поэтому через время обычно порядка  $10^{-8}$  с возбужденный атом самопроизвольно (спонтанно) переходит в состояние с меньшей энергией, излучая при переходе фотон.

В соответствии с формулой Ридберга частота излучаемого при переходе фотона

$$\nu = R(m^{-2} - n^{-2}), \quad (32.20)$$

где  $R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$  — постоянная Ридберга (32.21)

В оптике для характеристики света часто используют не частоту, а длину волны. Так как  $\lambda = c/\nu$ , то для длины волны  $\lambda$  получим выражение:

$$\lambda^{-1} = R' (m^2 - n^2), \quad (32.22)$$

$$\text{где } R' = R/c = 1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \quad (32.23)$$

тоже называют постоянной Ридберга. Две постоянные Ридберга различают по размерности.

В соответствии с теорией Бора в спектре атома водорода выделяют *спектральные серии*, определяемые номером  $m$  уровня, на который происходит квантовый переход. Естественно, что переход на уровень  $m$  с излучением фотона может происходить только с более высокого уровня  $n > m$ . Первые серии названы именами физиков:

$$m = 1, \text{ серия Лаймана } \lambda^{-1} = R' (1 - n^2), n = 2, 3, 4, \dots;$$

$$m = 2, \text{ серия Бальмера } \lambda^{-1} = R' (2^2 - n^2), n = 3, 4, 5, \dots;$$

$$m = 3, \text{ серия Пашена } \lambda^{-1} = R' (3^2 - n^2), n = 4, 5, 6, \dots;$$

$$m = 4, \text{ серия Брэкета } \lambda^{-1} = R' (4^2 - n^2), n = 5, 6, 7, \dots; \text{ и т. д.}$$

Отметим, что серия Бальмера лежит в видимой части спектра, серия Лаймана — в ультрафиолетовой части, серии Пашена, Брэкета и т. д. — в инфракрасной части спектра.

Теория Бора позволяет легко описать свойства любых водородоподобных атомов — атомных систем, содержащих один электрон, движущийся в поле ядра с положительным зарядом  $+Ze$ . Помимо атома водорода это однократно ионизированный гелий  $\text{He}^+$  ( $Z = 2$ ), двукратно ионизированный литий  $\text{Li}^{2+}$  ( $Z = 3$ ), трехкратно ионизированный бериллий  $\text{Be}^{3+}$  ( $Z = 4$ ), и т. д. Как видно из полученных выше формул, энергетический спектр водородоподобного иона получается из водородного спектра умножением на  $Z^2$ , а радиус орбит электрона оказывается в  $Z$  раз меньше, чем в атоме водорода.

Нильс Бор в своей теории водородоподобного атома впервые реализовал идею квантования энергии частицы, движущейся в силовом поле. Однако эта теория не может рассматриваться как законченная. Описывая атом законами классической физики, Бор просто эмпирически определил стационарные орбиты, на которых электрон не излучает электромагнитные волны. Кроме того, не удалось попытки Бора обобщить теорию и сформулировать постулаты квантования для сложных атомов, обладающих более чем одним электроном. Лишь учет волновых свойств движущегося в атоме электрона

позволяет последовательно описать атомные системы. Перейдем же к этому последовательному описанию.

## 33. Волны де Бройля и волновая функция

### 33.1. Гипотеза де Бройля и ее экспериментальное подтверждение

Установление корпускулярно-волнового дуализма света дало толчок развитию физики, в первую очередь квантовой физики. В 1924 г. французский физик Луи де Бройль предположил, что корпускулярно-волновой дуализм имеет универсальный характер. Согласно гипотезе де Бройля каждая материальная частица обладает волновыми свойствами, причем соотношения, связывающие волновые и корпускулярные характеристики частицы, остаются такими же, как и в случае электромагнитного излучения:

$$p = \hbar k = h/\lambda \quad (33.1)$$

и

$$E = \hbar \omega. \quad (33.2)$$

Таким образом, движущейся частице по аналогии соответствует волна длиной волны де Бройля

$$\lambda_B = h/p \quad (33.3)$$

и частотой

$$\nu = E/h. \quad (33.4)$$

Эти соотношения по сути дают связь между волновыми и корпускулярными свойствами частицы, причем они справедливы как в релятивистском, так и в нерелятивистском случаях.

Сразу отметим, что формула для длины волны де Бройля имеет в квантовой физике фундаментальное значение. А вот формула для частоты волны де Бройля большого физического смысла не несет, поскольку полная энергия часто определена с точностью до кон-

станты, например, из-за того, что потенциальная энергия определена с точностью до константы. С этой неоднозначностью определения частоты волны де Бройля традиционно связана инициированная еще самим де Бройлем некая путаница в квантовой физике.

Плоская волна частотой  $\omega$ , распространяющаяся вдоль оси  $x$ , в волновой теории представляется решением волнового уравнения в виде тригонометрической функции для отклонения от положения равновесия:

$$\psi(x,t) = A \cos(\omega t - kx). \quad (33.5)$$

Часто удобно представлять такую волну другим решением волнового уравнения в комплексной форме:

$$\psi(x,t) = A \exp(-i(\omega t - kx)), \quad (33.6)$$

где  $i$  примем равным

$$i = \sqrt{-1}. \quad (33.7)$$

(Исторически сложилось так, что в показателе экспоненты стоит знак «минус».) В соответствии с описывающей комплексные числа формулой Эйлера

$$\exp(ia) = \cos a + i \sin a. \quad (33.8)$$

Поэтому косинусоидальное решение волнового уравнения (33.5) может считаться действительной частью комплексного экспоненциального решения (33.6). Экспоненциальное решение может обладать рядом достоинств. Например, его проще дифференцировать, чем косинусоидальное. Да и модуль такой комплексной экспоненты всегда равен единице, что может упростить условие нормировки.

В результате в соответствии с гипотезой де Бройля свободную частицу импульсом  $p$  и энергией  $E$ , движущуюся вдоль оси  $x$ , описывает плоская волна

$$\psi(x,t) = A \exp(-\frac{i}{\hbar}(Et - px)) = A \exp(\frac{i}{\hbar}(px - Et)), \quad (33.9)$$

распространяющаяся в том же направлении. Эту волну называют волной де Бройля.

В 1927 г. гипотеза де Бройля была подтверждена экспериментально К. Дэвиссоном и Л. Джермером, которые получили дифракционную картину при рассеянии пучка (волны) электронов на кристалле никеля. Положение дифракционных максимумов соответствовало известной формуле Брэгга-Вульфа. В 1948 г. российский физик В. А. Фабрикант показал, что волновые свойства присущи даже единичному электрону. Позже была продемонстрирована дифракция нейтронов, протонов, атомов и молекул.

Эти доказательства волновых свойств микрочастиц привели к выводу, что это универсальное свойство материи. Покажем, почему они не обнаружены экспериментально у макроскопических тел. По приведенным выше формулам оценки показывают, что, например, частице массой 1 мг, движущейся со скоростью 1 м/с, соответствует волна де Бройля с  $\lambda = 6,63 \cdot 10^{-28}$  м. Такая длина волны на много порядков меньше не только размеров самой пылинки, но и наименьшего известного в физике размера — радиуса ядра атомов, составляющего порядка  $10^{-15}$  м. Поэтому очевидно, почему *макроскопические тела проявляют только корпускулярные свойства и не проявляют волновых свойств.*

### **33.2. Свойства волн де Бройля: фазовая и групповая скорости, дисперсия**

Рассмотрим теперь *свойства волн де Бройля*. Прежде всего отметим, что *волны де Бройля в процессе распространения могут отражаться, преломляться, интерферировать, дифрагировать, испытывать дисперсию по обычным волновым законам*. По аналогии с обычной волной найдем *фазовую скорость волн де Бройля* — скорость, с которой распространяются точки волны с постоянной фазой. Условие постоянства фазы плоской волны имеет вид

$$Et - px = \text{const.} \quad (33.10)$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим фазовую скорость

$$v_{\phi} = \frac{dx}{dt} = \frac{E}{p}. \quad (33.11)$$

Так, для нерелятивистской частицы, движущейся со скоростью  $v$ ,  $E = \frac{mv^2}{2}$  и  $p = mv$ , откуда

$$v_{\phi} = \frac{E}{p} = \frac{v}{2}. \quad (33.12)$$

Впрочем, особого физического смысла эта формула не несет вследствие все той же относительности полной энергии.

Найдем теперь *групповую скорость волны де Бройля*. По определению

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}. \quad (33.13)$$

Для нерелятивистской частицы

$$v_{\text{гр}} = \frac{d(\frac{mv^2}{2})}{d(mv)} = v. \quad (33.14)$$

Дифференцирование релятивистского инварианта частицы  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$  дает  $2EdE = 2pdpc^2$ , откуда для групповой скорости получаем тот же результат:

$$v_{\text{гр}} = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} = \frac{mvc^2}{mc^2} = v. \quad (33.15)$$

Физический смысл формул для групповой скорости, определяющей скорость переноса энергии и передачи информации волной, ясен. Энергия и информация переносится волной де Бройля со скоростью движения частицы.

Рассмотрим теперь *дисперсию волн де Бройля*. В нерелятивистском случае из соотношений  $E = p^2/(2m)$ ,  $E = \hbar\omega$  и  $p = \hbar k$  следует зависимость частоты дебройлевской волны  $\omega$  от волнового вектора  $k$  (*уравнение дисперсии*):

$$\omega = \hbar k^2/(2m). \quad (33.16)$$

Изучение дисперсии сыграло в свое время большую роль в развитии положений квантовой механики. Для преодоления парадокса корпускулярно-волнового дуализма высказывалась идея рассматривать частицу как волновой пакет, составленный из волн де Бройля. Однако сильная дисперсия волн де Бройля приводит к быстрому расплыванию и развалу (примерно за  $10^{-26}$  с) волнового пакета. Такая рассчитанная нестабильность частиц-пакетов потребовала отказа от этой идеи.

### 33.3. Волны де Бройля и квантовые условия Бора. Частицы, проявляющие волновые свойства

Де Бройль объяснил квантование момента импульса электрона в теории Бора с помощью представления о волновых свойствах электрона. Для этого достаточно воспользоваться формулой, связывающей длину волны с импульсом тела. Чтобы волна, движущаяся вокруг ядра атома, была стационарной, длина орбиты должна быть кратной целому числу длин волн:

$$2\pi r = n\lambda = nh/p, \quad (33.17)$$

откуда в точности получается постулат квантования момента импульса  $m_e v r_n = n\hbar$ .

Найдем связь длины волны де Бройля с кинетической энергией для *нерелятивистских и релятивистских частиц*. В случае нерелятивистской частицы кинетическая энергия равна  $E = \frac{p^2}{2m}$  и

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}. \quad (33.18)$$

В релятивистском случае, когда скорость частицы сравнима со скоростью света в вакууме, связь между импульсом и кинетической энергией частицы определяется релятивистским инвариантом  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ , в котором полная релятивистская энергия  $E$  равна сумме кинетической энергии  $T$  и энергии покоя частицы  $mc^2$ :

$$(T + mc^2)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (33.19)$$

Отсюда можно выразить импульс через кинетическую энергию:

$$p = \sqrt{T(T + 2mc^2)}/c \quad (33.20)$$

и связь длины волны де Бройля с кинетической энергией  $T$  для релятивистских частиц:

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}. \quad (33.21)$$

Найдем теперь длину волны де Бройля нерелятивистского электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U$  В (и имеющего энергию  $U$  эВ):

$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{1,23 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{U}} \text{ (м)}. \quad (33.22)$$

Таким образом, при энергии 10–1000 эВ длина волны де Бройля электрона сравнима с размерами атомов и молекул, а также с расстоянием между атомами в конденсированном теле.

При энергиях в 100 кэВ и более (а такую энергию имеют электроны нижних орбит тяжелых атомов) электрон становится релятивистским, и его длина волны уменьшается до  $10^{-12}$  м.

Рассмотрим еще один пример — жидкий гелий при температуре кипения при нормальном давлении  $T_c = 4,2$  К. Поскольку кинетическая энергия атомов гелия определяется температурой:

$$E \approx kT_c \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}. \quad (33.23)$$

Тогда длина волны де Бройля атомов гелия

$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (33.24)$$

Это примерно равно расстоянию между атомами жидкого гелия, что означает, что жидкий гелий — квантовая система, в которой атомы гелия реально проявляют волновые свойства.

Сформулируем теперь критерий, когда волновые свойства важны в поведении частицы, а в каких случаях их можно не учитывать. По аналогии с оптикой волновые свойства частиц проявляются, ко-

гда длина волны де Бройля  $\lambda_B$  сравнима с характерными размерами области движения частицы  $L$ :

$$\lambda_B \approx L. \quad (33.25)$$

Если же длина волны де Бройля много меньше области движения частицы:

$$\lambda_B \ll L, \quad (33.26)$$

то волновыми свойствами можно пренебречь.

Часто для описания сложных процессов квантовый подход оказывается слишком громоздким, а классический — слишком неточным. В такой ситуации может оказаться удобной комбинация классического и квантового подходов, называемая *квазиклассикой*. Квазиклассический подход проявил свою эффективность, например, при расчетах сечений ионизации и возбуждения атомов и молекул.

### **33.4. Вероятность местонахождения микрочастицы. Волновая функция. Нормировка и ограничения на волновые функции. Принцип суперпозиции. Средние значения координат**

Из опытов по получению дифракционной картины в оптике известно, что интенсивность дифракционной картины пропорциональна квадрату амплитуды световой волны. С другой стороны, интенсивность определяется числом фотонов, падающих в данную точку дифракционной картины. Поэтому число фотонов в каждой точке картины пропорционально квадрату амплитуды волны. Если же число фотонов невелико (например, падает один фотон), то квадрат амплитуды определяет вероятность попадания фотона в данную точку.

Немецкий физик М. Борн в 1926 г. по аналогии предположил, что и для микрочастиц *интенсивность волны де Бройля в любой точке пространства пропорциональна вероятности обнаружить частицу в этой точке*. Иными словами, волна де Бройля определяет

вероятность обнаружения (локализации) частицы в данной точке в данное время. Это утверждение существенно изменило представление о нашем мире. В классической физике, если задать силы, действующие на тело и начальные условия, можно определить положение тела в любой последующий момент времени. В соответствии со сформулированной 200 лет назад П. Лапласом классической *концепцией абсолютного детерминизма* будущее мира предопределено на все времена. Однако в квантовой физике, согласно Борну, детерминизм отсутствует. Даже будущее положение одного электрона можно предсказать лишь с какой-то вероятностью — не говоря уж о будущем всего мира.

В оптике мы задавали вероятность нахождения фотона в данной точке квадратом амплитуды световой волны. Если задавать плоскую одномерную волну микрочастицы комплексной функцией  $\psi(x,t) = A \exp(-i(\omega t - kx))$ , то являющаяся действительной функцией вероятность пропорциональна квадрату ее модуля:

$$W = \text{const} |\psi|^2 = \text{const} \psi\psi^*, \quad (33.27)$$

где  $\psi^*$  — функция, комплексно сопряженная с  $\psi$ .

В общем случае функция  $\psi$  является трехмерной:

$$\psi = \psi(x,y,z,t). \quad (33.28)$$

Функция  $\psi(x,y,z,t)$  является основным носителем информации о корпускулярных и волновых свойствах микрочастицы и играет большую роль в квантовой физике, ее называют *амплитудой вероятности*, или *волновой функцией*, или  *$\psi$ -функцией*.

Таким образом, описание микрочастицы с помощью волновой функции носит статистический, вероятностный характер, причем квадрат модуля волновой функции определяет вероятность  $dW$  нахождения частицы в момент времени  $t$  в области  $dV$  с координатами от  $x$  до  $x+dx$ , от  $y$  до  $y+dy$ , от  $z$  до  $z+dz$ :

$$dW = |\psi|^2 dV, \quad (33.29)$$

$$dV = dx dy dz. \quad (33.30)$$

Связь волновой функции с вероятностью можно переписать в другом виде:

$$|\psi|^2 = \frac{W}{dV}, \quad (33.31)$$

откуда видно, что квадрат модуля волновой функции имеет смысл *плотности вероятности*, определяет вероятность нахождения частицы в единичном объеме в окрестности точки координатами  $x, y, z$ . Таким образом, физический смысл имеет не сама волновая функция, а квадрат ее модуля, которым задается интенсивность волн де Бройля.

Вероятность найти частицу в конечном объеме  $V$  находится интегрированием (33.29):

$$W = \int_V |\psi|^2 dV. \quad (33.32)$$

Вероятность нахождения частицы во всем пространстве равна единице, откуда следует *условие нормировки волновой функции*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1, \quad (33.33)$$

где интеграл вычисляется по всему бесконечному пространству (по координатам  $x, y, z$  от  $-\infty$  до  $\infty$ ).

Особо выделим плоскую волну де Бройля, для которой вероятность обнаружения частицы в любом месте одинакова, что делает нормировку (33.33) невозможной. Впрочем, отсутствие нормировки в этом случае обычно проблем не создает. А невозможность нормировки объясняется невозможностью реально создать плоскую волну, простирающуюся от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Отметим теперь естественные *ограничения на волновые функции*, связанные в первую очередь с ограничениями на вероятность.

Обычно функция  $\psi$  является *конечной* (и интеграл, характеризующий вероятность, не может быть больше единицы), *однозначной* (вероятность не может быть неоднозначной величиной) и *непрерывной* (вероятность не может изменяться скачком). Поскольку плотность потока вероятности выражается через градиент, то и первые производные волновой функции должны быть непрерывны. Еще одно свойство волновой функции можно связать с видом уравнения

Шредингера, описывающего поведение волновой функции (см. ниже): произведение  $U\psi$  (где  $U$  — потенциал) должно быть конечным, поэтому, если  $U = \infty$ , то  $\psi = 0$ .

Не вызывает удивления, что волновая функция, как и многие другие функции в физике, непрерывна вместе со своими производными. И именно это важное условие (наряду с условием ограниченности волновой функции) может вести к квантованию.

Важным свойством волновой функции является *принцип суперпозиции волновых функций*: если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , то она также может находиться и в состоянии  $\psi$ , описываемом линейной комбинацией этих функций:

$$\psi = \sum_{m=1}^n C_m \psi_m, \quad (33.34)$$

где  $C_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots, n$ ) — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию нормировки.

Сложение волновых функций (амплитуд вероятностей), а не вероятностей (квадратов модулей волновых функций) отличает квантовую теорию от классической статистической теории, в которой для независимых событий справедлива *теорема сложения вероятностей*. Принцип суперпозиции волновых функций лежит в основе решений ряда ключевых задач квантовой физики.

Будучи амплитудой вероятности, волновая функция позволяет статистически вычислять средние значения физических величин, характеризующих микрочастицу. Например, в соответствии с теорией вероятности среднее расстояние электрона от ядра

$$r_{cp} = \int_{-\infty}^{\infty} r |\psi|^2 dV. \quad (33.35)$$

### 33.5. Соотношение неопределенностей для координаты и импульса

В классической механике всякая частица движется по определенной траектории, так что в любой момент времени точно фикси-

рованы ее координата и импульс. Но из-за дуализма нельзя говорить о движении микрочастицы по определенной траектории и об одновременном определении точных значениях ее координаты и импульса. Так, нельзя определить длину волны в данной точке, поскольку волна является протяженным объектом. А монохроматическая волна задается бесконечной во времени и пространстве синусоидой и не имеет фиксированной координаты. И чем короче отрезок синусоиды, тем больше разброс длин волн. (Это можно показать, например, с помощью интеграла Фурье.) Импульс однозначно связан с длиной волны де Бройля. Поэтому чем больше мы получаем информации об импульсе микрочастицы, тем меньше имеем информации о ее координате. И наоборот.

Задолго до появления квантовой механики в оптике было получено соотношение между длиной цуга световой волны  $\Delta x$  и неопределенностью волнового числа этого цуга  $\Delta k$ :

$$\Delta x \Delta k \gtrsim 2\pi. \quad (33.36)$$

Воспользовавшись связью импульса движущейся вдоль оси  $x$  волны и волнового числа  $k = p_x/\hbar$ ,

$$\Delta k = \Delta p_x/\hbar, \quad (33.37)$$

получим выведенное в 1927 г. соотношение неопределенностей Гейзенберга для координаты и импульса:

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim h. \quad (33.38)$$

Аналогичные выражения можно получить и для других координат. Полученные соотношения справедливы лишь приблизительно.

Гейзенберг вывел соотношение неопределенностей на основе ряда мысленных экспериментов. Например, можно пытаться определить координату и импульс микрочастицы, осветив ее и рассмотрев в микроскоп. Но волновые свойства и дифракция используемых для измерения фотонов не позволяют получить точный результат. Уточнения можно пытаться добиться путем уменьшения длины волны фотонов. Но тогда растет энергия фотонов, которая в процессе

освещения микрочастицы не может частично не передаваться микро-частице, что опять же уменьшает точность результата измерения. Расчет показывает, что максимальная точность измерения определяется соотношением неопределенностей (33.38). Рассмотренный пример характерен тем, что *само измерение параметров микро-частицы в квантовой физике влияет на результат измерения.*

Соотношение неопределенностей можно вывести и на примере дифракции пучка электронов на узкой щели, размер которой сравним с длиной волны де Бройля  $\lambda$  электрона (рис. 33.1). В результате дифракции на экране наблюдается главный максимум, на который приходится основная доля интенсивности дифракционной картины. До прохождения через щель электроны двигались вдоль оси  $y$ , причем составляющая импульса  $p_x = 0$ , и  $\Delta p_x = 0$ , а координата  $x$  широкого пучка электронов является неопределенной. После прохождения электронов через щель происходит локализация положения в направлении оси  $x$  — с точностью до ширины щели  $\Delta x$ . При этом вследствие дифракции появляется разброс направлений движения электронов в пределах угла  $\alpha$ , соответствующего первому дифракционному минимуму (именно в таких пределах согласно теории дифракции сосредоточена преобладающая часть интенсивности дифрагирующей волны). Это приводит к появлению составляющей импульса  $p_x$  с разбросом (неопределенностью)

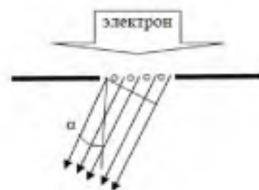


Рис. 33.1

$$\Delta p_x = p \sin \alpha = (h/\lambda) \sin \alpha. \quad (33.39)$$

В соответствии с теорией дифракции на щели в параллельных лучах (дифракции Фраунгофера) известно условие первого минимума:

$$\Delta x \sin \alpha = \lambda, \quad (33.40)$$

откуда имеем

$$\Delta x \Delta p_x = h. \quad (33.41)$$

А с учетом некоторой части электронов, попадающих за пределы главного максимума, разброс несколько больше, так что имеем соотношение неопределенностей (33.38).

Соотношение неопределенностей можно воспринимать как квантовое ограничение применимости классической механики к микрочастицам. Перепишем соотношение неопределенностей для нерелятивистского случая в виде

$$\Delta x \Delta v_x \gtrsim h/m. \quad (33.42)$$

Видно, что чем больше масса частицы, тем меньше неопределенности ее координаты и скорости и, следовательно, с большей точностью можно применять понятие траектории. Так, например, для электрона в атоме водорода неопределенность координаты электрона порядка размеров самого атома  $\Delta x \approx 10^{-10}$  м. Тогда из соотношения неопределенностей  $\Delta v_x \approx 7 \cdot 10^6$  м/с, что втрое превышает классическую скорость электрона в атоме водорода. Поэтому нельзя говорить о движении электрона в атоме водорода по определенной траектории. Но если скорость или масса микрочастицы на несколько порядков больше, то неопределенность координаты падает, и понятие траектории обычно является вполне оправданным.

### **33.6. Соотношение неопределенностей для времени и энергии. Принцип соответствия**

Рассмотрим теперь другую важную пару физических величин, также связанную соотношением неопределенностей — энергию  $E$  и время  $t$ .

Для вывода его представим следующий мысленный эксперимент. Пусть на экран с отверстием падает электрон. Выберем отверстие достаточно большим, чтобы пренебречь неопределенностью поперечного импульса. Закроем отверстие на время  $\Delta t$  заслонкой. Такую заслонку можно рассматривать как инструмент для определения координаты электрона. Электрон может взаимодействовать с

заслонкой такое же время, связанное с неопределенностью координаты в продольном направлении:

$$\Delta x = v\Delta t, \quad (33.43)$$

где  $v$  — скорость частицы.

Согласно соотношению неопределенностей для координаты и импульса

$$\Delta p \gtrsim h/\Delta x = h/(v\Delta t). \quad (33.44)$$

А связь энергии с импульсом  $E = p^2/(2m)$ ,  $dE = vdp$ ,  $\Delta E = v\Delta p$  позволяет из неопределенности импульса найти неопределенность энергии:

$$\Delta E = v\Delta p \gtrsim h/\Delta t, \quad (33.45)$$

откуда следует *соотношение неопределенностей Бора для энергии и времени*:

$$\Delta E \Delta t \gtrsim h. \quad (33.46)$$

Данное соотношение для времени и энергии можно интерпретировать следующим образом. Для того чтобы определить энергию частицы (системы) с точностью  $\Delta E$ , необходимо проводить измерения в течение промежутка времени

$$\Delta t \gtrsim h/\Delta E. \quad (33.47)$$

Так, если атом в возбужденном энергетическом состоянии живет время  $\Delta t$ , то энергетическая ширина уровня  $\Delta E$  дается соотношением

$$\Delta E \approx h/\Delta t. \quad (33.48)$$

Отсюда следует, что частота излученных фотонов также должна иметь неопределенность

$$\Delta\nu = \Delta E/h, \quad (33.49)$$

а линии спектра должны характеризоваться размытием частоты:

$$\nu = \nu_0 \pm \Delta E/h. \quad (33.50)$$

Опыт действительно показывает, что все спектральные линии размыты, причем, измеряя ширину спектральной линии, можно оценить время существования атома (в общем случае квантовой системы) в возбужденном (нестабильном) состоянии.

Подчеркнем еще раз, что соотношения неопределенностей важны для микрочастиц, а для макроскопических тел (вследствие крайней малости постоянной Планка) они не играют никакой практической роли.

Наряду с полученными выше соотношениями неопределенностей часто используются соотношения неопределенностей, в которых в правой части вместо обычной постоянной Планка  $h$  используется приведенная постоянная Планка  $\hbar$ . Здесь нет противоречия, поскольку эти соотношения оценочны и расхождение в  $2\pi$  раз не играет большой роли. Заметим, что сравнение предельных соотношений неопределенностей в виде

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar, \quad (33.51)$$

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar \quad (33.52)$$

с другими формулами, часто дает более точное согласие, чем для полученных ранее соотношений. Поэтому мы будем пользоваться как соотношениями, выраженными через  $h$ , так и соотношениями, выраженными через  $\hbar$ .

В заключение отметим, что из всех квантовых формул в пределе больших квантовых чисел получаются классические аналоги. Ведь когда переход из энергетического состояния в соседнее происходит за счет малой доли энергии, то такой переход может рассматриваться уже как непрерывный, а не квантовый. По этому поводу в науке сформулирован известный *принцип соответствия*: *любая новая физическая теория должна в некотором пределе воспроизводить результаты старой проверенной теории*. Мы уже рассматривали этот принцип на примере формулы Планка, а ниже покажем его подтверждение на примере других квантовых формул.

## 34. Уравнение Шредингера

### 34.1. Уравнение Шредингера для свободной частицы

Мы уже рассмотрели многие свойства волны де Бройля и решения волнового уравнения для такой волны. Перейдем теперь к формулировке и изучению самого волнового уравнения для волн де Бройля в общем и частных случаях.

Рассмотрим сначала частный случай свободной частицы энергией  $E = p^2/(2m)$ , описываемой одномерной монохроматической волной с волновой функцией

$$\psi(x,t) = A \exp(-i(\omega t - kx)) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right). \quad (34.1)$$

Дифференцирование волновой функции дает

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \psi, \quad (34.2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\hbar^2} p^2 \psi, \quad (34.3)$$

откуда

$$E = \frac{i\hbar}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (34.4)$$

и

$$p^2 = -\frac{\hbar^2}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (34.5)$$

В результате из соотношения  $E = p^2/(2m)$  имеем

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (34.6)$$

Не будем упрощать это уравнение, поделив на постоянную Планка, поскольку вид членов уравнения (34.6) соответствует уравнениям в более сложных случаях и операторной форме (см. ниже). Из теории дифференциальных уравнений известно, что линейное дифференциальное уравнение параболического типа (34.6) имеет общим решением произвольную суперпозицию монохроматических волн. Для нашего трехмерного пространства и трехмерной волновой функции

$$\psi(\vec{r}, t) = A \exp(-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})) \quad (34.7)$$

имеем в качестве обобщения (34.6) уравнение Шредингера для свободной частицы:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi, \quad (34.8)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа:

$$\Delta \psi = \partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 + \partial^2 \psi / \partial z^2. \quad (34.9)$$

## 34.2. Общее уравнение Шредингера

Обобщим теперь уравнение Шредингера на случай, когда микрочастица имеет не только кинетическую, но и потенциальную энергию. Если частица движется в зависящем от координат силовом поле  $U = U(x, y, z)$ , то полная энергия  $E$  складывается из потенциальной  $U$  и кинетической  $E - U$  энергий. Используя для данного случая взаимосвязь между  $E$  и  $p$

$$p^2/(2m) = E - U, \quad (34.10)$$

получим по аналогии с уравнением Шредингера свободной частицы общее уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi. \quad (34.11)$$

Это уравнение справедливо и в случае зависящего от координат и времени силового поля  $U = U(x, y, z, t)$ . Общее уравнение Шредингера сформулировано в 1926 г. Э. Шредингером, оно по праву считается *основным уравнением нерелятивистской квантовой механики*. В квантовой физике уравнение Шредингера играет такую же фундаментальную роль, что и уравнения движения Ньютона в классической механике.

Напомним, что уравнение Шредингера должно быть дополнено естественными ограничениями на волновые функции, связанные с ограничениями на вероятность: волновая функция должна быть конечной, однозначной и непрерывной (см. выше). Первые производные волновой функции также должны быть непрерывны. Поскольку произведение  $U\psi$  должно быть конечным (см. (34.11)), то если  $U = \infty$ , то  $\psi = 0$ .

Особо стоит подчеркнуть, что точное решение дифференциального уравнения с производными по времени и координатам требует задания начальных и граничных условий.

Физический смысл решений уравнения Шредингера состоит в вычислении волновой функции, квадрат модуля которой определяет вероятность нахождения частицы в единичном объеме в окрестности точки координатами  $x, y, z$ .

### 34.3. Стационарное уравнение Шредингера

Для многих важных физических задач общее уравнение Шредингера можно упростить. Рассмотрим случай, когда силовое поле стационарно, что означает, что функция  $U = U(x, y, z)$  не зависит явно от времени и имеет смысл потенциальной энергии. В случае стационарного поля полная энергия  $E$  является константой. Будем искать решение уравнения Шредингера в виде произведения двух функций, одна из которых функция только координат, другая — только времени, причем зависимость от времени выражается по ана-

логии с множителем волны де Бройля множителем  $\exp(-\frac{i}{\hbar}Et)$ ), так что

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp(-\frac{i}{\hbar}Et). \quad (34.12)$$

Сразу заметим, что квадрат модуля зависящей от времени комплексной экспоненты равен единице, откуда следует вывод, что квадраты модулей полной и координатной волновых функций совпадают. Подставляя это решение в общее уравнение Шредингера, получим для координатной волновой функции  $\psi$ :

$$i\hbar \left(-\frac{iE}{\hbar}\right) \psi \exp(-\frac{i}{\hbar}Et) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi \exp(-\frac{i}{\hbar}Et) + U\psi \exp(-\frac{i}{\hbar}Et).$$

Поделив на множитель  $\exp(-\frac{i}{\hbar}Et)$ , после преобразований получим *стационарное уравнение Шредингера*:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (34.13)$$

В соответствии с теорией это дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений, из которых посредством наложения естественных ограничений на волновые функции отбирают решения, имеющие физический смысл. Существенно, что обычно решения существуют не при любых значениях параметра  $E$ . Значения энергии  $E$ , при которых существуют решения уравнения Шредингера, называются *собственными*. Собственные значения энергии могут образовывать как непрерывный, так и дискретный ряд. В первом случае говорят о *непрерывном*, или *сплошном*, *спектре*, во втором — о *дискретном спектре*. Волновые функции, которые соответствуют собственным значениям энергии, называют *собственными функциями*.

Стационарное уравнение Шредингера для одномерной задачи получается путем замены оператора Лапласа на вторую производную по координате и имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (34.14)$$

## 34.4. Уравнения Шредингера в операторной форме. Оператор Гамильтона

Для удобства записи и преобразования сложных уравнений часто используется символическая (операторная) форма. Так, при описании полей применяются понятия градиента, дивергенции, ротора. Сложные уравнения квантовой физики также часто принято записывать в операторной форме. Основным физическим величинам, характеризующим состояние микрочастицы, в квантовой физике соответствуют операторы.

Например, импульсу  $p$  соответствует оператор  $\hat{p}$ , причем

$$\hat{p}\psi = p\psi \quad (34.15)$$

В соответствии с этим свойством оператор импульса при воздействии на волновую функцию должен давать произведение значения импульса в данном состоянии (собственное значение импульса) на волновую функцию. Несложно убедиться, что для плоской одномерной волны  $\psi = A \exp(-i(\omega t - kx))$  оператором импульса является символическое выражение:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}. \quad (34.16)$$

Действительно, подставив это выражение в (34.15), получим

$$-i\hbar \frac{d\psi}{dx} = p\psi, \quad (34.17)$$

откуда после дифференцирования волновой функции получаем тождество

$$p = \hbar k. \quad (34.18)$$

В трехмерном случае  $\psi = A \exp(-i(\omega t - \vec{k}\vec{r}))$ , и оператор импульса  $\hat{p}$  выражается через *оператор набла*

$$\nabla = \frac{d}{dx} \vec{i} + \frac{d}{dy} \vec{j} + \frac{d}{dz} \vec{k}, \quad (34.19)$$

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla. \quad (34.20)$$

Запишем теперь стационарное уравнение Шредингера в операторной форме. Сделаем это с помощью функции Гамильтона  $H$ , которая равна сумме кинетической энергии (выраженной через импульс) и потенциальной энергии микрочастицы:

$$H = p^2/(2m) + U, \quad (34.21)$$

Сформулируем аналог этого выражения в операторной форме, заменив функцию Гамильтона на оператор Гамильтона (*гамильтониан*) и импульс на оператор импульса:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U = \frac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m} + U = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U. \quad (34.22)$$

Таким образом, мы получили выражение для оператора Гамильтона. Преобразуем теперь стационарное уравнение Шредингера (34.14) к виду

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U\right)\psi = E\psi. \quad (34.23)$$

Сравнивая два последних выражения с учетом векторного тождества

$$\nabla^2 = \Delta, \quad (34.24)$$

получим окончательно стационарное уравнение Шредингера в операторной форме:

$$\hat{H}\psi = E\psi. \quad (34.25)$$

## 34.5. Связь классической и квантовой механики. Теорема Эренфеста

Как уже отмечалось, решить уравнение Шредингера обычно гораздо сложнее, чем уравнения классической механики. Поэтому даже квантовую задачу часто стараются хотя бы частично свести к классической.

И здесь может помочь *теорема Эренфеста*: средние значения координат, импульса, энергии, силы связаны между собой уравнениями, аналогичными соответствующим уравнениям классической механики. Эти уравнения получены П. Эренфестом в 1927 г. на основе сопоставления частице пакета волн де Бройля.

Так, в одномерном случае с учетом физического смысла волновой функции  $\psi(x, t)$  можно ввести понятие «центра масс» волнового пакета:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx. \quad (34.26)$$

Взяв производную по времени, получим, что средние значения координаты  $\langle x \rangle$  и импульса  $\langle p \rangle$  микрочастицы связаны уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x \rangle}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt} |\psi|^2 dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{m} |\psi|^2 dx = \frac{\langle p \rangle}{m}, \end{aligned} \quad (34.27)$$

или кратко:

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle p \rangle}{m}. \quad (34.28)$$

Аналогично получается выражение для производной от среднего значения импульса  $\langle p \rangle$ :

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = - \left\langle \frac{dU}{dx} \right\rangle, \quad (34.29)$$

где  $m$  — масса;

$U$  — потенциальная энергия микрочастицы.

При этом полагается, что на размере волнового пакета можно пренебречь изменением потенциальной энергии.

Теперь несложно получить и квантовое обобщение второго закона Ньютона:

$$m \frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} = - \left\langle \frac{dU}{dx} \right\rangle. \quad (34.30)$$

## 34.6. Решение уравнения Шредингера для свободной частицы

Рассмотрим теперь стационарное уравнение Шредингера для свободной частицы ( $U = 0$ ), движущейся вдоль оси  $x$ . В одномерном случае оператор Лапласа сводится к второй производной по координате, так что из (34.14) имеем

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0. \quad (34.31)$$

Известным решением такого уравнения (это можно проверить прямой подстановкой) является функция:

$$\psi(x) = A \exp(ikx), \quad (34.32)$$

где  $A$  и  $k$  являются константами, причем собственные значения энергии

$$E = \hbar^2 k^2 / (2m) \quad (34.33)$$

определяются константой  $k$ . Спектр энергий является в данном случае непрерывным. Функция

$$\psi(x) = A \exp(ikx) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}\right) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right) \quad (34.34)$$

представляет собой только координатную часть волновой функции  $\psi(x, t)$  (34.12), которая должна быть дополнена зависящей от времени составляющей  $\exp(-\frac{i}{\hbar}Et)$ . С учетом этого получаем известную нам одномерную монохроматическую волну де Бройля (34.1) с волновой функцией  $\psi(x, t) = A \exp(-i(\omega t - kx)) = A \exp(\frac{i}{\hbar}(px - Et))$ .

Ей соответствует не зависящая от времени плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства:

$$|\psi|^2 = \psi\psi^* = |A|^2, \quad (34.35)$$

которая одинакова в любой точке пространства.

## 35. Потенциальный ящик и потенциальный барьер

### 35.1. Потенциальный ящик: уравнение Шредингера, граничные условия, волновые функции, энергия и вероятность местонахождения частицы

Рассмотрим движение микрочастицы в *потенциальном ящике*, который задается следующей зависимостью потенциальной энергии от координаты  $x$ :

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq x \leq l, \\ \infty & \text{для } x < 0 \text{ и } x > l. \end{cases} \quad (35.1)$$

Такой ящик имеет ширину  $l$  и бесконечно высокие стенки, причем энергия отсчитывается от дна ящика (рис. 35.1). Стационарное уравнение Шредингера для одномерной задачи с таким заданным распределением потенциальной энергии по координате имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (35.2)$$

Внутри ящика  $U = 0$  ( $0 \leq x \leq l$ ), и уравнение Шредингера сводится к уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0. \quad (35.3)$$

Общее решение такого гармонического уравнения запишем в виде

$$\psi(x) = A\sin(kx + \alpha). \quad (35.4)$$

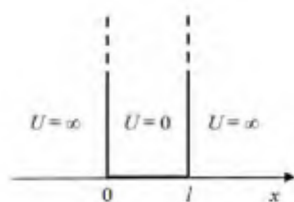


Рис. 35.1

При этом по аналогии с (34.33)

$$k^2 = 2mE/\hbar^2. \quad (35.5)$$

Микрочастица не способна проникнуть в области бесконечно больших энергий, поэтому вероятность ее обнаружения за пределами ящика (определяемая квадратом волновой функции) равна нулю. Поэтому уже на границах ящика (при  $x = 0$  и  $x = l$ ) непрерывная волновая функция также должна обращаться в нуль. Следовательно, граничные условия в данном случае имеют вид

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (35.6)$$

Из условия  $\psi(0) = 0$  следует  $a = 0$ . Отсюда

$$\psi(x) = A \sin kx. \quad (35.7)$$

Условие  $\psi(l) = A \sin kl = 0$  выполняется только при

$$kl = n\pi, \quad (35.8)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, из граничных условий для волновой функции следует ограничение

$$k = n\pi/l \quad (35.9)$$

и ограничение на собственные значения энергии частицы:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2} = \frac{n^2 \hbar^2}{8ml^2}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (35.10)$$

Здесь мы ограничили множество  $n$ , поскольку отрицательные  $n$  дают те же решения для  $|\psi|^2$  и  $E_n$ , что и положительные, а  $n = 0$  соответствует отсутствию частицы:  $\psi = 0$  и  $E_n = 0$ .

Следовательно, энергия  $E_n$  частицы в потенциальном ящике с бесконечно высокими стенками принимает лишь определенные дискретные значения, зависящие от целого числа  $n$  (квантуется). Квантованные значения энергии  $E_n$  называют уровнями энергии, а число  $n$ , определяющее энергетические уровни частицы, называют главным квантовым числом. Таким образом, микрочастица в потен-

циальном ящике может находиться только на определенном энергетическом уровне  $E_n$ , или, как говорят, частица находится в квантовом состоянии  $n$ .

Из формулы видно, что частица не может иметь энергию меньше

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{8ml^2}, \text{ для } n = 1. \quad (35.11)$$

Эта энергия определяется соотношением неопределенностей Гейзенберга. Действительно, неопределенность координаты  $\Delta x$  частицы в ящике равна ширине ящика:

$$\Delta x = l. \quad (35.12)$$

Тогда соотношение неопределенностей Гейзенберга определяет неопределенность импульса:

$$\Delta p \approx \hbar/l. \quad (35.13)$$

Такому разбросу значений импульса вблизи нулевого значения соответствует минимальная кинетическая энергия

$$E_{min} \approx (\Delta p)^2/(2m) = \hbar^2/(2ml^2), \quad (35.14)$$

сравнимая с  $E_1$ .

Еще одно замечание касается принципа соответствия. Из формул видно, что при  $n \gg 1$  относительное расстояние между энергетическими уровнями линейно падает. Поэтому если  $n$  велико, то спектр уровней можно считать практически непрерывным, что соответствует классической физике.

Подставив в волновую функцию квантованные значения  $k$ , найдем собственные функции:

$$\psi(x) = A \sin(\pi n x / l). \quad (35.15)$$

Константа  $A$  находится из условия нормировки волновой функции (33.33):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1 = A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = A^2 \frac{l}{2}, \quad (35.16)$$

откуда

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}}. \quad (35.17)$$

Здесь учтено, что среднее значение квадрата синуса по периоду равно 0,5.

В результате получаем собственные волновые функции, соответствующие уровням энергии  $E_n$ :

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (35.18)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$

Отметим, что плотность вероятности обнаружения частицы на различных расстояниях от стенок ящика

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{\pi n x}{l}. \quad (35.19)$$

Таким образом, плотность вероятности является периодической функцией координаты (при  $n = 2, 3, \dots$ ) и меняется в пределах от нуля до  $\frac{2}{l}$ . Отсюда следует, например, что в квантовом состоянии с  $n = 2$  частица не может находиться в середине ящика, но одинаково часто может пребывать в левой и правой частях ящика. Это отличается от представлений классической физики, в соответствии с которыми вероятность нахождения частицы с положительной энергией в различных точках ящика одинакова. Действительно, в классическом варианте задачи вследствие постоянства потенциальной и полной энергии частицы внутри ящика постоянна и кинетическая энергия, поэтому частица равномерно движется внутри ящика, периодически меняя направление движения при отражении от стенки.

Уже такая простейшая задача квантовой физики о частице в потенциальном ящике наводит на ряд ассоциаций. С одной стороны, формально она очень похожа на классическую задачу о колебаниях струны — вспомним, что в ней мы тоже (и впервые! — тем более в классической физике) встретились с квантованием длин волн. С другой стороны, потенциальный ящик можно считать грубой моделью атома водорода, в котором движение электрона тоже ограничено потенциальной энергией. Поэтому квантование энергии части-

цы в потенциальном ящике может в принципе помочь объяснить квантование энергии в атоме водорода. В дальнейшем мы еще продвинемся от абстрактных задач к конкретным и от абстрактного ящика к конкретным атомам. Но сначала рассмотрим удивительную по красоте и важности задачу о вероятности прохождения микро-частицы через потенциальный барьер.

## 35.2. Потенциальный барьер бесконечной ширины. Уравнение Шредингера и его решение для случаев $E < U, E > U$

Рассмотрим теперь одномерный *потенциальный барьер бесконечной ширины* (рис. 35.2), который задается следующей зависимостью потенциальной энергии от координаты  $x$ :

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq 0; \\ U & \text{для } x > 0. \end{cases} \quad (35.20)$$

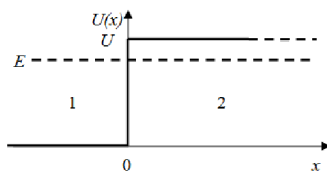


Рис. 35.2

Рассмотрим движение микрочастицы в таком поле, которое иногда также называют *полем прямоугольной ступеньки*. Если в классической физике частица энергией  $E$  попадает слева на такой барьер, то при  $E > U$  она свободно пройдет над барьером, а при  $E < U$  энергии частицы недостаточно, и она отразится от барьера. В свою очередь, в квантовой физике процессы отражения и прохождения микрочастицы через барьер в такой задаче вследствие принципа неопределенности энергии носят вероятностный характер. Так, для микрочастицы существует вероятность при  $E > U$  отразиться от барьера, а при  $E < U$  углубиться в барьер.

Покажем это путем решения уравнения Шредингера. Для  $x \leq 0$  (в области 1) в отсутствие потенциальной энергии стационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0, \quad (35.21)$$

с общим решением

$$\psi(x) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}\right) + B \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}\right). \quad (35.22)$$

Для  $x > 0$  (в области 2) при наличии потенциальной энергии стационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0 \quad (35.23)$$

с общим решением

$$\psi(x) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sqrt{2m(E - U)x}\right) + B \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2m(E - U)x}\right). \quad (35.24)$$

Общие решения этих дифференциальных уравнений можно представить, выразив энергию через импульс в виде

$$\psi(x) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right) + B \exp\left(-\frac{i}{\hbar}px\right), \quad (35.25)$$

При этом  $\psi(x)$  представляет собой только координатную часть волновой функции  $\psi(x, t)$  (34.12), которая должна быть дополнена зависящей от времени составляющей  $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)$ :

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \psi(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right) = & A \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right) + \\ & + B \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et + px)\right). \end{aligned} \quad (35.26)$$

Из условия постоянства фазы видно, что первая составляющая волновой функции соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$  (вправо):

$$Et - px = \text{const},$$

откуда с ростом времени  $t$  растет координата  $x$ . В свою очередь, вторая составляющая волновой функции соответствует волне, распространяющейся в отрицательном направлении оси  $x$  (влево):

$$Et + px = \text{const},$$

откуда с ростом времени  $t$  координата  $x$  убывает.

Для микрочастицы, летящей вправо из  $-\infty$ , запишем, проанализируем и свяжем решения стационарного уравнения Шредингера в двух областях, учитывая возможности отражения микрочастицы от стенки барьера:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mEx}\right) + B_1 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mEx}\right), \text{ для области 1; } \quad (35.27)$$

$$\psi_2(x) = A_2 \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2m(E-U)x}\right), \text{ для области 2. } \quad (35.28)$$

Здесь учтено, что в области 1 может существовать волна  $B_1 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mEx}\right)$ , отраженная от стенки барьера, а в области 2 отраженной (движущейся влево) волны нет, поскольку не от чего отражаться.

Рассмотрим сначала случай, когда полная энергия частицы меньше высоты барьера:  $E < U$ .

Классическая физика запрещает такой частице заходить в область барьера, поскольку ее кинетическая энергия в области  $x > 0$  отрицательна. В квантовой физике этот запрет снимается. Если  $E < U$ , то под корнем уравнения (35.28) стоит отрицательное выражение, преобразование которого (вынос из-под корня  $-1$ ) приводит к появлению действительной волновой функции экспоненциального вида, описывающей затухание волны внутри барьера:

$$\psi_2(x) = A_2 \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)x}\right), \text{ для области 2. } \quad (35.29)$$

Физический смысл волновой функции экспоненциального вида в том, что, попав в энергетически запрещенную область, волна не исчезает сразу, а претерпевает экспоненциальное затухание. При этом затухание внутри барьера падающей волны означает не потерю ее энергии, а отражение волны.

Чтобы найти соотношение вероятностей нахождения микрочастицы в различных областях и точках пространства, необходимо воспользоваться условиями непрерывности волновой функции  $\psi$  и ее производной  $\psi'$  на стенке барьера ( $x = 0$ ):

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \psi_1'(0) = \psi_2'(0). \quad (35.30)$$

Из этих условий следует:

$$A_1 + B_1 = A_2, \quad (35.31)$$

$$i\sqrt{E}(A_1 - B_1) = -\sqrt{U - E}A_2. \quad (35.32)$$

Избавляясь в системе от  $A_2$ , получим:

$$i(A_1 - B_1) = -q(A_1 + B_1), \quad (35.33)$$

где коэффициент

$$q = \sqrt{\frac{U - E}{E}} \quad (35.34)$$

определяется относительным превышением энергии барьера над энергией частицы  $\frac{U - E}{E}$ .

В результате можно выразить амплитуду отраженной волны через амплитуду падающей волны:

$$B_1 = \frac{i+q}{i-q}A_1 = \frac{1-iq}{1+iq}A_1. \quad (35.35)$$

Несложно убедиться, что модуль дроби в этом выражении равен 1:

$$\left| \frac{1-iq}{1+iq} \right| = \frac{|1-iq|}{|1+iq|} = \frac{1+q^2}{1+q^2} = 1,$$

откуда следует, что модуль отраженной волны равен модулю падающей волны. Это означает, что коэффициент отражения волны при  $E < U$  равен единице:

$$R = 1. \quad (35.36)$$

И действительно, волна не исчезает, а полностью отражается, немного углубившись внутрь барьера. При этом внутри барьера существует экспоненциально затухающая волновая функция амплитудой

$$A_2 = A_1 + B_1 = \frac{2}{1+iq}A_1. \quad (35.37)$$

Примерно такой же эффект имеет место при полном внутреннем отражении света от границы раздела в оптике.

Рассмотрим теперь случай, когда полная энергия частицы больше высоты барьера:  $E > U$ . В классической физике такая частица свободно заходит в область барьера. Покажем, что в квантовой физике это не так. Для этого проведем сшивку (35.30) волновой функции  $\psi$  и ее производной  $\psi'$  (35.27, 29) на стенке барьера  $x = 0$ :

$$A_1 + B_1 = A_2, \quad (35.38)$$

$$i\sqrt{E} (A_1 - B_1) = i\sqrt{E - U} A_2. \quad (35.39)$$

Избавляясь в системе от  $A_2$ , получим:

$$(A_1 - B_1) = r (A_1 + B_1), \quad (35.40)$$

где коэффициент

$$r = \sqrt{\frac{E-U}{E}} \quad (35.41)$$

определяется относительным превышением энергии частицы над энергией барьера  $\frac{E-U}{E}$ .

В результате можно выразить амплитуду отраженной и прошедшей волн через амплитуду падающей волны:

$$B_1 = \frac{1-r}{1+r} A_1; \quad (35.42)$$

$$A_2 = \frac{2}{1+r} A_1. \quad (35.43)$$

Найдем коэффициент прозрачности (прохождения)  $D$  потенциального барьера, определяемый как отношение плотности потока прошедших частиц к плотности потока падающих. Плотность потока микрочастиц равна произведению скорости частиц на их плотность:  $v\rho$ . Скорость частиц в области 1 равна  $v_1 = \sqrt{2E/m}$ , а в области 2 —  $v_2 = \sqrt{2(E-U)/m}$ . В свою очередь, плотность частиц пропорциональна квадрату амплитуды волны. В результате имеем для коэффициента прозрачности:

$$D = \frac{v_2 \rho_2}{v_1 \rho_1} = \frac{\sqrt{\frac{2(E-U)}{m}} A_2^2}{\sqrt{2E/m} A_1^2} = \frac{4r}{(1+r)^2}. \quad (35.44)$$

Аналогично для *коэффициента отражения*, определяемого как отношение плотности потока отраженных частиц к плотности потока падающих (с учетом одинаковых скоростей), получаем формулу

$$R = \frac{v_1 B_1^2}{v_1 A_1^2} = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}. \quad (35.45)$$

Поскольку микрочастицы при взаимодействии с барьером никуда не исчезают и могут либо пройти барьер, либо отразиться, то выполняется естественное соотношение:

$$D + R = 1. \quad (35.46)$$

При  $E > U$

$$0 < r < 1, \quad (35.47)$$

так что имеем, что коэффициент отражения лежит в пределах

$$0 < R < 1. \quad (35.48)$$

Таким образом, несмотря на достаточную при  $E > U$  с точки зрения классической физики энергию, существует вероятность отражения микрочастицы от барьера. При этом квантовый расчет показывает, что *коэффициент прохождения равен единице только в случае  $r = 1$  — только тогда, когда  $U = 0$  и барьер попросту отсутствует*. Кстати, последнее утверждение математически подтверждает ранее сделанное предположение о том, что отражение возможно лишь на неоднородностях потенциала.

Следует сделать еще одно важное замечание по поводу того, что коэффициент отражения зависит лишь от энергии частицы и потенциальной энергии барьера, но не зависит от постоянной Планка и массы частицы. Формально это позволяет применить выведенную формулу для коэффициента отражения даже для бильярдного шара, что противоречит принципу соответствия и ньютоновой механике. Впрочем, это противоречие кажущееся. Классический предел в данной задаче подразумевает помимо прочего то, что длина волны де Бройля частицы мала по сравнению с характерным размером изменения потенциальной энергии. Это делает формальный переход к классике для вертикальной ступеньки потенциальной энергии некорректным.

### 35.3. Потенциальный барьер конечной ширины. Случай $E > U$ , $E < U$

Рассмотрим одномерный *потенциальный барьер* прямоугольной формы (рис. 35.3), который задается следующей зависимостью потенциальной энергии от координаты  $x$ :

$$U(x) = \begin{cases} U & \text{для } 0 \leq x \leq l; \\ 0 & \text{для } x < 0 \text{ и } x > l. \end{cases} \quad (35.49)$$

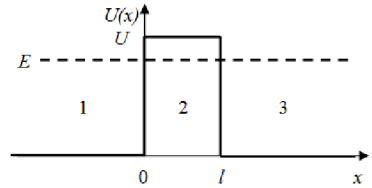


Рис. 35.3

Если в классической физике частица энергией  $E$  попадает слева на такой барьер, то при  $E > U$  она свободно пройдет над барьером, а при  $E < U$  энергии частицы недостаточно, и она отразится от барьера. В свою очередь, в квантовой физике процессы отражения и прохождения микрочастицы через барьер в такой задаче вследствие принципа неопределенности энергии носят вероятностный характер. Так, для микрочастицы существует вероятность при  $E > U$  отразиться от барьера, а при  $E < U$  пройти барьер.

Покажем это путем решения стационарного уравнения Шредингера. Для  $x < 0$  (в области 1) и для  $x > l$  (в области 3) в отсутствие потенциальной энергии оно имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \quad (35.50)$$

с общим решением

$$\psi(x) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}\right) + B \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}\right). \quad (35.51)$$

Для  $0 < x < l$  (в области 2) при наличии потенциальной энергии

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0 \quad (35.52)$$

с общим решением

$$\psi(x) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sqrt{2m(E - U)x}\right) + B \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2m(E - U)x}\right). \quad (35.53)$$

Для микрочастицы, летящей вправо из  $-\infty$ , запишем теперь, проанализируем и свяжем решения стационарного уравнения Шредингера во всех трех областях, учитывая возможности отражения микрочастицы от стенок барьера:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mEx}\right) + B_1 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mEx}\right), \text{ для области 1; } (35.54)$$

$$\psi_2(x) = A_2 \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2m(E-U)x}\right) + B_2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2m(E-U)x}\right),$$

для области 2; (35.55)

$$\psi_3(x) = A_3 \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mEx}\right), \text{ для области 3. } (35.56)$$

Здесь учтено, что в областях 1 и 2 могут существовать волны  $B_1 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mEx}\right)$  и  $B_2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2m(E-U)x}\right)$ , отраженные от стенок барьера, а в области 3 отраженной (движущейся влево) волны нет, поскольку не от чего отражаться.

В области 2 решение определяется соотношением энергий  $E > U$  или  $E < U$ . Особый интерес представляет случай, когда полная энергия частицы меньше высоты потенциального барьера и классическая физика запрещает частице проход через барьер. Однако квантовая физика отменяет этот запрет.

Если  $E < U$ , то под корнями уравнения (35.55) стоят отрицательные выражения, преобразование которых (вынос из-под корня -1) приводит к появлению действительной волновой функции экспоненциального вида. Еще проще это объясняется тем, что в уравнении Шредингера  $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0$  при наличии большой потенциальной энергии коэффициент при  $\psi$  отрицателен, так что его можно переписать в виде  $\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (U - E)\psi = 0$ . Решением его в соответствии с теорией является экспонента, что проверяется непосредственной подстановкой. В результате система решений стационарного уравнения Шредингера приобретает вид:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mEx}\right) + B_1 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mEx}\right), \text{ для области 1; } (35.57)$$

$$\psi_2(x) = A_2 \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)}x\right) + B_2 \exp\left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)}x\right),$$

для области 2. (35.58)

$$\psi_3(x) = A_3 \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mEx}\right), \text{ для области 3.} \quad (35.59)$$

Напомним, что физический смысл волновой функции экспоненциального вида в том, что, попав в энергетически запрещенную область, волна не исчезает сразу, а претерпевает экспоненциальное затухание. При этом затухание внутри барьера падающей волны означает не потерю ее энергии, а отражение волны.

Чтобы найти соотношение вероятностей нахождения микрочастицы в различных областях и точках пространства, необходимо воспользоваться условиями непрерывности волновой функции  $\psi$  и ее производной  $\psi'$  на стенках барьера ( $x = 0$  и  $x = l$ ):

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0), \quad \psi_2(l) = \psi_3(l), \\ \psi'_1(0) &= \psi'_2(0), \quad \psi'_2(l) = \psi'_3(l). \end{aligned} \quad (35.60)$$

Четыре записанных уравнения позволяют выразить четыре коэффициента  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_1$  и  $B_2$ , определяющие вероятности нахождения микрочастицы в различных областях и точках пространства, через амплитуду первоначальной падающей на барьер волны  $A_1$ .

## 35.4. Туннельный эффект. Коэффициенты прозрачности и отражения

Анализ полученных решений показывает, что первоначальная волна, проходя через барьер, испытывает при  $E < U$  экспоненциальное затухание. Тем не менее частично она проходит через барьер, и за барьером в области 3 имеет вид волны де Бройля с тем же импульсом (и длиной волны), но с меньшей амплитудой.

Иными словами, имеет место *туннельный эффект* (*туннелирование*) — преодоление микрочастицей потенциального барьера в случае, когда ее полная энергия меньше высоты барьера.

Найдем коэффициент прозрачности  $D$  потенциального барьера. При равенстве скоростей микрочастиц плотность потока микрочастиц пропорциональна квадрату амплитуды волны, так что имеем

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}. \quad (35.61)$$

Коэффициент прозрачности можно найти, воспользовавшись условиями непрерывности волновой функции  $\psi$  и ее производной  $\psi'$ . Однако проще это сделать, если дополнительно проанализировать вид волновой функции внутри барьера. Эта функция состоит из двух экспоненциально затухающих членов, причем первый член описывает затухание распространяющейся вправо первичной волны, а второй член описывает затухание вторичной волны, распространяющейся влево. Если барьер достаточно велик, чтобы заметно уменьшать амплитуду волны, то амплитуда второй раз проходящей через барьер волны существенно меньше амплитуды первичной волны, и вторым членом волновой функции можно пренебречь по сравнению с первым членом. В результате можно считать, что внутри барьера волновая функция спадает экспоненциально:

$$\psi_2(x) \approx A_2 \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}x\right), \text{ для области 2.} \quad (35.62)$$

При этом из соображений непрерывности волновой функции отношение квадратов амплитуд прошедшей и падающей волн равно отношению квадратов модулей волновой функции области 2 при  $x = l$  и  $x = 0$ :

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{|\psi_2(l)|^2}{|\psi_2(0)|^2} = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}l\right), \quad D \ll 1. \quad (35.63)$$

Из формулы видно, что коэффициент прозрачности резко падает с ростом массы  $m$  частицы, ширины  $l$  барьера и превышения  $(U-E)$  энергии барьера над энергией частицы.

При этом действие барьера определяется произведением  $\sqrt{(U-E)} l$ . Или можно сказать, что действие барьера определяется площадью под графиком зависимости  $\sqrt{(U-E)}$  от координаты  $x$ .

Это позволяет рассчитать действие барьера в случае барьера произвольной формы (рис. 35.4).

Аппроксимируем такой барьер большим количеством узких прямоугольных барьеров. Суммируя действие таких заградительных барьеров для  $E < U$ , получим

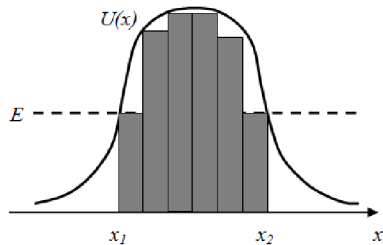


Рис. 35.4

$$D = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-E)} dx\right), \quad D \ll 1. \quad (35.64)$$

Тот поток частиц, который не прошел через потенциальный барьер, очевидно, от него отразился. Поэтому несложно записать выражение для коэффициента отражения:

$$R = 1 - D = 1 - \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-E)} dx\right). \quad (35.65)$$

Туннелирование является реальным, зафиксированным во многих экспериментах эффектом. Оно проявляется во многих физических процессах как в природе, так и в современных технологиях. Среди них процессы термоядерного синтеза, радиоактивный распад, нанотехнологии, явления на границе двух полупроводников.

Важный пример туннельного эффекта — процесс термоядерного синтеза, питающий энергию звезды и являющийся перспективным неисчерпаемым источником энергии для человечества. Так, в одной из реакций термоядерного синтеза происходит столкновение двух ядер дейтерия (имеющих по одному протону и одному нейтрону), в результате чего образуется ядро гелия-3 (имеющее два протона и один нейтрон) и испускается нейтрон. Согласно закону Кулона между двумя ядрами дейтерия действует очень большая сила взаимного отталкивания. Иными словами, имеется действенный потенциальный барьер, мешающий ядрам дейтерия сблизиться на достаточное расстояние и синтезировать ядро гелия. Однако ситуацию существенно облегчает то, что при приближении энергии ядер к порогу реакции начинает действовать туннельный эффект, заметно увеличивающий скорость термоядерного синтеза.

Другой пример касается типичного радиоактивного распада, когда тяжелое ядро излучает  $\alpha$ -частицу, состоящую из двух протонов и двух нейтронов. При этом, хотя у  $\alpha$ -частицы недостаточно энергии для преодоления барьера внутриядерной связи, туннельный эффект обеспечивает заметную вероятность спонтанного  $\alpha$ -распада ядер.

Отметим применение туннельного эффекта в нанотехнологиях, в частности в туннельных сканирующих микроскопах. Высокая чувствительность этих приборов обеспечивается тем, что, когда острие металлического щупа микроскопа оказывается в непосредственной близости от атомов, потенциальный барьер ниже, чем когда щуп находится в промежутках между атомами. Таким образом, микроскоп «видит» атом по возрастанию туннельного тока.

Туннельный эффект на границе двух полупроводников позволяет носителям зарядов проходить через потенциальный барьер  $p$ - $n$  перехода. Это явление получило применение в туннельном диоде.

## 36. Гармонический осциллятор

### 36.1. Потенциальная яма

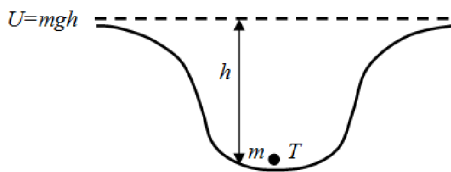


Рис. 36.1

*Потенциальная яма* — это область пространства, в которой на частицу действует сила, удерживающая частицу в этой области. Простейший пример классической потенциальной ямы — обычная яма на поверхности земли, на дне которой

лежит шарик массой  $m$  (рис. 36.1). Если кинетическая энергия шарика  $T$  мала:

$$T \leq mgh, \quad (36.1)$$

то он не способен выйти из ямы глубиной  $h$ , и находится в *связанном состоянии*. Если же кинетическая энергия шарика достаточно велика:

$$T > mgh, \quad (36.2)$$

то он покидает яму (переходит в *свободное состояние*).

В квантовой физике мы уже рассмотрели наиболее простой и абстрактный пример — потенциальный ящик, в котором частица удерживается между вертикальными бесконечно высокими стенками.

Большую роль в физике играют более сложные потенциальные ямы, определяемые более сложной зависимостью удерживающего потенциала от координат. Среди них потенциал гармонического осциллятора

$$U = kx^2/2, \quad (36.3)$$

описывающий колебательные процессы в механике, электродинамике, молекулярной физике, физике твердого тела и т. д. В принципе произвольная потенциальная яма, задаваемая гладким потенциалом, вблизи дна характеризуется потенциалом гармонического осциллятора. Действительно, вблизи точки локального минимума  $x = x_0$  справедливо разложение в ряд Тейлора:

$$U(x) = U(x_0) + 1/2 U''(x_0)(x - x_0)^2 + 1/6 U'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \quad (36.4)$$

Здесь учтено, что в точке локального минимума первая производная функции равна нулю. Сдвинув начало координат по обеим осям так, чтобы оно переместилось в точку минимума, получим

$$U(x) = 1/2 U''(0) x^2 + 1/6 U'''(0) x^3 + \dots \quad (36.5)$$

Наконец, в малой окрестности вблизи нуля, пренебрегая всеми членами ряда Тейлора кроме первого ненулевого, получим потенциал гармонического осциллятора

$$U(x) = 1/2 U''(0) x^2. \quad (36.6)$$

Быть может, самой важной в физике потенциальной ямой является кулоновская потенциальная яма, описываемая потенциалом кулоновского взаимодействия электронов с ядром атома, имеющего заряд  $Z$ :

$$U = -kZe^2/r. \quad (36.7)$$

Выше мы решили ряд квантовых задач, касающихся нахождения частицы в потенциальном ящике и движения частицы в поле различных потенциальных барьеров. По аналогии можно сделать ряд выводов о нахождении частицы в типичных квантовых потенциальных ямах. Квантовая частица в типичных ямах, как и в ящике, должна обладать дискретным спектром энергий. При этом вследствие соотношений неопределенности нижний уровень должен лежать несколько выше дна ямы. Микрочастица должна обычно находиться в энергетически разрешенных классической физикой областях пространства. Однако в типичных ямах стенки не уходят вертикально в бесконечность, поэтому, как и в задачах с барьерами, существует вероятность проникновения микрочастицы в энергетически запрещенные классической физикой области пространства.

## 36.2. Исходная классическая теория гармонического осциллятора

Перейдем теперь к более детальному анализу теории гармонического осциллятора, вспомнив сначала классическую постановку задачи. Гармоническим осциллятором в классической физике называется система, описываемая гамильтонианом

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (36.8)$$

Первый член гамильтониана определяет кинетическую энергию, второй — потенциальную. Вид потенциальной энергии выбран так, что он описывает и задачу о колебаниях груза на пружинке, когда

$$\frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{kx^2}{2}, \quad (36.9)$$

и другие колебательные системы при соответствующем выборе параметров. Среди таких систем математический и физический маятники, а также колебания заряда в колебательном контуре.

В случае когда механическая энергия сохраняется и гамильтониан не зависит от времени, дифференцирование его по времени дает

$$m \dot{x} \ddot{x} + m \omega^2 x \dot{x} = 0, \quad (36.10)$$

откуда окончательно дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$x'' + \omega^2 x = 0. \quad (36.11)$$

Общее решение этого уравнения в соответствии с теорией дифференциальных уравнений запишем в виде

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (36.12)$$

где  $A$  — амплитуда;

$\alpha$  — начальная фаза.

Решение описывает *гармонические* колебания частицы около положения равновесия  $x = 0$ . Энергия осциллятора периодически переходит из потенциальной в кинетическую, так что определить ее можно, например, по максимальной потенциальной энергии при  $\omega t + \alpha = 0$ :

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \quad (36.13)$$

Потенциальная энергия гармонического осциллятора

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (36.14)$$

В такой параболической потенциальной яме (рис. 36.2) с точки зрения классической физики частица не может выйти за пределы области  $[-A, +A]$ , поскольку такой выход означал бы, что ее кинетическая энергия отрицательна. При этом вероятность обнаружения частицы минимальна в центре ямы, где ее скорость максимальна. В свою очередь, вероятность обнаружения частицы максимальна при

$$x = \pm A, \quad (36.15)$$

где ее скорость равна нулю.

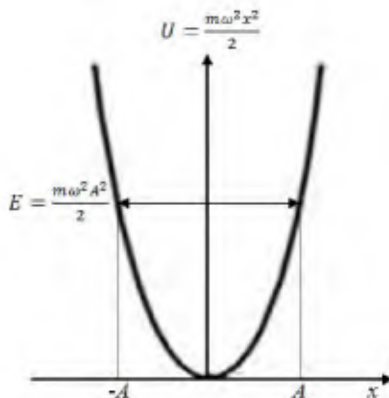


Рис. 36.2

Классическая теория гармонического осциллятора хорошо описывает колебания макроскопического грузика на реальной пружинке, математического и физического маятника, а также колебания заряда в колебательном контуре. Однако в задачах о колебаниях микрочастиц она часто демонстрирует существенные ошибки. Среди таких задач колебания атомов в молекулах и кристаллических решетках, колебания поверхности атомных ядер и т. д. Для этих важнейших современных задач работает квантовая теория гармонического осциллятора.

### 36.3. Квантовая теория гармонического осциллятора

Гармонический осциллятор в квантовой физике (*квантовый осциллятор*) описывается стационарным уравнением Шредингера с потенциальной энергией  $U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi = 0, \quad (36.16)$$

где  $E$  — полная энергия осциллятора.

Для решения этого уравнения удобно ввести безразмерную координату

$$q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (36.17)$$

и безразмерную энергию частицы

$$\varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}. \quad (36.18)$$

В этих обозначениях стационарное уравнение Шредингера сводится к виду

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + (\varepsilon - q^2)\psi = 0. \quad (36.19)$$

Найдем сначала асимптотику решения при большой координате  $q \rightarrow \infty$ . Тогда получим асимптотическое уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} - q^2\psi = 0. \quad (36.20)$$

Несложно убедиться, что множитель  $q^2$  появляется (в составе разности) при двукратном дифференцировании функции  $\exp\left(-\frac{q^2}{2}\right)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) &= -q \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right); \\ \frac{d^2}{dq^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) &= (q^2 - 1) \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (36.21)$$

При этом при большой координате  $q \rightarrow \infty$  можно пренебречь единицей по сравнению с  $q^2$ , так что асимптотикой решения можно принять функцию

$$\psi_\infty = \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right). \quad (36.22)$$

В соответствии с теорией будем теперь искать решение стационарного уравнения Шредингера через асимптотику решения  $\exp\left(-\frac{q^2}{2}\right)$  в виде

$$\psi = P(q) \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right). \quad (36.23)$$

Прямой подстановкой решения в (36.19) получим:

$$P'' - 2qP' + (\varepsilon - 1)P = 0. \quad (36.24)$$

Будем искать в соответствии с теорией  $P(q)$  в виде полинома:

$$P(q) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k q^k. \quad (36.25)$$

Учтем, что

$$P'(q) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k q^{k-1} \quad (36.26)$$

и

$$P''(q) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k q^{k-2}. \quad (36.27)$$

Подставив все это в (36.24) и сделав очевидные замены индекса суммирования, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + (\varepsilon - 1 - 2k)c_k] q^k = 0. \quad (36.28)$$

Сумма тождественно равна нулю, когда равен нулю каждый из коэффициентов. Отсюда следует рекуррентное соотношение для коэффициентов:

$$c_{k+2} = \frac{2k+1-\varepsilon}{(k+2)(k+1)} c_k. \quad (36.29)$$

Можно показать, что если сумма  $P(q)$  состоит из бесконечного числа членов, то она стремится к бесконечности при больших  $q$ . Конкретней, коэффициенты  $c_k$  степенного ряда падают медленней, чем коэффициенты степенного ряда разложения в ряд Тейлора функции  $\exp\left(\frac{q^2}{2}\right)$ . В такой ситуации естественное условие ограниченности волновой функции (36.23) требует, чтобы сумма  $P(q)$  была полиномом конечной степени и состояла из конечного числа членов. Для этого какой-то из коэффициентов должен обратиться в ноль, что выполняется обращением в ноль числителя:

$$\varepsilon = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (36.30)$$

Возвращаясь к собственным значениям энергии, получим вновь квантование энергии (рис. 36.3):

$$E = \frac{\hbar\omega\varepsilon}{2} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (36.31)$$

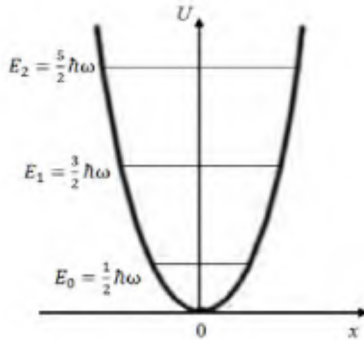


Рис. 36.3

Таким образом, условие квантования энергии гармонического осциллятора получается не из граничных условий (как у потенциального ящика), а из условия ограниченности волновой функции. При этом энергетическому уровню  $n$  соответствует волновая функция

$$\psi = P(q)\exp\left(-\frac{q^2}{2}\right). \quad (36.32)$$

Здесь полином  $P(q)$  определяется конечной суммой, причем для четных  $n$  и ряда из четных степеней  $q$  нижний предел равен нулю:

$$P(q) = \sum_{k=0}^n c_k q^k, \quad (36.33)$$

а для нечетных  $n$  и ряда из нечетных степеней  $q$  нижний предел равен единице:

$$P(q) = \sum_{k=1}^n c_k q^k. \quad (36.34)$$

## 36.4. Волновые функции и энергетические уровни квантового осциллятора

С учетом условия нормировки и рекуррентного соотношения для коэффициентов первые три волновых функции гармонического осциллятора имеют вид

$$\psi_0(q) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right), \quad n = 0; \quad (36.35)$$

$$\psi_1(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} q \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right), \quad n = 1; \quad (36.36)$$

$$\psi_2(q) = \frac{1}{\sqrt[4]{4\pi}} (2q^2 - 1) \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right), \quad n = 2. \quad (36.37)$$

Вид этих волновых функций показан на рис. 36.4. Пунктиром показаны пределы классических колебаний частицы. Интегрированием квадрата волновой функции несложно рассчитать вероятность нахождения микрочастицы в классически запрещенных областях. Так, для основного состояния эта вероятность определяется известным интегралом вероятности и составляет немалую величину примерно 16%.

Анализ выражения  $E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$  для энергетических уровней квантового осциллятора показывает, что соседние уровни расположены на одинаковых расстояниях  $\hbar\omega$  друг от друга. При этом минимальная энергия осциллятора не равна нулю. Покажем, что ненулевое минимальное собственное значение энергии осциллятора в основном состоянии можно получить из соотношения неопределенностей. Для микрочастицы, совершающей колебания в пределах от  $-x$  до  $x$ , имеем  $\Delta x = 2x$ . Тогда из соотношения неопределенностей для импульса имеем неопределенность импульса

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{2x}. \quad (36.38)$$

Неопределенность импульса позволяет сделать оценку минимальной кинетической энергии

$$T \approx \frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{8mx^2} \quad (36.39)$$

и минимальной полной энергии микрочастицы

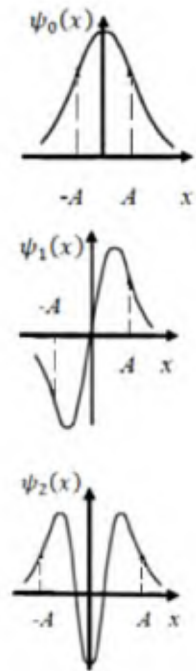


Рис. 36.4

$$E \approx \frac{\hbar^2}{8mx^2} + \frac{kx^2}{2}. \quad (36.40)$$

Минимизируя полную энергию по нулевой производной:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{\hbar^2}{4mx^3} + kx = 0, \quad (36.41)$$

получим амплитуду нулевых колебаний осциллятора:

$$x_0 = \sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{4km}} \quad (36.42)$$

и окончательно энергию нулевых колебаний осциллятора:

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega. \quad (36.43)$$

Существование нулевых колебаний квантового осциллятора — весьма важное положение современной физики, имеющее ряд неожиданных, на первый взгляд, следствий. Так, атомы твердого тела даже при абсолютном нуле не неподвижны, а совершают нулевые колебания. А нулевые колебания электромагнитного поля существуют и в пустом пространстве — в отсутствие частиц и квантов.

## **37. Квантовая теория водородоподобного атома**

### **37.1. Уравнение Шредингера для электрона в водородоподобном атоме**

Планетарная модель водородоподобного атома, сформулированная Бором, не является ни классической (поскольку допускает квантование), ни квантовой (поскольку квантование не объясняет). Объяснить квантование можно с помощью уравнения Шредингера.

Однако описание атомов и молекул с помощью уравнения Шредингера является сложной задачей. Это касается даже простей-

шего атома водорода и водородоподобных ионов. Поэтому ограничимся здесь качественным рассмотрением задачи, которая сводится к анализу движения электрона в кулоновском поле ядра. Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром заряда  $Ze$  задается формулой

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (37.1)$$

где  $r$  — расстояние между электроном и ядром.

Необходимо учитывать, что атом принципиально является трехмерной системой и одномерным приближением для его описания не обойдешься. Поэтому стационарное уравнение Шредингера для такой потенциальной энергии записывается следующим образом:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0. \quad (37.2)$$

Масса ядра на несколько порядков больше массы электрона, поэтому систему центра масс обычно можно считать привязанной к ядру. Поле, в котором движется электрон, является в этой системе центрально-симметричным. Такие задачи обычно удобно решать в *сферической системе координат*, в которой в качестве координат выбраны расстояние до начала координат  $r$ , полярный (зенитный) угол  $\theta$  (меняется в пределах от 0 до  $\pi$ ) и азимутальный угол  $\varphi$  (меняется в пределах от 0 до  $2\pi$ ). Переход к сферической системе от декартовой осуществляется по следующим правилам:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos\varphi \sin\theta; \\ y &= r \sin\varphi \sin\theta; \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned} \right\} \quad (37.3)$$

При этом решение уравнения Шредингера ищется в виде произведения трех составляющих, каждая из которых зависит от одной из сферических координат:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = f_1(r) f_2(\theta) f_3(\varphi). \quad (37.4)$$

Решение уравнения Шредингера с трехмерным кулоновским потенциалом оказывается еще более сложным, чем в предыдущей задаче с одномерным потенциалом гармонического осциллятора. Аналогично предыдущим квантовым задачам, поиск собственных волновых функций (с учетом естественных ограничений) приводит к получению дискретных собственных энергетических состояний. И каждая из составляющих волновой функции дает набор решений, характеризующийся своим квантовым числом: главным  $n$ , орбитальным  $l$  и магнитным  $m_l$ .

## 37.2. Квантовые числа. Возбужденные состояния электрона в водородоподобном атоме и спектры

Получаемое в соответствии с теорией дифференциальных уравнений решение стационарного уравнения Шредингера показывает, что *главное квантовое число*  $n = 1, 2, 3, \dots$  определяет уровни энергии электрона в водородоподобном атоме:

$$E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{8 \hbar^2 \epsilon_0^2 n^2}. \quad (37.5)$$

Эта формула аналогична выражению, полученному в рамках планетарной модели водородоподобного атома. Однако если в планетарной модели Бору пришлось вводить противоречащие классической физике необъяснимые постулаты, то в квантовой физике дискретные значения энергии являются прямым следствием решения уравнения Шредингера. Все уровни энергии связанного электрона отрицательны, причем с ростом главного квантового числа увеличивается расстояние между электроном и ядром, а потенциальная и кинетическая энергии стремятся к нулю. При  $E > 0$  непрерывный спектр энергии соответствует состоянию свободного электрона и ионизованного атома.

*Орбитальное (азимутальное) квантовое число*  $l$  показывает, как квантуется момент импульса электрона (механический орбитальный момент относительно ядра):

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}. \quad (37.6)$$

При заданном  $n$  орбитальное квантовое число принимает значения:

$$l = 0, 1, \dots, (n - 1) \text{ — всего } n \text{ значений.} \quad (37.7)$$

Магнитное квантовое число  $m_l$  показывает, что во внешнем магнитном поле момент импульса электрона может иметь такие ориентации в пространстве, при которых его проекция  $L_z$  на направление  $z$  магнитного поля

$$L_z = \hbar m_l, \quad (37.8)$$

При заданном  $l$  магнитное квантовое число принимает значения

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (37.9)$$

В атомной физике, как и в оптике, состояние электрона с  $l = 0$  называют  $s$ -состоянием, с  $l = 1$  —  $p$ -состоянием, с  $l = 2$  —  $d$ -состоянием, с  $l = 3$  —  $f$ -состоянием, с  $l = 4$  —  $g$ -состоянием, с  $l = 5$  —  $h$ -состоянием и т. д. Перед буквой, обозначающей величину орбитального квантового числа, ставят цифру, обозначающую величину главного квантового числа. Поэтому, например, электрон в состоянии  $n = 1$  и  $l = 0$  обозначают как  $1s$ -электрон, а электрон в состоянии  $n = 3$  и  $l = 1$  обозначают как  $3p$ -электрон.

Каждому уровню энергии  $E_n$  соответствует набор допустимых комбинаций квантовых чисел  $n, l, m_l$  и набор соответствующих волновых функций  $\Psi_{nlm}$ . Так, уровню  $E_1$  соответствует одна волновая функция  $\Psi_{100}$ ; уровню  $E_2$  — четыре волновые функции  $\Psi_{200}, \Psi_{21-1}, \Psi_{210}, \Psi_{211}$ ; уровню  $E_3$  — девять волновых функций  $\Psi_{300}, \Psi_{31-1}, \Psi_{310}, \Psi_{311}, \Psi_{32-2}, \Psi_{32-1}, \Psi_{320}, \Psi_{321}, \Psi_{322}$  и т. д.

Рассмотренная модель позволяет уточнить закономерности излучения или поглощения фотонов при переходе атома между различными энергетическими уровнями. Фотон обладает собственным моментом импульса (спином), который обычно можно принять равным  $\hbar$ . Поэтому закон сохранения момента импульса предполагает, что при излучении или поглощении фотона орбитальный момент водородоподобного атома должен измениться на столько же. Отсюда следует *правило отбора для переходов атома при излучении или поглощении фотона*:

$$\Delta l = \pm 1. \quad (37.10)$$

Поэтому для серии Лаймана разрешены переходы с излучением фотона:  $np \rightarrow 1s$  ( $n = 2, 3, \dots$ ); для серии Бальмера:  $np \rightarrow 2s$ ,  $ns \rightarrow 2p$ ,  $nd \rightarrow 2p$  ( $n = 3, 4, \dots$ ); для серии Пашена:  $np \rightarrow 3s$ ,  $ns \rightarrow 3p$ ,  $nd \rightarrow 3p$ ,  $nf \rightarrow 3d$ ,  $np \rightarrow 3d$  ( $n = 4, 5, \dots$ ) и т. д. Для переходов с поглощением фотона (если поглощающий атом находится в основном состоянии) разрешен переход  $1s \rightarrow np$  ( $n = 2, 3, \dots$ ).

Такой результат детально обосновывается при рассмотрении излучения атома в дипольном приближении. Однако в спектрах наблюдаются и слабые переходы, соответствующие, например,  $\Delta l = \pm 2$ . Вероятность таких переходов можно обосновать, рассматривая атом как более сложную систему, чем диполь.

### 37.3. Спин электрона. Кратность вырождения уровней водородоподобных атомов

В 1920 г. российские физики П. Л. Капица и Н. Н. Семенов опубликовали статью «О возможности экспериментального определения магнитного момента атома», в которой предложили идею эксперимента по определению магнитного момента атома путем пропускания молекулярного пучка через неоднородное магнитное поле. Такой эксперимент независимо провели О. Штерн и В. Герлах в 1922 г., обнаружив, что пучок атомов водорода, находящихся в  $s$ -состоянии, в неоднородном магнитном поле расщепляется на два пучка. В этом состоянии магнитный момент атома, связанный с орбитальным движением электрона, равен нулю, и поэтому должен существовать какой-то другой магнитный момент, взаимодействующий со внешним магнитным полем.

Для объяснения эксперимента Д. Уленбек и С. Гаудсмит в 1925 г. предположили, что *электрону присущ собственный неуничтожимый механический момент импульса, не связанный с движением электрона в пространстве — спин*. Название *спин* произошло от английского слова *вращаться* и основывалось на первоначальном ошибочном представлении об электроне как о вращающемся вокруг своей оси заряжен-

ном шарике. Спин электрона и других микрочастиц — квантовая величина, не имеющая классического аналога.

Собственный механический момент импульса (спин)  $L_s$  квантуется по аналогии с орбитальным моментом импульса:

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad (37.11)$$

где  $s$  — *спиновое квантовое число*.

Опять же по аналогии с орбитальным моментом квантуется проекция спина  $L_{sz}$  так, что вектор спина может принимать  $2s+1$  ориентации. Поскольку в опытах Штерна и Герлаха пучок расщеплялся только на две компоненты, то  $2s+1=2$ , откуда  $s=1/2$ . Поэтому проекция спина на направление внешнего магнитного поля квантуется по правилу

$$L_{sz} = \hbar m_s, \quad (37.12)$$

где  $m_s$  — *магнитное спиновое квантовое число*,  $m_s = \pm 1/2$ .

Число состояний с одинаковой энергией называется *кратностью вырождения энергетического уровня*. Кратность вырождения уровней водородоподобных атомов с учетом спина равна:

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = (1+(2n-1))n = 2n^2 \quad (37.13)$$

В результате первому уровню энергии водородоподобных атомов соответствуют 2 состояния электрона, второму — 8, третьему — 18, четвертому — 32 и т. д.

### 37.4. 1s-состояние атома водорода

Вероятность обнаружения электрона в различных местах в атоме различна и определяется квадратом модуля волновой функции данного состояния. Эту вероятность принято наглядно изображать электронным облаком, плотность которого в данной точке пропорциональна вероятности обнаружения электрона. Можно показать, что числа  $n$  и  $l$  опреде-

ляют размер и форму электронного облака, а число  $m_l$  определяет ориентацию электронного облака в пространстве.

Так  $s$ -состояние электрона (при  $l = 0$ ) сферически симметрично, причем волновая функция максимальна в центре атома. В последующих состояниях (при  $l > 0$ ) волновая функция в центре атома равна нулю и является асимметричной по направлениям (зависит от углов  $\theta$  и  $\varphi$ ).

Рассмотрим подробнее  $1s$ -состояние электрона атома водорода. Можно показать, что волновая функция этого состояния имеет вид

$$\psi_{100}(r) = C e^{-r/a}, \quad (37.14)$$

где параметр в экспоненте совпадает с первым боровским радиусом

$$a = r_1 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(m_e e^2), \quad (37.15)$$

а константа  $C$  определяется из соображений нормировки волновой функции. Действительно, для сферически симметричной волновой функции выделим сферически симметричный объем  $dV = 4\pi r^2 dr$ , внутри которого волновая функция является константой. Тогда условие нормировки волновой функции имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1 = \int_0^{\infty} C^2 e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr. \quad (37.16)$$

Двукратное интегрирование по частям дает:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \quad (37.17)$$

и окончательное выражение для волновой функции  $1s$ -состояния электрона атома водорода:

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}. \quad (37.18)$$

Пользуясь физическим смыслом волновой функции, найдем расстояние между электроном и ядром атома, на котором существует наибольшая вероятность обнаружить электрон. Вероятность обнаружить электрон в сферически симметричном объеме  $dV = 4\pi r^2 dr$  равна:

$$dW = |\psi|^2 dV = C^2 e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr. \quad (37.19)$$

Исследование на экстремум выражения  $C^2 e^{-2r/a} 4\pi r^2$  показывает, что эта плотность вероятности максимальна при

$$r = a. \quad (37.20)$$

В принципе это согласуется с теорией Бора. Однако если в теории Бора электрон всегда находится на расстоянии  $a$  от ядра, то волновая функция показывает, что электрон может находиться на любых расстояниях от ядра, а при  $r = a$  лишь имеет место максимальная вероятность нахождения.

## 37.5. Спин-орбитальное взаимодействие. Эффекты Зеемана и Штарка

Орбитальный и спиновый магнитные моменты воздействуют друг на друга и деформируют атом, слегка сдвигая уровни энергии. Возникающее *спин-орбитальное взаимодействие* и сдвиг энергии электрона зависят от взаимной ориентации моментов. Например, в водородоподобных атомах спин имеет две ориентации, и спин-орбитальное взаимодействие может приводить к *расщеплению уровней энергии* на два близких подуровня — возникновению *тонкой структуры*. Такое расщепление приводит к снятию вырождения. У многоэлектронных атомов картина тонкого расщепления уровней энергии оказывается сложнее.

Если расщепления уровней энергии существенно, то необходимо учитывать *полный момент импульса электрона*  $L_j$ , равный сумме орбитального  $L$  и спинового  $L_s$  моментов. В этом случае вместо  $l$  и  $s$  необходимо использовать *квантовое число полного момента*  $j$ , причем

$$j = |l \pm s| = \left| l \pm \frac{1}{2} \right|. \quad (37.21)$$

При этом по аналогии с вышесказанным

$$L_j = \hbar \sqrt{j(j+1)}. \quad (37.22)$$

В свою очередь, вместо  $m_l$  и  $m_s$  необходимо использовать *магнитное квантовое число полного момента*  $m_j$ , определяющее возможные проекции полного момента импульса:

$$L_{jz} = \hbar m_j, \quad (37.23)$$

где квантовое число  $m_j$  принимает  $2j+1$  значений.

Магнитные моменты атомов могут взаимодействовать не только между собой, но и с внешними магнитным и электрическим полями.

Так, если поместить атом во внешнее магнитное поле, то может возникнуть расщепление спектральных линий на две, три и более компонент — это явление называется *эффектом Зеемана*. Такое расщепление энергетических уровней в магнитном поле было обнаружено в 1896 г. голландским физиком П. Зееманом. Эффект Зеемана объясняется тем, что в зависимости от взаимной ориентации момента импульса атома и магнитного поля энергия уровня может увеличиться или уменьшиться. Как известно, на магнитный момент в однородном магнитном поле действует момент сил, который стремится сориентировать магнитный момент вдоль силовых линий магнитного поля.

В слабом магнитном поле, когда поле не нарушает взаимодействия орбитальных и спиновых моментов, имеет место *аномальный (сложный) эффект Зеемана*. При этом происходит расщепление уровня на 2, 4 и более линий. В сильном магнитном поле, когда поле разрывает спин-орбитальную связь, имеет место *нормальный (простой) эффект Зеемана*. При этом происходит расщепление уровня на 3 линии.

Наложение сильного электрического поля также может вызвать сдвиг спектральных линий, вызванный изменением энергетических уровней. Это явление называют *эффектом Штарка* — по имени Й. Штарка, открывшего его в 1913 г. Эффект Штарка объясняется тем, что под действием электрического поля электронное облако меняет свое положение относительно ядра. В результате меняются энергетические уровни электронов в атоме.

Исследования эффектов Зеемана и Штарка позволили с высокой точностью подтвердить правильность квантовой теории строения вещества.

## 38. Квантовая теория многоэлектронных атомов

### 38.1. Принцип неразличимости тождественных частиц. Фермионы и бозоны

Описание многоэлектронных атомов является более сложным, чем описание водородоподобных атомов. Связано это, как уже отмечалось выше, с тем, что задача взаимодействия двух тел (ядра и электрона) гораздо проще, чем задача взаимодействия трех и более тел (ядра и нескольких электронов). Но возникают и принципиально новые проблемы. Одним из слабых мест развитой Бором планетарной модели атома являлось то, что при описании многоэлектронных атомов приходилось делать искусственное предположение о том, что на орбитах атома может находиться лишь ограниченное количество электронов.

Квантовая физика позволяет обосновать это предположение, исходя из *принципа неразличимости тождественных частиц*, согласно которому невозможно экспериментально различить микрочастицы одного типа с полностью одинаковыми физическими характеристиками. Например, тождественными можно считать электроны, у которых одинаковы масса, заряд, квантовые числа.

Действительно, как мы различаем макроскопические тела? Например, по форме или цвету. Но тождественные электроны абсолютно одинаковы. Похожие друг на друга биллиардные шары можно различать по положению в пространстве (координатам или траектории), по энергии или импульсу. Но у электронов в атоме в соответствии с принципами неопределенностей сложно говорить о траекториях, а координаты, энергия и импульс вообще точно нельзя определить. Состояние микрочастицы описывается лишь волновой функцией, и если волновые функции двух тождественных частиц перекрываются в пространстве, то различить такие тождественные

частицы в принципе невозможно. При этом опыт показывает, что речь идет не о технических трудностях с различением частиц, а о принципиальной невозможности различения.

С точки зрения квантовой физики тождественность двух частиц означает, что волновые функции системы двух частиц при их перестановке могут отличаться лишь несущественным множителем  $\exp(i\varphi)$ , не меняющим квадрата модуля волновой функции, поскольку модуль множителя равен единице. Если переставить частицы еще раз, то волновые функции системы двух частиц при их двукратной перестановке будут отличаться на

$$\exp(i\varphi) \exp(i\varphi) = \exp(2i\varphi). \quad (38.1)$$

Поскольку при двукратной перестановке система возвращается в начальное состояние, то

$$\exp(2i\varphi) = 1 \quad (38.2)$$

и

$$\exp(i\varphi) = \pm 1. \quad (38.3)$$

Отсюда следует, что перестановка пары тождественных частиц либо оставляет волновую функцию системы неизменной, либо меняет ее знак. Если при перестановке частиц волновая функция не меняет знака, то она называется симметричной, если меняет, — то антисимметричной. Опыт и квантовая теория поля показывают, что симметрия волновых функций определяется спином частиц. Частицы с полуцелым спином (например, электроны, протоны, нейтроны) описываются антисимметричными волновыми функциями и называются фермионами. Частицы с нулевым или целым спином (например, фотоны, мезоны) описываются симметричными волновыми функциями и называются бозонами. Сложные частицы (например, атомные ядра или атомы), состоящие из нечетного числа фермионов, являются фермионами (их суммарный спин полуцелый), а состоящие из четного числа фермионов — бозонами (их суммарный спин целый). Сложные частицы, состоящие из бозонов, являются бозонами (их суммарный спин целый).

## 38.2. Принцип Паули

Если пренебречь взаимодействием пары частиц между собой, то по вероятностному смыслу волновую функцию системы можно выразить через произведение волновых функций каждой из частиц:

$$\psi_c = \psi_a(1) \psi_b(2), \quad (38.4)$$

где под цифрами 1 и 2 понимается совокупность координат и проекций спинов, от которых зависят волновые функции частицы 1 и частицы 2; волновая функция  $\psi_a(1)$  описывает состояние частицы 1 энергией  $E_1$ ; волновая функция  $\psi_b(2)$  описывает состояние частицы 2 энергией  $E_2$ .

Однако такое представление волновой функции системы выделяет частицу 1 и частицу 2 и не соответствует квантовому принципу неразличимости частиц. С таким же успехом волновой функцией системы может быть и функция

$$\psi_d = \psi_a(2) \psi_b(1). \quad (38.5)$$

В общем случае согласно принципу суперпозиции любая комбинация

$$\psi = c_1 \psi_c + c_2 \psi_d = c_1 \psi_a(1) \psi_b(2) + c_2 \psi_a(2) \psi_b(1) \quad (38.6)$$

также будет решением уравнения Шредингера. Волновая функция системы двух частиц должна быть либо симметричной, тогда  $c_1 = c_2$ , либо антисимметричной, тогда  $c_1 = -c_2$ . Тогда с учетом нормировки волновой функции для системы бозонов из двух частиц, находящихся в разных состояниях, имеем симметричную волновую функцию

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_a(1) \psi_b(2) + \psi_a(2) \psi_b(1)). \quad (38.7)$$

Аналогично для системы фермионов из двух частиц имеем антисимметричную волновую функцию:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_a(1) \psi_b(2) - \psi_a(2) \psi_b(1)). \quad (38.8)$$

Полученные формулы можно обобщить на систему из любого числа частиц.

Из формулы для волновой функции системы фермионов следует важное следствие. Если предположить, что два фермиона находятся в одном месте в одинаковом спиновом состоянии, то волновая функция обращается в ноль. Такого быть не может. В результате формулируется *принцип Паули*: в системе фермионов одного типа две и более частицы не могут находиться в одинаковом состоянии. Отметим, что на бозоны принцип Паули не распространяется и бозоны одного типа могут находиться в одинаковом состоянии.

Принцип Паули, сформулированный в 1925 г., позволяет объяснить оболочечную структуру атомов и распределение электронов в атоме по состояниям. Напомним, что электроны являются фермионами. Поэтому если нижние (энергетически выгодные) орбиты атома заполнены, то следующему электрону приходится располагаться на более высокой орбите.

### **38.3. Строение многоэлектронных атомов**

Строение многоэлектронных атомов может быть приближенно описано с помощью квантовых чисел, описывающих водородоподобные атомы. Однако у многоэлектронных атомов есть два существенных отличия.

Во-первых, построение многоэлектронной системы определяется принципом Паули, который в целом предполагает последовательное заполнение сначала нижних, потом более высоких орбит электронами. В соответствии с принципом Паули два электрона одного атома различаются значениями как минимум одного квантового числа.

Во-вторых, взаимодействие электронов в многоэлектронном атоме приводит к снятию вырождения электронных энергетических уровней, что приводит к зависимости энергии не только от главного квантового числа, но и от орбитального квантового числа. При этом порядок заполнения орбит определяется в основном главным квантовым числом, хотя есть и некоторые исключения.

Совокупность электронов, имеющих одинаковое главное квантовое число  $n$ , образует *электронный слой атома*. Слои обозначают буквами  $K, L, M, N, \dots$ , каждый из которых соответствует  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ . В каждом из слоев электроны распределяются по *оболочкам*, соответствующим данному орбитальному квантовому числу  $l$ . Так, существуют оболочки  $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d$  и т. д. Число электронов в оболочке обозначают вверху справа. Например, обозначение  $2p^6$  показывает, что в  $2p$ -оболочке содержится 6 электронов.

Рассмотрим последовательно атомы периодической системы (таблицы) элементов Менделеева. Периодичность химических и некоторых физических свойств элементов непосредственно связана с характером заполнения внешних и внутренних электронных оболочек в атоме. Номер элемента в таблице определяется количеством протонов (зарядовым числом  $Z$ ) ядра атома или количеством электронов в нейтральном атоме.

Единственный электрон атома первого элемента таблицы — водорода — находится в состоянии  $1s$ . Два электрона атома второго элемента таблицы — гелия — находятся в состоянии  $1s$  с двумя противоположными (антипараллельными) ориентациями спина. В атоме гелия заканчивается формирование  $K$ -слоя, атому с заполненным слоем сложно отдать и принять электрон, поэтому гелий инертен, и гелием завершается самый короткий первый период таблицы Менделеева.

Третий электрон атома третьего элемента таблицы — лития — занимает наиболее энергетически выгодное свободное  $2s$ -состояние. Единственный электрон в новом слое слабо связан с ядром атома, и им определяются активные химические свойства атома. Процесс заполнения оболочек  $2s$  и  $2p$  электронами во втором периоде соответствует уровням водородоподобного атома. Далее следуют бериллий, бор, углерод, азот, кислород. Заканчивается период десятым элементом таблицы — неоном, у которого  $L$ -слой полностью заполнен, что определяет его инертные свойства.

В третьем периоде идет заполнение  $M$ -слоя. Одиннадцатый электрон первого элемента этого периода натрия занимает низшее свободное состояние  $3s$ . Единственный валентный электрон натрия

делает похожим натрий на аналог из предыдущей группы — литий. Впрочем, и элементы следующих групп третьего периода похожи на свои аналоги второго периода, поскольку оболочки  $3s$  и  $3p$  заполняются так же, как оболочки  $2s$  и  $2p$  второго периода.

Впервые нарушение нормальной последовательности заполнения уровней водородоподобного атома происходит у атома элемента № 19 — калия. Его девятнадцатый электрон должен был занять  $3d$ -состояние  $M$ -слоя. Однако в многоэлектронном атоме оболочка  $4s$  оказывается энергетически выгодней оболочки  $3d$ , поэтому при незавершенном  $M$ -слое начинается заполнение  $N$ -слоя. Свойства атома калия похожи на свойства атомов лития и натрия, поскольку все эти элементы имеют один валентный электрон в  $s$ -состоянии.

Похожие отступления от нормальной последовательности заполнения уровней водородоподобного атома имеют место время от времени и в следующих периодах. При этом периодически повторяются сходные конфигурации внешних оболочек, что обеспечивает повторяемость свойств элементов.

## 38.4. Рентгеновские спектры

Рентгеновское излучение открыто немецким физиком В. Рентгеном в 1895 г. Генерируется этот вид электромагнитного излучения в рентгеновских трубках, на электроды которых подается высокое

напряжение  $U$  (обычно десятки киловольт и более). При этом внутри трубки возникает поток ускоренных электронов энергией десятки кэВ и более, при взаимодействии которых с веществом анода и возникает рентгеновское излучение длинами волн в диапазоне примерно  $10^{-12} - 10^{-8}$  м (рис. 38.1). Оно состоит из двух составляющих.



Рис. 38.1

Первая составляющая генерируется при резком торможении ускоренных электронов в поле ядер атомов вещества анода и называется *тормозным излучением*. Вторая составляющая создается переходами электронов в атомах вещества анода, инициированными потоком ускоренных электронов, и называется *характеристическим излучением*. Поскольку при взаимодействии ускоренных электронов с веществом анода выделяется большая энергия, то требуется хороший теплоотвод, и анод обычно изготавливают из тугоплавкого вещества, например вольфрама или платины.

Тормозное излучение имеет непрерывный спектр. Возникновение его обусловлено тем, что при торможении движущегося заряда уменьшается магнитная индукция и в соответствии с теорией Максвелла возникает электромагнитная волна. Этот спектр имеет отчетливую коротковолновую границу, определяемую в квантовой физике ситуацией, когда вся кинетическая энергия  $eU$  резко тормозящегося электрона переходит в энергию фотона  $hc/\lambda$ :

$$eU = hc/\lambda, \quad (38.9)$$

откуда имеем для коротковолновой границы спектра тормозного излучения:

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU}. \quad (38.10)$$

Коротковолновая граница, да и распределение тормозного излучения по длинам волн определяются энергией ускоренных электронов и не зависят от вещества анода. Материал анода определяет лишь суммарную интенсивность тормозного излучения.

Характеристическое излучение возникает в результате выбивания ускоренным электроном электронов с нижних слоев атомов. Образующиеся вакансии заполняются при переходах электронов с более высоких слоев, что сопровождается генерацией уносящего избыточную энергию фотона. Спектр энергий таких фотонов является дискретным, поскольку определяется разницей дискретных уровней энергии атома. Так, *K*-серия характеристического излучения возникает при переходах электрона на вакансию *K*-слоя из слоев *L*, *M*, *N*, ... , *L*-серия возникает при переходах электрона на вакансию *L*-слоя из слоев *M*, *N*, ... и т. д.

Каждая серия состоит из небольшого набора отдельных линий, обозначаемых в порядке убывания длины волны индексами  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  ( $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma, \dots$ ). При увеличении заряда ядра элемента растет энергия нижних электронных уровней, и спектр характеристического излучения смещается в коротковолновую область.

Особенности спектров характеристического излучения были объяснены английским физиком Г. Мозли в 1913 г. на основе планетарной теории атома Бора и усовершенствования формулы Ридберга. В соответствии с *законом Мозли* частота линий характеристического рентгеновского излучения может быть найдена по формуле

$$\nu = R(Z - \sigma)^2(1/m^2 - 1/n^2), \quad (38.11)$$

где  $R$  — постоянная Ридберга;

$\sigma$  — постоянная экранирования;

$m = 1, 2, 3, \dots$  (определяет рентгеновскую серию по нижнему энергетическому состоянию);

$n = m+1, m+2, m+3, \dots$  (определяет линию соответствующей серии по верхнему энергетическому состоянию).

Смысл постоянной экранирования заключается в том, что поле ядра в области внутренних оболочек несколько ослабляется (экранируется) электронами нижних оболочек. Поэтому вместо зарядового числа ядра  $Z$  энергетические уровни атома определяются ослабленным эффективным зарядовым числом ядра:

$$Z_{эфф} = (Z - \sigma). \quad (38.12)$$

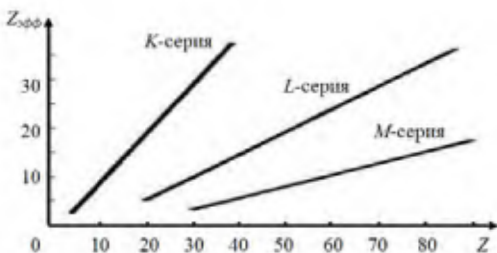


Рис. 38.2

Например, для  $K$ -серии  $\sigma \approx 1$ . Закон Мозли проиллюстрирован на рис. 38.2 качественной зависимостью  $Z_{эфф}$  от  $Z$  для  $K$ -,  $L$ - и  $M$ -серий характеристического рентгеновского излучения.

## 39. Квантовая теория молекул

### 39.1. Гетерополярная и гомеополярная связи. Обменное взаимодействие

Молекула возникает в результате химической связи между атомами. Химические связи возникают в результате взаимодействия внешних (валентных) электронов атомов. Наиболее часто в молекулах встречается два типа связи: *гетерополярная (ионная)* и *гомеополярная (ковалентная)*.

Гетерополярная связь имеет место, например, в молекулах  $\text{NaCl}$ ,  $\text{CaCl}_2$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , и происходит за счет электростатического взаимодействия положительного и отрицательного ионов, образовавшихся при переходе электронов от одних атомов молекулы к другим. Если у элемента всего один, два, три электрона на внешнем слое, то часто эти электроны имеют малую энергию связи и легко отдаются атомом. С другой стороны, если у элемента внешний слой почти полностью заполнен и имеются всего одна-две вакансии, то атому энергетически выгодно заполнить эти вакансии чужими электронами. Поэтому при сближении таких противоположных атомов слабосвязанные электроны перескакивают на вакансии, и в результате притяжения образовавшихся ионов возникает молекула.

При этом, например, в кристалле хлорида натрия  $\text{NaCl}$  любой ион натрия или хлора притягивается всеми шестью соседними ионами противоположного знака. В результате весь кристалл образует единую гигантскую молекулу. Впрочем, можно выделить и отдельную молекулу из одного иона натрия и одного иона хлора — в паробразном состоянии.

Гетерополярная связь часто является довольно крепкой, давая весьма устойчивые молекулы. А при разломах кристаллов с гетерополярной связью на границах разлома могут возникать два монослоя ионов противоположного знака, между которыми генерируются колоссальные электрические поля напряженностью до  $10^{10}$  В/м и более. Эти поля (наряду с генерируемыми в результате пьезоэффекта

полями) способствуют возникновению электронов и фотонов энергиями в десятки, сотни кэВ и даже более.

Гомеополярная связь имеет место, например, в молекулах  $H_2$ ,  $Cl_2$ ,  $CO$  и кристаллах алмаза, германия, кремния. Она происходит при обобществлении (спаривании) валентных электронов двумя соседними атомами. Ковалентная связь объясняется с помощью принципа неразличимости тождественных частиц, который приводит к так называемому *обменному взаимодействию*. Суть обменного взаимодействия заключается в том, что спаренные электроны проводят некоторое время у обоих ядер, их волновые функции перекрываются и осуществляется связь атомов в молекуле. При этом если спины электронов параллельны, то вследствие принципа Паули перекрывание волновых функций невозможно, атомы отталкиваются, и молекула не образуется. Если же спины электронов антипараллельны, то перекрывание волновых функций энергетически выгодно, что ведет к образованию устойчивой молекулы.

## 39.2. Образование молекул

Рассмотрим подробнее квантовую задачу об образовании простейшей молекулы с гомеополярной связью — молекулы водорода, решенную Гайтлером и Лондоном в 1927 г. Потенциальная энергия системы из двух электронов (1 и 2) и двух протонов (3 и 4)

$$U = -\frac{e^2}{r_{13}} - \frac{e^2}{r_{23}} - \frac{e^2}{r_{14}} - \frac{e^2}{r_{24}} + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{34}}. \quad (39.1)$$

Масса протона примерно в 2000 больше массы электрона, поэтому их можно считать неподвижными и связать с ними систему отсчета. Тогда уравнение Шредингера системы будет иметь вид

$$\Delta_1 \psi + \Delta_2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - e^2 \left( -\frac{1}{r_{13}} - \frac{1}{r_{23}} - \frac{1}{r_{14}} - \frac{1}{r_{24}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{34}} \right)] \psi = 0, \quad (39.2)$$

где  $\Delta_1, \Delta_2$  — операторы Лапласа соответственно по координатам первого и второго электронов.

Решение этого уравнения дает собственные значения энергии, зависящие от расстояния между ядрами. Устойчивая молекула водорода состоит из двух атомов водорода, которые находятся на расстоянии  $7,0 \cdot 10^{-11}$  м, что лишь немного больше радиуса атома водорода  $5,3 \cdot 10^{-11}$  м. Образование связи между атомами можно объяснить тем, что их электроны

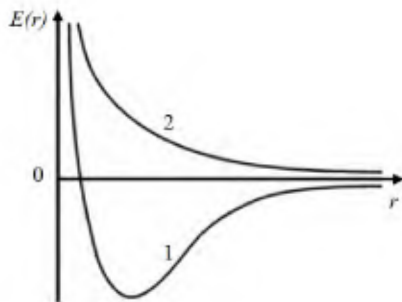


Рис. 39.1

локализуются в значительной мере между ядрами, удерживая вместе положительно заряженные протоны. Это соответствует ситуации, когда спины электронов антипараллельны. При этом говорят, что возникла *связывающая молекулярная орбиталь* (изображена кривой 1 на рис. 39.1). При сближении же атомов с параллельными спинами электронов атомы отталкиваются, и молекула не образуется. В этом случае электроны локализованы вне пространства между ядрами, и говорят о *разрыхляющей молекулярной орбитали* (изображена кривой 2 на рис. 39.1).

Аналогичным образом можно рассмотреть сближение двух атомов гелия. Здесь тоже возможно образование двух молекулярных орбиталей, одной из которых соответствует более низкая, а другой — более высокая энергия. Однако теперь на орбиталях необходимо разместить 4 электрона двух атомов гелия. При этом уменьшение энергии системы благодаря энергетически выгодной орбитали примерно компенсируется увеличением энергии системы благодаря энергетически невыгодной орбитали. В целом же сближение атомов не дает выигрыша в энергии, и молекулярный гелий  $\text{He}_2$  не образуется. Подобные рассуждения позволяют оценить возможность образования молекул из атомов и для более сложных систем.

Согласно квантовой теории, прочность связи зависит от степени перекрытия соответствующих орбиталей. При этом связи меж-

ду атомами могут образовываться при обобществлении не только двух, но и одного или трех электронов. Однако такие связи оказываются слабее обычных гомеополарных связей. Объясняется это тем, что при образовании одноэлектронной связи происходит уменьшение энергии только одного электрона. В случае же образования связи в результате обобществления трех электронов у двух электронов энергия уменьшается, а у третьего, наоборот, увеличивается, частично компенсируя уменьшение энергии. В результате образующаяся трехэлектронная связь оказывается вдвое слабее обычной ковалентной. Обобществление одного электрона происходит, например, при образовании молекулярного иона водорода  $\text{H}_2^+$ , а обобществление трех электронов — в молекуле  $\text{HHe}$ .

### 39.3. Колебательная и вращательная энергия молекул

Энергетические уровни молекул являются более сложными, чем уровни атомов. Ведь в молекулах помимо движения электронов относительно ядер атомов имеют место колебания атомов относительно положений равновесия и вращение молекулы как целого. Каждому из этих видов движения соответствуют свои уровни энергии. В первом приближении эти виды движений молекулы можно считать независимыми друг от друга. Поэтому полную энергию молекулы представим как сумму электронной энергии  $E_{\text{эл}}$ , колебательной энергии  $E_{\text{кол}}$  и вращательной энергии  $E_{\text{вр}}$ :

$$E = E_{\text{эл}} + E_{\text{кол}} + E_{\text{вр}}. \quad (39.3)$$

Каждая из этих энергий принимает дискретные значения. Уровни электронного возбуждения молекул похожи на уровни электронного возбуждения атомов. Уровни колебательного возбуждения вблизи положений равновесия приближенно описываются моделью квантового осциллятора:

$$E_{\text{кол}} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (39.4)$$

При увеличении энергии колебаний уровни энергии в потенциальной яме сгущаются.

Вращательная энергия для системы с моментом инерции  $J$ , угловой скоростью  $\omega$  и моментом импульса  $L$

$$E_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{(J\omega)^2}{2J} = \frac{L^2}{2J}. \quad (39.5)$$

В соответствии с правилом квантования момента импульса

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad (39.6)$$

где квантовое число принимает значения  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$

Поэтому и вращательная энергия может принимать только квантованные значения:

$$E_{\text{вр}} = \frac{L^2}{2J} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2J}. \quad (39.7)$$

В отличие от колебательной энергии, уровни которой лежат на одинаковом расстоянии друг от друга, расстояние между уровнями вращательной энергии растет с увеличением квантового числа.

Оценим теперь соотношение между энергиями электронного, колебательного и вращательного возбуждения. Электронное возбуждение молекул, как и связь атомов в молекуле, определяется движением электронов по орбитам. Поэтому будем считать, что энергия электронного возбуждения молекул  $E_{\text{эл}}$  сравнима с энергией связи атомов в молекуле  $E_{\text{св}}$  и по порядку величины равна энергии ионизации атома водорода  $E_{\text{H}}$ :

$$E_{\text{эл}} \approx E_{\text{св}} \approx E_{\text{H}} = me^4 / (8\varepsilon_0^2 \hbar^2). \quad (39.8)$$

Это допущение в целом подтверждается опытом. Предположим в оценке, что размер молекулы сравним с первым боровским радиусом  $r_1 = \varepsilon_0 \hbar^2 / (\pi m e^2)$ . Будем считать, что сдвиг атома при колебании на расстояние, равное размеру молекулы, требует энергии, сравнимой с энергией связи атомов в молекуле:

$$E_{\text{св}} \approx \frac{k r_1^2}{2}. \quad (39.9)$$

Сделаем теперь оценку коэффициента жесткости молекулы:

$$k \approx \frac{2E_{\text{св}}}{r_1^2} = \frac{\pi^2 m^3 e^8}{4\epsilon_0^4 \hbar^6}. \quad (39.10)$$

Выразив частоту колебаний через коэффициент жесткости молекулы и массу атома  $M$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}, \quad (39.11)$$

получим для кванта колебательной энергии:

$$E_{\text{кол}} \approx \hbar\omega \approx \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{me^4}{4\epsilon_0^2 \hbar^2} \approx 2\sqrt{\frac{m}{M}} E_{\text{эл}}. \quad (39.12)$$

Таким образом, вследствие малости корня из отношения масс электрона и атома *характерная энергия колебательного движения в десятки раз меньше энергии движения электронов в молекуле*. И если электронные спектры лежат в видимой части спектра и рядом, то колебательные спектры лежат в инфракрасной области.

Оценим теперь порядок кванта вращательной энергии. Оценивая момент инерции молекулы через массу атома и первый борковский радиус:

$$J \approx Mr_1^2, \quad (39.13)$$

получим для кванта вращательной энергии:

$$E_{\text{вр}} \approx \frac{\hbar^2}{J} \approx \frac{\hbar^2}{Mr_1^2} \approx \frac{m^2 e^4}{4M\epsilon_0^2 \hbar^2} \approx 2\frac{m}{M} E_{\text{эл}}. \quad (39.14)$$

Отсюда вследствие малости отношения масс электрона и атома *характерная энергия вращательного движения в тысячи раз меньше энергии движения электронов в молекуле*. При этом вращательные спектры лежат в далекой инфракрасной области.

В целом же отношение между характерными энергиями (и частотами) электронного, колебательного и вращательного возбуждений, пренебрегая несущественным для оценки множителем 2, имеет вид

$$E_{\text{эл}} : E_{\text{кол}} : E_{\text{вр}} \approx 1 : \sqrt{\frac{m}{M}} : \frac{m}{M}. \quad (39.15)$$

В результате электронные уровни молекулы расщеплены на колебательные уровни. В свою очередь, каждый колебательный уровень расщеплен на ряд вращательных уровней. Такая сложная структура молекулярных уровней дает соответствующую структуру молекулярных спектров поглощения и излучения.

## **40. Элементы физики твердого тела**

### **40.1. Качественное обоснование зонной теории.**

#### **Адиабатное приближение.**

#### **Одноэлектронное приближение.**

#### **Самосогласованное поле**

Выше мы рассмотрели процесс образования молекулы из двух одинаковых атомов. Суть процесса можно представить так, что при сближении двух атомов соседний атом деформирует электронные орбиты атома, приводя к смещению энергетических уровней. При этом вместо двух одинаковых образуются два смещенных относительно начального состояния и относительно друг друга энергетических уровня. Это смещение определяется не только деформацией, но и принципом Паули, запрещающим двум и более электронам находиться в одинаковом состоянии. Примерно так же, сближая большое количество атомов из бесконечности в конденсированное состояние, можно рассмотреть возникновение энергетических уровней в твердом теле.

При этом в твердом теле (в частности, в кристалле) электрон подвергается электрическому воздействию со стороны соседних атомов, что приводит к сдвигу энергетического уровня. И новое положение энергетического уровня электрона у каждого взаимодействующего атома благодаря принципу Паули должно быть свое. Если взаимодействующих атомов много, то вместо одинаковых уровней получается большое количество сдвинутых относительно друг друга

уровней. При этом в относительно узком диапазоне энергий порядка одного электронвольта может быть сосредоточено огромное количество энергетических уровней. В результате образуются *разрешенные энергетические зоны* с практически непрерывным энергетическим спектром, в которых сосредоточены энергетические уровни. Между разрешенными зонами остаются диапазоны энергии, где нет энергетических уровней — *запрещенные энергетические зоны*. Иногда энергетические зоны могут перекрываться.

Все это касается электронов, находящихся на верхних энергетических уровнях. На близких к ядру уровнях электроны сильно привязаны к конкретному ядру и практически не способны к реальному взаимодействию с соседними атомами и обобществлению орбит. В результате внутренние электроны ведут себя так же, как в изолированных атомах, а внешние электроны обобществлены и относительно свободно могут перемещаться по кристаллу.

Количественное обоснование зонной теории является сложным и требует ряда дополнительных допущений.

Так, задача рассматривается в *адиабатном приближении*, которое основано на том, что электроны и ионы обладают сильно различающимися массами (и скоростями). Это дает возможность рассматривать движение электронов на фоне покоящихся ядер, а движение медленных ядер — в усредненном поле всех электронов.

*Одноэлектронное приближение* предполагает, что движение электрона не зависит от движения других электронов системы. Это позволяет представить волновую функцию системы электронов в виде суммы волновых функций отдельных электронов. При этом существенно, что для описания взаимодействий электрона удобно ввести понятие *эффективной массы* электрона, которая может существенно отличаться в обе стороны от реальной массы электрона.

Существенным является и *приближение самосогласованного поля*. Взаимодействие электрона с другими электронами и ядрами определяется стационарным электрическим полем, обладающим пространственной периодичностью кристаллической решетки.

## 40.2. Уравнение Шредингера для кристаллов. Теорема Блоха и туннелирование

Задачу о движении электронов в пространственном периодическом поле кристалла существенно упрощает сама периодичность поля. Действительно, упорядоченное расположение ядер кристаллической решетки создает таким же образом упорядоченное электрическое поле. Использование адиабатного и одноэлектронного приближений, а также приближения самосогласованного поля приводит к стационарному уравнению Шредингера для задачи движения электрона в пространственном периодическом потенциальном поле. В одномерном случае это уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_p)\psi = 0. \quad (40.1)$$

Здесь потенциальная энергия имеет периодичность постоянной решетки кристалла  $c$ :

$$U_p(x+c) = U_p(x). \quad (40.2)$$

Предположим, что электроны относительно свободно перемещаются по кристаллу. Свободному перемещению соответствует плоская волна. Однако периодически меняющаяся составляющая потенциальной энергии несколько затрудняет движение электронов. Поэтому для потенциальной энергии такого вида логично искать волновую функцию в виде произведения функции плоской волны на функцию с периодичностью потенциала. Это предположение строго доказывается в *теореме Блоха*: собственные функции стационарного уравнения Шредингера с периодически меняющейся потенциальной энергией имеют вид произведения функции плоской волны на функцию с периодичностью потенциальной энергии:

$$\psi(x) = u(x) \exp(ikx). \quad (40.3)$$

*Блоховский множитель*  $u(x)$ , как и потенциальная энергия, имеет периодичность постоянной решетки кристалла и показывает, что вероятность нахождения электрона повторяется от ячейки к ячейке кристалла.

В столь сложной задаче удобно рассматривать два предельных случая взаимодействия электронов с кристаллической решеткой.

*Приближение слабой связи (приближение почти свободных электронов)* рассматривает валентные электроны в кристалле как почти свободные частицы, движение которых слегка возмущено полем кристаллической решетки. Это приближение соответствует тому, что потенциальная энергия взаимодействия электрона с кристаллической решеткой меньше кинетической энергии электрона. Приближение слабой связи неплохо описывает поведение валентных электронов на  $s$ - и  $p$ -уровнях, в металлах и полупроводниках.

*Приближение сильной связи* предполагает, что состояние валентного электрона в кристалле мало отличается от состояния электрона в изолированном атоме. Приближение сильной связи применимо, когда потенциальная энергия взаимодействия электрона с кристаллической решеткой больше его кинетической энергии. В такой ситуации значительную роль в переносе электронов играет туннелирование. Приближение сильной связи описывает поведение электронов на  $d$ -,  $e$ - и  $f$ -уровнях, свойства диэлектриков и полупроводников.

Существенно, что оба приближения приводят к обоснованию существования разрешенных и запрещенных энергетических зон в кристаллах.

### **40.3. Решение уравнения Шредингера в приближении слабой связи**

В приближении слабой связи при решении уравнения Шредингера для электрона в кристалле в качестве нулевого приближения выбирается состояние свободного электрона. Получим аналитическое решение задачи об электроне в периодическом поле кристаллической решетки *в приближении слабой связи*. При этом для простоты заменим периодически меняющуюся потенциальную энергию кулоновского вида (рис. 40.1, *а*) цепочкой прямоугольных потенциальных ям такой же периодичности (рис. 40.1, *б*). Заметим, что сделанный для простоты записи сдвиг отсчета потенциальной энергии роли не играет. Ширина каж-

дой ямы равна  $a$ , причем ямы отделены друг от друга прямоугольными потенциальными барьерами высотой  $U_0$  и шириной  $b$ . Период повторения ям равен постоянной кристаллической решетки

$$c = a + b. \quad (40.4)$$

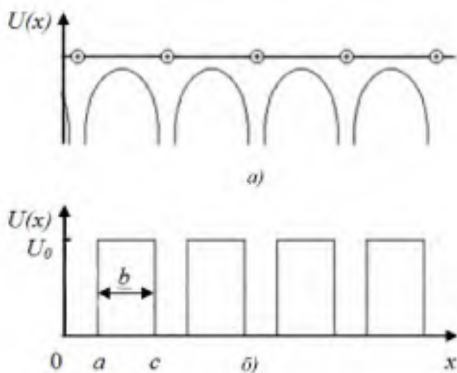


Рис. 40.1

Потенциальная энергия в такой упрощенной модели задается на периоде зависимостями

$$U_p(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq a; \quad (40.5)$$

$$U_p(x) = U_0, \quad a \leq x \leq a+b. \quad (40.6)$$

В соответствии с теоремой Блоха будем искать волновую функцию электрона  $\psi(x)$  в виде  $\psi(x) = u(x) \exp(ikx)$ . Здесь функция  $u(x)$  имеет период  $c$ , причем

$$u(x) = u(x+nc), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (40.7)$$

Подставив решение в стационарное уравнение Шредингера для задачи движения электрона в пространственном периодическом потенциальном поле, получим два дифференциальных уравнения для блоховского множителя ( $u_1(x)$  — для электронов внутри потенциальных ям,  $u_2(x)$  — для электронов вне потенциальных ям):

$$\frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} + 2ik \frac{du_1(x)}{dx} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - T) u_1(x) = 0; \quad (40.8)$$

$$\frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} + 2ik \frac{du_2(x)}{dx} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - T - U_0) u_2(x) = 0. \quad (40.9)$$

В этих уравнениях  $T$  — кинетическая энергия электрона:

$$T = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (40.10)$$

Общее решение уравнения для электронов внутри потенциальных ям в соответствии с теорией имеет вид

$$u_1(x) = A \exp[i(\alpha - k)x] + B \exp[-i(\alpha + k)x]. \quad (40.11)$$

Прямой подстановкой решения в уравнение получим

$$\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}. \quad (40.12)$$

В области вне потенциальных ям, при условии что *высота потенциального барьера*  $U_0$  *больше полной энергии электрона*  $E$ , общее решение уравнения в соответствии с теорией имеет вид:

$$u_2(x) = C \exp[i(\beta - ik)x] + D \exp[-i(\beta + ik)x]. \quad (40.13)$$

Прямой подстановкой решения в уравнение получим

$$\beta = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}. \quad (40.14)$$

Постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  в формулах находятся из граничных условий, которые требуют непрерывности на стенках потенциальных ям функции  $u(x)$ :

$$u_1(0) = u_2(0), \quad u_1(a) = u_2(a) \quad (40.15)$$

и ее первой производной:

$$\frac{du_1(0)}{dx} = \frac{du_2(0)}{dx}, \quad \frac{du_1(a)}{dx} = \frac{du_2(a)}{dx}. \quad (40.16)$$

Эта система четырех дифференциальных уравнений сводится к системе линейных однородных алгебраических уравнений с неиз-

вестными  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Система линейных однородных уравнений имеет отличные от нуля решения, только если определитель этой системы равен нулю. Это дает равенство:

$$\frac{(\beta^2 - \alpha^2)[\exp(\beta b) - \exp(-\beta b)]\sin(\alpha a)}{2\alpha\beta} + [\exp(\beta b) + \exp(-\beta b)]\cos(\alpha a) - 2\cos(kc) = 0. \quad (40.17)$$

Полученное выражение можно упростить, если положить, что ширина барьера стремится к нулю:  $b \rightarrow 0$ , а высота — к бесконечности:  $U_0 \rightarrow \infty$ , причем произведение  $U_0 b = \text{const}$ . Тогда выражение сводится к виду

$$p \frac{\sin \alpha a}{\alpha a} + \cos(\alpha a) = \cos(ka), \quad (40.18)$$

где  $p = \frac{2mabU_0}{\hbar^2}$ .

Левая часть полученного уравнения через  $\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  определяется энергией  $E$  электрона, а правая часть уравнения определяется волновым вектором  $k$  электрона. Таким образом, уравнение (40.18) представляет зависимость  $E(k)$  и фактически является дисперсионным соотношением для электрона в кристалле.

## 40.4. Зоны Бриллюэна и эффективная масса электрона

Продолжим анализ приближения слабой связи и изучим полученное дисперсионное соотношение для электрона в кристалле. Очевидно, что волновое число  $k$  может быть вещественным только при условии, что косинус в левой части соотношения находится в интервале от  $-1$  до  $+1$ . Зависимость левой части соотношения от  $\alpha$  для характерного значения параметра  $p = 2$  приведен на рис. 40.2. Заштрихованные участки соответствуют недопустимым значениям  $\alpha$  и, следовательно, запрещенным значениям энергии электрона в

кристалле. Таким образом, наличие периодически меняющейся потенциальной энергии дает результатом чередование разрешенных и запрещенных зон энергии для электрона в кристалле.

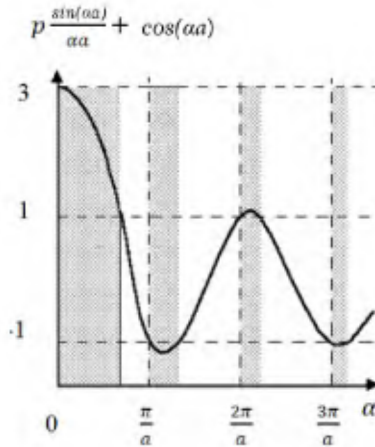


Рис. 40.2

Анализ показывает, что зависимость  $E(k)$  претерпевает разрывы в точках, где

$$k = n \pi/a. \quad (40.19)$$

Если  $p = 0$  ( $U_0 = 0$ ), то  $\alpha = k$  и имеет место параболическая зависимость полной энергии  $E$  от волнового числа  $k$ :

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (40.20)$$

что соответствует свободному электрону. На рис. 40.3 представлены дисперсионные соотношения для свободного электрона (парабола) и электрона в кристалле (парабола с отклонениями). Области, соответствующие границам разрешенных зон кристалла, называются *зонами Бриллюэна*. Первой зоне Бриллюэна соответствует область

$$-\pi/a < k < \pi/a, \quad (40.21)$$

второй зоне Бриллюэна — две области

$$\pi/a < n < 2\pi/a \text{ и } -2\pi/a < n < -\pi/a \quad (40.22)$$

и т. д.

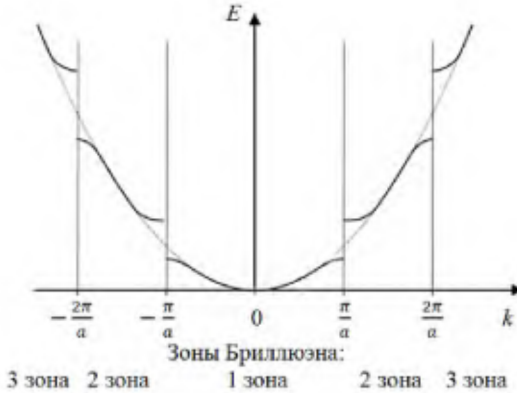


Рис. 40.3

Все это следует из дисперсионного соотношения для электрона в кристалле, но может быть объяснено и рассмотрением электрона как волны, испытывающей дифракцию на кристаллической решетке. При дифракции нормально падающей волны формула Брэгга-Вульфа имеет вид

$$a = n \frac{\lambda}{2}. \quad (40.23)$$

Эта формула задает условие возникновения стоячей волны в кристалле. Она соответствует условию разрыва зависимости  $E(k)$ . Если же условие возникновения стоячей волны в кристалле не соблюдается, то волна является бегущей, и ее дисперсионное соотношение  $E(k)$  близко к дисперсионному соотношению  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  для свободного электрона.

Дважды дифференцируя энергию свободного электрона по  $k$ , получим массу свободного электрона. Дважды дифференцируя

энергию электрона в кристалле по  $k$ , получим *эффективную массу* электрона. В соответствии с рис. 40.3 на границах зон Бриллюэна эта масса может на порядки отличаться от массы свободного электрона, а в ряде ситуаций — даже быть отрицательной.

## 40.5. Приближение сильной связи

В приближении сильной связи при решении уравнения Шредингера для электрона в кристалле в качестве нулевого приближения выбирается состояние электрона в изолированном атоме. С точки зрения классической физики у связанного электрона недостаточно энергии для перехода к другому ядру, но помогает квантовый туннельный эффект.

Коэффициент прохождения для такой задачи можно записать в следующем виде:

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}\beta a\right), \quad D \ll 1. \quad (40.24)$$

Здесь в оценке вероятности туннелирования электрона к соседнему ядру по формуле для прямоугольного барьера в качестве ширины барьера выбран период кристаллической решетки  $a$ ,  $U_0$  — высота барьера.

Электрон с высокой частотой  $\nu$  осциллирует внутри атома и с той же частотой приближается к барьеру:

$$\nu = \frac{v}{a}, \quad (40.25)$$

где  $v$  — скорость электрона.

В результате время жизни электрона у конкретного ядра

$$\Delta t = \frac{D}{\nu} \approx \frac{a}{v} \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}a\right). \quad (40.26)$$

Тогда из соотношения неопределенностей следует оценка размытости энергетического уровня электрона:

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t} \approx \frac{\hbar v}{D} \approx \frac{\hbar v}{a} \exp\left(\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}a\right). \quad (40.27)$$

Подставим в формулы характерные значения скорости электрона в атоме  $v \approx 10^6$  м/с, периода кристаллической решетки  $a \approx 3 \cdot 10^{-10}$  м,  $U_0 - E \approx 1$  эВ. Получим оценки для коэффициента прозрачности барьера  $D \approx 0,05$  и размытости энергетического уровня электрона  $\Delta E \approx 10^{-19}$  Дж  $\approx 1$  эВ. Размытость порядка 1 эВ получается и при более строгих расчетах. В результате и в приближении сильной связи получаем энергетические зоны в кристалле шириной порядка 1 эВ. Но в отличие от приближения слабой связи в случае сильной связи волновые функции электронов локализованы вблизи ядер атомов.

## 40.6. Металлы, диэлектрики, полупроводники по зонной теории

Твердые тела подразделяют на металлы, диэлектрики и полупроводники в первую очередь по удельной электропроводности. Удельная электропроводность металлов велика и составляет обычно  $10^6 - 10^8$  (Ом  $\cdot$  м) $^{-1}$ . Удельная электропроводность диэлектриков мала и обычно лежит в пределах  $10^{-11} - 10^{-8}$  (Ом  $\cdot$  м) $^{-1}$ . Полупроводники занимают промежуточное положение, причем их электропроводность сильно зависит от температуры. Понять такое разнообразие электрических свойств помогает анализ зонной структуры твердых тел.

В кристалле объемом 1 см<sup>3</sup> содержится порядка  $10^{22}$  атомов. Для характерной ширины энергетической зоны 1 эВ расстояние между уровнями в зоне составляет  $\sim 10^{-22}$  эВ. Таким образом, энергетический спектр электронов в пределах зоны можно считать практически непрерывным. При этом заполнение зон в кристалле идет снизу вверх.

Возникновение электрического тока сопровождается увеличением энергии электронов, которые являются носителями тока вдоль направления действующей на него силы. Так, несложно оценить, что при напряженности электрического поля  $10^3$  В/м на средней длине свободного пробега электрона в кристалле (ее характерное значение  $10^{-8}$  м) электрон увеличивает энергию примерно на  $10^{-5}$  эВ. Такой

энергии явно недостаточно, чтобы перейти на более высокую зону, так что переходы возможны лишь внутри одной энергетической зоны. Действительно, характерная ширина запрещенной зоны составляет 1 эВ, а варьируется эта ширина обычно в пределах 0,1–10 эВ.

Поэтому понятно, что для высокой проводимости твердому телу необходимо, чтобы в его зонной структуре имелись частично заполненные зоны, на которые электроны могли бы переходить под действием электрического поля. Так, все *металлы* обладают частично заполненными зонами (рис. 40.4, *а*).



Рис. 40.4

Если же верхняя энергетическая зона твердого тела заполнена электронами полностью, то электрическое поле не способно увеличить энергию электронов и создать электрический ток. Ведь вышележащие вакансии в зоне заняты, а перейти в вышележащую зону не хватает энергии. Такая ситуация имеет место в *диэлектриках* и *полупроводниках*, причем полупроводники отличаются меньшей шириной запрещенной зоны (рис. 40.4, б, в). У диэлектриков ширина запрещенной зоны примерно больше 3 эВ, а у полупроводников — меньше 3 эВ.

Верхняя заполненная зона называется *валентной зоной*. Следующая за ней еще более высокая частично заполненная или свободная зона называется *зоной проводимости*.

Для большей части полупроводников ширина запрещенной зоны  $\Delta E_g$  гораздо больше характерной энергии теплового движения  $kT$ :

$$\Delta E_g \gg kT. \quad (40.28)$$

Поэтому при комнатной температуре полупроводники обычно ток не проводят. Перевести электроны из валентной зоны в зону проводимости можно, например, с помощью фотонов с энергией

$$h\nu > \Delta E_g \quad (40.29)$$

Другой способ повышения проводимости полупроводника — существенно нагреть его, с тем чтобы наиболее энергичные электроны из хвоста распределения Максвелла смогли в заметном количестве перейти из валентной зоны в зону проводимости. При этом проводить ток сможет не только свободный электрон в зоне проводимости, но и образовавшаяся вакансия в валентной зоне. Такая вакансия называется *дыркой*. Она проводит ток, поскольку позволяет нижерасположенным электронам зоны повысить свою энергию и участвовать в дрейфовом токовом движении. Переход электрона из валентной зоны в зону проводимости называют *процессом генерации пары носителей заряда* (электрона и дырки), обратный переход — процессом рекомбинации.

## 41. Строение атомного ядра. Радиоактивность

### 41.1. Заряд, масса, радиус, спин, квантовый характер ядра

Перейдем теперь к изучению основ ядерной физики.

Э. Резерфорд, анализируя опыты по прохождению  $\alpha$ -частиц (ядер атома гелия) через золотую фольгу, пришел к выводу о том,

что в центре атома существует чрезвычайно малое положительно заряженное ядро, в котором сосредоточена почти вся масса атома. Это ядро окружено электронами. С открытием Чедвиком нейтрона в 1932 г. стало ясно, что ядро состоит из элементарных частиц двух типов — *протонов и нейтронов*.

Протон имеет положительный заряд, равный по модулю и противоположный по знаку заряду электрона, и массу

$$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг.} \quad (41.1)$$

Нейтрон — электрически нейтральная частица массой

$$m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ кг.} \quad (41.2)$$

Масса протонов и нейтронов здесь дана с высокой точностью, поскольку такая точность понадобится для дальнейших выкладок. Протоны и нейтроны, входящие в ядро, называются *нуклонами*. Число нуклонов в атомном ядре называется *массовым числом ядра A*. Число протонов в ядре  $Z$  совпадает с номером химического элемента в периодической системе элементов Менделеева и называется *зарядовым числом ядра*. Ядра одного элемента с разным числом нейтронов называют *изотопами*. Ядра разных элементов с одинаковым массовым числом называют *изобарами*.

Найдем теперь соотношение размеров ядер разных элементов. Опыт показывает, что это можно сделать в приближении, что плотность нуклонов практически одинакова во всех ядрах. Полагая, что объем ядра  $V_j$  примерно равен сумме объемов нуклонов  $V_n$ , имеем

$$V_j \approx A V_n. \quad (41.3)$$

Отсюда следует, что радиус ядра, пропорциональный кубическому корню из объема, пропорционален кубическому корню из массового числа:

$$R = R_0 A^{1/3}. \quad (41.4)$$

Эта формула особо хорошо работает в достаточно больших ядрах — при  $Z > 20$ . При этом коэффициент пропорциональности условен и зависит от обстоятельств. Так, при рассмотрении электромагнит-

ных взаимодействий ядра можно принять  $R_0 \approx 1,12 \cdot 10^{-15}$  м, а при рассмотрении ядерных взаимодействий —  $R_0 \approx (1,2 \dots 1,4) \cdot 10^{-15}$  м.

Оценим теперь, является ли ядро квантовым объектом. Найдем длину волны де Бройля  $\lambda$   $\alpha$ -частиц, использовавшихся в опытах Резерфорда. Эти частицы рождались с энергией  $E = 5$  МэВ при распаде радиоактивных атомов. Учитывая, что  $\alpha$ -частица состоит из двух протонов и двух нейтронов, сделаем оценку:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_{\alpha}E}} \approx 6 \cdot 10^{-15} \text{ м.} \quad (41.5)$$

Получаем, что длина волны де Бройля  $\alpha$ -частицы сравнима с размером ядра. Это означает, что ядро надо рассматривать как квантовый объект. Так, условность радиуса ядра в значительной мере связана с волновым характером ядра.

Ядро характеризуется собственным моментом импульса — спином ядра, который складывается из спинов нуклонов и из орбитальных моментов импульса нуклонов при движении внутри ядра. Спин ядра квантуется по аналогии с орбитальным моментом импульса электронов атома:

$$L_{я} = \hbar \sqrt{I(I+1)}, \quad (41.6)$$

где  $I$  — *спиновое ядерное квантовое число (спин ядра)*.

Спин ядра принимает целые или полуцелые значения  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ . Ядра с четными  $A$  имеют целые  $I$ , с нечетными — полуцелые  $I$ . Ядро обладает магнитным моментом, который мал по сравнению с магнитным полем электронов атома. При помещении атома в магнитное поле благодаря взаимодействию магнитного момента ядра с магнитным полем электронов атома имеет место расщепление уровней энергии атома на близко расположенные подуровни — *сверхтонкая структура*.

Ядро обозначается так же, как и соответствующий нейтральный атом. Так, ядро атома гелия, состоящее из трех нуклонов (двух протонов и одного нейтрона) обозначают  ${}^3_2\text{He}$ . В общем случае ядро элемента  $X$  с числом нуклонов в ядре  $A$  и числом протонов в ядре  $Z$  обозначают  ${}^A_Z X$ .

## 41.2. Удельная энергия связи ядер разных элементов. Модели ядра

Несмотря на силы кулоновского отталкивания между протонами, атомные ядра, являются достаточно устойчивыми образованиями (за исключением некоторых элементов из конца периодической системы элементов Менделеева). Силы, удерживающие нуклоны вместе, называются *ядерными*. Эти силы не зависят от заряда нуклона и одинаковы для притяжения любых двух нуклонов, имеющих одинаковое спиновое и орбитальное состояния. Ядерные силы являются короткодействующими и проявляются лишь на расстояниях порядка  $10^{-15}$  м. Если кулоновские силы являются проявлением фундаментального электромагнитного взаимодействия, то ядерные силы — это проявление наиболее интенсивного из фундаментальных взаимодействий — *сильного взаимодействия*. Именно поэтому при объединении нуклонов в ядро выделяется огромная энергия.

В соответствии с принципом эквивалентности массы и энергии Эйнштейна  $E = mc^2$ , при этом имеет место заметное уменьшение массы ядра по сравнению с массой исходных свободных нуклонов. Из закона сохранения энергии следует, что для разделения ядра на отдельные нуклоны требуется такое же количество энергии, которое выделяется при образовании ядра. *Энергией связи ядра* называют энергию, необходимую для расщепления ядра на протоны и нейтроны. Согласно принципу эквивалентности массы и энергии, энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{св} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_я]c^2, \quad (41.7)$$

где  $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_я$  — соответственно массы протона, нейтрона и ядра.

Увеличение массы системы при расщеплении ядра

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я \quad (41.8)$$

называют *дефектом массы* ядра. Дефект массы составляет обычно примерно 1% от массы ядра. Это в десятки раз больше, чем массовая доля электронов в атоме, которую можно оценить следующим образом:

$$\frac{Zm_e}{Am_p} \approx 2 \cdot 10^{-4}. \quad (41.9)$$

Часто удобно использовать *удельную энергию связи*  $E_{y\delta}$ , отнормированную на один нуклон:

$$E_{y\delta} = E_{сд}/A. \quad (41.10)$$

Для легких ядер удельная энергия связи резко (хотя и не совсем монотонно) возрастает с ростом  $A$ , а для более тяжелых ядер ( $A > 20$ ) практически остается постоянной и равной примерно 8 МэВ. При этом максимум 8,6 МэВ имеет место для элемента с  $A \approx 56$  (ядро железа). Рост и выход на насыщение удельной энергии связи свидетельствует о короткодействии ядерных сил, обеспечивающем эффективное взаимодействие лишь соседних нуклонов. Действительно, геометрическая модель показывает, что вблизи шарика можно разместить лишь около 20 таких же шариков. Некоторое уменьшение удельной энергии связи при  $A > 50 \dots 60$  связано с ростом роли кулоновского отталкивания между протонами при большом числе протонов в ядре.

Таким образом, наиболее энергетически устойчивыми оказываются ядра средней части периодической системы Менделеева, а тяжелые и легкие ядра менее устойчивы. Поэтому энергетически выгодными являются процессы деления тяжелых ядер на более легкие и слияние легких ядер с образованием более тяжелых ядер. Деление тяжелых ядер является основой ядерной энергетики. Слияние легких ядер дает энергию звездам и должно стать основой термоядерной энергетики будущего.

Можно отметить еще, что повышенную устойчивость проявляют так называемые *магические ядра*, у которых число протонов или число нейтронов составляет 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Такая устойчивость является следствием оболочечной структуры ядра и проявляется аналогично устойчивости заполненных электронных оболочек атома. Например, благодаря двойным магическим свойствам свинец с 82 протонами и 126 нейтронами встречается на Земле чаще, чем соседние по таблице Менделеева элементы. Можно заметить повышенную концентрацию и других элементов с магическими ядрами.

Дадим теперь краткое описание моделей ядра. Поскольку ядро в общем случае состоит из большого числа нуклонов, то такая квантовая задача взаимодействия многих тел является слишком сложной. Рассмотрим поэтому упрощенные модели, позволяющие описать основные свойства ядер.

*Капельная модель ядра* предложена рядом теоретиков в 30-е гг. XX в. Как следует из формулы для радиуса ядра, несжимаемое ядро так же состоит из нуклонов, как несжимаемая капля жидкости состоит из молекул. При этом если в ядре эффективно взаимодействуют только соседние нуклоны, то в капле взаимодействуют только соседние молекулы. Капельная модель ядра дала возможность в целом объяснить зависимость энергии связи нуклонов ядра от порядкового номера элемента и обосновала механизмы ядерных реакций. Но она оказалась не способной объяснить устойчивость магических ядер.

*Оболочечная модель ядра* предложена в 1950 г. Она предполагает, что нуклоны в ядре, как и электроны в атоме, распределены в соответствии с принципом Паули по энергетическим уровням. При этом ядра с полностью заполненными нуклонами оболочками являются наиболее устойчивыми, как и полностью заполненные электронные оболочки в атоме. При рассмотрении движения нуклона в ядре как квантового трехмерного осциллятора с учетом спин-орбитального взаимодействия получаются реальные параметры магических ядер. Оболочечная модель ядра особенно хорошо работает для легких и средних ядер, а также для невозбужденных ядер.

Важную роль в ядерных процессах играют возбужденные ядра. Структура возбужденных уровней ядра отчасти похожа на структуру энергетических уровней молекул. Так, помимо ядерных уровней возбуждения, соответствующих определенным оболочкам, существуют многочисленные колебательные и вращательные уровни возбуждения. Зависимость плотности возбужденных уровней от энергии описывается *статистической моделью ядра*, рассматривающей возбуждение как нагрев нуклонного газа.

Отметим еще *оптическую модель ядра*, которая применяется для описания взаимодействия ядер с налетающими на них частицами. При этом рассеяние нуклона ядром рассматривается аналогично прохожде-

нию света через полупрозрачную среду с комплексным показателем преломления (действительная часть определяет коэффициент преломления среды, а мнимая — коэффициент поглощения).

### 41.3. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада

*Радиоактивность* — это способность атомных ядер самопроизвольно (*спонтанно*) распадаться и превращаться в другие ядра с излучением одной или нескольких частиц. Исходное распадающееся ядро называют *родительским*, или *материнским*, а образовавшееся ядро — *дочерним*. *Естественная радиоактивность* — это самопроизвольный распад ядер элементов, встречающихся в природе. Часть таких ядер сохранилась со времен возникновения Земли. Очевидно, что скорость распада таких ядер невысока — в противном случае они бы за миллиарды лет существования Земли все распались. Некоторые радиоактивные ядра появляются в результате ядерных реакций под действием космических лучей. *Искусственная радиоактивность* — спонтанный распад ядер элементов, искусственно полученных с помощью ядерных реакций. Например, новые элементы получают при бомбардировке ядер энергичными частицами в ускорителях элементарных частиц. Принципиальной разницы да и четкой границы между этими двумя видами радиоактивности нет.

Естественную радиоактивность солей урана впервые обнаружил вследствие почернения фотопластинок французский физик А. Беккерель в 1896 г. В дальнейшем было выяснено, что радиоактивные свойства элемента определяются лишь строением его ядра. Исследуем подробнее теорию радиоактивного распада. Процесс радиоактивного распада, как и многие процессы квантовой физики, является статистическим. Нельзя заранее предсказать, когда конкретно распадется то или иное ядро. Но если ядер много (а в радиоактивном образце так обычно и бывает), то их распад подчиняется строгим статистическим закономерностям.

Количество ядер  $dN$  данного изотопа, распавшихся в среднем за интервал времени  $dt$ , пропорционально числу  $N$  родительских ядер и времени  $dt$ :

$$dN = -\lambda N dt, \quad (41.11)$$

где  $\lambda$  — постоянная распада, характеризующая скорость распада данного изотопа; знак минус указывает, что число родительских ядер со временем уменьшается.

Разделив переменные и интегрируя в предположении, что при  $t = 0$  имелось количество ядер  $N_0$ , получим

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt, \quad (41.12)$$

$$N = N_0 \exp(-\lambda t). \quad (41.13)$$

Полученный закон радиоактивного распада свидетельствует о том, что количество радиоактивных ядер убывает со временем по экспоненте.

Интенсивность радиоактивного распада характеризуют период полураспада  $T_{1/2}$  и среднее время жизни  $\tau$  ядра. Период полураспада  $T_{1/2}$  — это время, за которое количество родительских ядер уменьшается вдвое. Подставляя

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \quad (41.14)$$

и после преобразования (логарифмируя), получим

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda}. \quad (41.15)$$

Суммарная продолжительность жизни ядер определяется интегралом:

$$T = \int_0^\infty N(t) dt = N_0 \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{N_0}{\lambda}, \quad (41.16)$$

откуда делением на начальное количество родительских ядер получим среднее время жизни ядра:

$$\tau = \frac{T}{N_0} = \frac{1}{\lambda}. \quad (41.17)$$

Таким образом, *постоянная распада является величиной, обратной среднему времени жизни ядра.*

Число распадов ядер в секунду

$$A = -dN/dt = \lambda N \quad (41.18)$$

называют *активностью нуклида*. (Нуклидом будем называть вид атомов, характеризующихся определенным массовым числом, зарядовым числом и энергетическим состоянием их ядер.) Единица активности в СИ — *беккерель* (Бк), соответствующий одному акту распада в секунду. Для реальных радиоактивных образцов 1 Бк — это очень мало. Поэтому часто применяется более весомая внесистемная единица активности нуклида, равная числу распадов 1 г радия в одну секунду — *кюри* (Ки): 1 Ки =  $3,7 \cdot 10^{10}$  Бк.

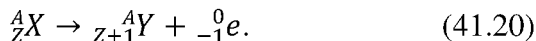
#### 41.4. $\alpha$ -распад, $\beta$ -распад. Нейтрино

Традиционно к радиоактивным процессам причисляют  $\alpha$ -распад (распад ядра с испусканием  $\alpha$ -частицы),  $\beta$ -распад (распад ядра с испусканием  $\beta$ -частицы) и  $\gamma$ -излучение (испускание ядром  $\gamma$ -частицы). Наряду с ними возможно деление ядер, испускание нейтронов и протонов и др.  $\alpha$ -частицей называют ядро гелия, состоящее из двух протонов и двух нейтронов:  $\alpha = {}^4_2\text{He}$ ;  $\beta$ -частица представляет собой электрон высокой энергии;  $\gamma$ -частица — это фотон высокой энергии.

$\alpha$ - и  $\beta$ -распады происходят в соответствии с *правилами смещения*, определяющими, какое ядро возникает в результате распада данного материнского ядра. Правила смещения для  $\alpha$ -распада:

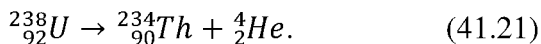


для  $\beta$ -распада:



Правила смещения диктуются законами сохранения электрического заряда и сохранения массы (точнее массового числа, поскольку небольшая часть массы в этих ядерных реакциях переходит в энергию). Если дочерние ядра также подвержены  $\alpha$ -распаду, то возникает целая цепочка превращений с образованием семейства радиоактивных ядер, вплоть до стабильного изотопа.

Энергия связи  $\alpha$ -частицы составляет 28 МэВ, что соответствует удельной энергии связи 7 МэВ на нуклон. Поэтому  $\alpha$ -распад не может происходить у ядер из середины таблицы Менделеева, у которых удельная энергия связи составляет 8 МэВ на нуклон и более. Поэтому спонтанный  $\alpha$ -распад имеет место только у тяжелых ядер с  $A = 140 \dots 160$  и  $A > 200$ . Классическим примером  $\alpha$ -распада является распад ядер урана  ${}_{92}^{238}U$  с образованием ядер тория  ${}_{90}^{234}Th$ :



Механизм  $\alpha$ -распада реализуется следующим образом. Сначала в результате случайного сближения четырех соответствующих нуклонов внутри ядра на короткое время образуется  $\alpha$ -частица. Энергия этой частицы меньше высоты потенциального барьера, который необходимо преодолеть для выхода из ядра. Но существует вероятность квантового туннелирования, которая и определяет период полураспада конкретного изотопа.

Диапазон энергий вылетающих при распаде  $\alpha$ -частиц составляет от 4 до 9 МэВ, причем чем меньше энергия, тем больше период полураспада. Это согласуется с теорией туннельного эффекта, в соответствии с которой чем больше энергия  $\alpha$ -частиц, тем больше вероятность туннелирования и тем скорее радиоактивный атом распадется.

Спектр энергий  $\alpha$ -частиц при  $\alpha$ -распаде является дискретным. Объяснить это можно тем, что дочерние ядра образуются не только в основном, но и в возбужденных состояниях. Эта энергия возбуждения обычно выделяется в виде  $\gamma$ -излучения.

При попадании в вещество  $\alpha$ -частицы интенсивно ионизируют атомы и теряют энергию. Проникающая способность  $\alpha$ -частиц не-

лика, и они задерживаются слоем воздуха в несколько сантиметров или слоем биоткани в десятки микрометров.

Явление  $\beta$ -распада (или электронного распада) проявляется в вылете электрона из ядра. Спектр этих электронов непрерывный: от 0 до  $E_{\text{макс}}$ , что противоречит дискретности ядерных возбужденных состояний. Другая проблема состоит в том, что при вылете электрона число нуклонов в ядре не меняется, поэтому не меняется и спин ядра. Но с другой стороны, вылет электрона со спином  $\hbar/2$  по законам квантования должен изменить спин ядра на ту же величину  $\hbar/2$ .

В 1931 г. В. Паули для решения этих противоречий предположил, что при  $\beta$ -распаде вместе с электроном рождается еще одна частица с нулевым зарядом, спином  $\hbar/2$  и нулевой (или почти нулевой — меньше  $10^5 m_e$ ) массой. Впоследствии эту трудно находимую частицу назвали *антинейтрино* и обозначили  $\bar{\nu}$ . Выяснилось, что  $\beta$ -распад является не внутроядерным, а внутринуклонным процессом — процессом распада нейтрона. Поэтому более точная формула  $\beta$ -распада выглядит так:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}. \quad (41.22)$$

Такое превращение энергетически выгодно, поскольку масса нейтрона превышает суммарную массу протона и электрона. Поэтому неудивительно, что в свободном состоянии нейтрон вообще является нестабильной частицей с периодом полураспада всего 10,5 мин.

$\beta$ -распад является проявлением *слабого взаимодействия*, которое является одним из *четырех фундаментальных взаимодействий* наряду с гравитационным, электромагнитным и сильным взаимодействиями. Свое название слабое взаимодействие получило потому, что оно гораздо слабей двух других характерных взаимодействий ядерной физики (сильного и электромагнитного). Впрочем, слабое взаимодействие все же значительно сильнее гравитационного взаимодействия. Слабое взаимодействие является короткодействующим и проявляется на расстояниях примерно  $10^{-18}$  м — значительно меньших размера атомного ядра.

Именно антинейтрино уносит часть энергии при  $\beta$ -распаде, что приводит к непрерывному спектру электронов. Образование антинейтрино позволило объяснить и сохранение спина ядра при  $\beta$ -распаде — спин электрона попросту компенсируется спином антинейтрино.

Типичным примером  $\beta$ -распада является превращение изотопа водорода трития в гелий:



Часто  $\beta$ -распадом называют еще два вида распада, связанных с взаимным превращением нейтрона и протона ядра.

Так, при *позитронном распаде* протон ядра распадается на нейтрон, позитрон и нейтрино. *Позитрон* (антиэлектрон)  ${}^0_{+1}e$  — это частица с массой электрона, но с положительным зарядом. Нейтрино  $\nu$  и антинейтрино  $\bar{\nu}$  похожи по основным характеристикам (нулевой заряд, спин  $\hbar/2$  и нулевая или почти нулевая масса), но отличаются по дополнительным характеристикам (знаку лептонного заряда и спиральности). Реакция позитронного распада энергетически невыгодна, но недостающая энергия может восполняться ядром.

При *электронном захвате* электрон атома захватывается протоном ядра с образованием нейтрона и нейтрино.

При попадании в вещество  $\beta$ -частицы ионизируют атомы и тратят энергию. Проникающая способность  $\beta$ -частиц выше, чем  $\alpha$ -частиц. Например, электроны энергией 1 МэВ задерживаются слоем воздуха в несколько метров или слоем биоткани в несколько миллиметров. Следует учитывать, что  $\beta$ -частицы в веществе генерируют тормозное излучение с более высокой проникающей способностью.

## 41.5. $\gamma$ -излучение и его свойства

Как отмечалось выше, возбужденное дочернее ядро может перейти в основное состояние с испусканием  $\gamma$ -излучения дискретного спектра. При этом часто предпочтительным оказывается не прямой

переход в основное состояние, а переход через ряд промежуточных состояний с испусканием нескольких  $\gamma$ -квантов разной энергии. Обычно  $\gamma$ -кванты имеют энергию от 10 кэВ до 5 МэВ. При таких высоких энергиях длина волны оказывается маленькой, и  $\gamma$ -излучение обычно удобнее рассматривать как поток частиц, пренебрегая волновыми свойствами.

Конкурирующим с испусканием  $\gamma$ -излучения процессом является *внутренняя конверсия* — передача энергии возбуждения ядра одному из электронов этого же атома. При этом испускается *электрон конверсии*. Электроны конверсии обладают дискретным спектром энергии, причем каждое значение энергии электрона  $T$  определяется разностью энергии возбуждения ядра  $E_{\text{возб}}$  и работы выхода электрона  $A_{\text{вых}}$  с данной оболочки атома:

$$T = E_{\text{возб}} - A_{\text{вых}}. \quad (41.24)$$

Далее образовавшаяся вакансия заполняется электронами с вышележащих оболочек, что сопровождается характеристическим рентгеновским излучением.

При прохождении пучка  $\gamma$ -квантов сквозь вещество происходит их поглощение, причем интенсивность  $\gamma$ -излучения ослабляется по закону Бугера-Ламберта:

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (41.25)$$

где  $I_0$  и  $I$  — интенсивности  $\gamma$ -излучения соответственно на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной  $x$ ;

$\mu$  — коэффициент поглощения, зависит от свойств вещества и от энергии  $\gamma$ -квантов.

Вследствие высокой проникающей способности  $\gamma$ -излучения коэффициент поглощения обычно невелик. Если на процесс поглощения накладывается рассеяние (столкновения, приводящие к изменению направления движения частицы), то траектория  $\gamma$ -квантов перестает быть прямолинейной, что приводит к уменьшению толщины слоя поглощающего вещества.

Рассмотрим основные процессы взаимодействия  $\gamma$ -излучения с веществом, которые, как и процессы с участием других частиц вы-

сокой энергии, часто имеют деградационный и каскадный характер. *Деградационный процесс* — процесс потери энергии быстрой частицей, например, за счет каскадных процессов или столкновений. *Каскадный процесс* — процесс потери энергии быстрой частицей за счет передачи энергии образующимся в каскаде вторичным частицам.

*Фотоэффект для  $\gamma$ -излучения* — процесс, при котором атом поглощает  $\gamma$ -квант и испускает с одной из внутренних оболочек электрон. Поскольку освободившаяся вакансия заполняется электроном вышележащей оболочки, то фотоэффект сопровождается характеристическим рентгеновским излучением. Фотоэффект доминирует при небольших энергиях  $\gamma$ -квантов ( $E_\gamma < 100$  кэВ).

С ростом энергии  $\gamma$ -квантов вероятность фотоэффекта падает, и при  $E_\gamma \approx 0,5$  МэВ основным процессом взаимодействия  $\gamma$ -квантов с веществом становится *комптоновское рассеяние* (эффект Комптона). Комптоновское рассеяние является не просто рассеянием в буквальном смысле этого слова — т. е. столкновением, приводящим к изменению направления движения кванта. Такое столкновение сопровождается и уменьшением энергии  $\gamma$ -кванта, а значит, комптоновское рассеяние является деградационным процессом.

Если энергия  $\gamma$ -кванта превышает удвоенную энергию покоя электрона  $2m_e c^2 = 1,02$  МэВ, то возможно *образование электронно-позитронных пар*. Вероятность этого процесса пропорциональна  $Z^2$  и растет с увеличением энергии  $\gamma$ -кванта. Поэтому при  $E_\gamma \approx 10$  МэВ образование электронно-позитронных пар начинает доминировать.

Если энергия  $\gamma$ -кванта превышает энергию связи нуклонов в ядре, то под действием  $\gamma$ -излучения может иметь место *ядерный фотоэффект* — выброс из ядра одного из нуклонов, чаще всего нейтрона.

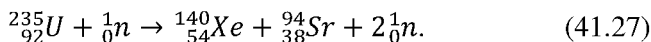
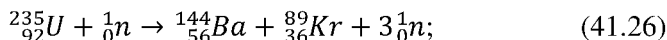
Проникающая способность  $\gamma$ -излучения высока, поскольку  $\gamma$ -кванты не имеют заряда и относительно слабо взаимодействуют с веществом. В воздухе оно может распространяться на сотни метров и даже километры. А для ослабления его в два раза необходим слой воды 20 см, бетона — 10 см.

## 41.6. Искусственная радиоактивность

Искусственную радиоактивность открыли супруги Жолио-Кюри в 1934 г. Они выяснили, что после бомбардировки альфа-частицами некоторые легкие ядра (магний, бор, алюминий) испускают позитроны. С тех пор исследователями было инициировано и стимулировано множество ядерных реакций. Некоторые из этих реакций играют ключевую роль в развитии цивилизации. Выше было показано, что энергетически выгодными являются ядерные реакции распада тяжелых ядер на средние и ядерные реакции слияния легких ядер (синтеза).

Начнем с классической *ядерной реакции распада (деления)* ядра урана  ${}^{235}_{92}\text{U}$  при бомбардировке нейтронами. Эти нейтроны не обязательно должны подаваться в систему снаружи. В радиоактивном материале они обычно возникают самопроизвольно. Для средних ядер энергетически выгодное число нейтронов примерно равно числу протонов ( $A - Z)/Z \approx 1,3 \dots 1,4$ , а для тяжелых ядер число нейтронов заметно превышает число протонов ( $A - Z)/Z \approx 1,6$ . Поэтому при распаде тяжелого ядра урана образовавшиеся средние ядра стремятся избавиться от лишних нейтронов, испуская их.

Поскольку в средних элементах удельная энергия связи меняется слабо, то при бомбардировке нейтронами ядер урана  ${}^{235}_{92}\text{U}$  со сравнимой вероятностью идет целый ряд процессов с образованием двух радиоактивных осколков неравной (но и не слишком далекой) массы, разлетающихся с большими скоростями в разные стороны, и двух-трех нейтронов, называемых нейтронами деления. Приведем две характерные реакции:



Часть образовавшихся нейтронов может провзаимодействовать с ядрами урана и стимулировать продолжение ядерной реакции, а часть может покинуть делящийся образец урана или вступить в кон-

курующую реакцию. Возникает *цепная ядерная реакция* — самоподдерживающаяся реакция деления тяжелых ядер, в которой воспроизводятся нейтроны, делящие новые ядра. Скорость цепной реакции определяется *коэффициентом размножения нейтронов*  $k$  — отношением числа нейтронов данного поколения, вступающих в ядерную реакцию, к породившему их числу нейтронов предыдущего поколения.

Пусть  $T$  — среднее время жизни нейтрона до вступления в ядерную реакцию,  $N$  — число нейтронов данного поколения. Тогда число нейтронов следующего поколения равно  $kN$ . Таким образом, увеличение числа нейтронов за поколение

$$dN = kN - N = N(k - 1). \quad (41.28)$$

В свою очередь, увеличение числа нейтронов в единицу времени

$$dN/dt = N(k - 1)/T. \quad (41.29)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$N = N_0 e^{(k-1)t/T}, \quad (41.30)$$

где  $N_0$  — число нейтронов в начальный момент времени.

Из формулы видно, что при  $k > 1$  имеет место лавинообразное экспоненциальное увеличение числа нейтронов и скорости реакции. При этом поскольку в ядерной реакции выделяется колоссальное количество энергии, то происходит ядерный взрыв. При  $k < 1$  число нейтронов падает, и идет затухающая реакция. При  $k = 1$  идет самоподдерживающаяся реакция, в ходе которой число нейтронов не меняется. Такой режим является неустойчивым и без специальной системы поддержания устойчивости благодаря случайным обстоятельствам переходит во взрывной или затухающий режим.

Чем больше образец урана, тем больше вероятность того, что нейтрон успеет вступить в ядерную реакцию до того, как покинет образец. Поэтому говорят о *критической массе* урана, которая должна быть превышена для возникновения самоподдерживающейся реакции или взрыва. Эта масса зависит от степени загрязнения вещества и формы образца. Так, для взрыва два или несколько кус-

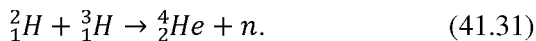
ков радиоактивного вещества массами, меньшими критической, объединяют в единое целое массой, превышающей критическую.

Деление ядер сопровождается выделением энергии примерно 1 МэВ на нуклон. В результате 1 г урана может дать столько энергии, сколько сжигание 3 т угля. Это используется в управляемых ядерных реакциях в атомной энергетике и в неуправляемых ядерных реакциях в ядерном оружии.

Возможно, еще более важную роль играют термоядерные реакции. *Термоядерная реакция (ядерная реакция синтеза)* — это реакция объединения легких ядер в более тяжелые. Чтобы произошла реакция синтеза, сближающиеся ядра должны иметь большую кинетическую энергию, позволяющую им преодолеть силу электростатического отталкивания протонов. Большую кинетическую энергию (даже в случае отсутствия термодинамического равновесия) обычно связывают с высокой эффективной температурой ядер. Поэтому и реакция названа термоядерной — от греческого слова *термо* — тепло.

Термоядерные реакции являются источником энергии звезд. Человечество использует их в термоядерном оружии — первая термоядерная (водородная) бомба эквивалентной мощностью 50 Мг тротила была испытана Россией на Новой Земле в августе 1953 г. При этом для разогрева легких ядер использовалась обычная ядерная бомба. Существенно, что термоядерная бомба может быть сколь угодно мощной, поскольку нет ограничений, связанных с критической массой. Но особо важно, что термоядерные реакции предполагается использовать в качестве неисчерпаемого источника мирной энергии термоядерных реакторов.

Рассмотрим подробнее одну из наиболее просто осуществляемых искусственным путем в земных условиях термоядерных реакций — *реакцию слияния ядер изотопов водорода дейтерия  ${}^2_1\text{H}$  и трития  ${}^3_1\text{H}$* :



В этой реакции выделяется 17,6 МэВ энергии, из них 3,5 МэВ уносится  $\alpha$ -частицей, а 14,1 МэВ уносится нейтроном. В пересчете на нуклон это 3,5 МэВ, что в 3,5 раза больше, чем в реакции урана.

Расстояние, на которое должны сблизиться ядра при синтезе, должно быть порядка размера самих ядер, поскольку только на таких расстояниях начинает действовать сильное взаимодействие, сила притяжения которого превосходит силу электростатического отталкивания протонов. Преодоление такого барьера высотой порядка 100 кэВ требует средней энергии ядер 10 кэВ, что соответствует температуре  $10^8$  К. Недостающий порядок энергии набирается за счет использования энергичных частиц хвоста распределения, а также за счет использования туннельного эффекта.

Для того чтобы выделявшаяся термоядерная энергия превысила энергию, потраченную на разогрев легких ядер, необходимо некоторое время  $t$  удержать достаточно высокую концентрацию  $n_{\text{я}}$  легких ядер. Отсюда возникает *критерий Лоусона* для времени удержания:

$$n_{\text{я}} t > 10^{20} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}. \quad (41.32)$$

Выполнить этот критерий можно двумя способами. Первый из них основан на удержании плазмы легких ядер концентрацией примерно  $10^{20} \text{ м}^{-3}$  в течение времени примерно 1 с в тороидальной камере магнитным полем. В настоящее время осуществляется международный демонстрационный проект термоядерного реактора «Токамак» (тороидальная камера с магнитными катушками). Второй способ основан на инерциальном удержании плазмы. При этом происходит импульсный нагрев мишени из легких ядер (например, пучком электронов или лучом лазера), и термоядерная реакция идет во время взрыва и разлета мишени. Время удержания при таком способе на несколько порядков меньше, чем в случае удержания магнитным полем, зато на те же несколько порядков удастся поднять концентрацию плазмы.

## **41.7. Регистрация и дозы радиоактивных излучений**

Методы наблюдения и регистрации радиоактивных излучений основаны в первую очередь на их ионизирующей способности — способности производить ионизацию и возбуждение атомов. Де-

*текторы радиоактивных излучений* можно условно разбить на три группы.

К первой группе отнесем *счетчики*, которые регистрируют радиоактивное излучение в данном объеме. Такая регистрация происходит по действию радиоактивного излучения в рабочем теле газоразрядных, люминесцентных, полупроводниковых и т. п. приборов.

Вторая группа — *трековые детекторы*, которые позволяют наблюдать траекторию частицы высокой энергии. Так, камера Вильсона фиксирует траекторию по конденсации перенасыщенного пара, искровая камера — по электрическому разряду, толстослойная фотопластинка — по фотохимическому действию.

Третья группа — *интегральные детекторы*, основанные на накоплении данных. Так, фотопленки фиксируют степень суммарного воздействия радиоактивного излучения по почернению пленки. Похожий процесс имеет место в ионизационных камерах непрерывного действия.

Воздействие радиоактивных излучений на вещество характеризуют дозой ионизирующего излучения.

*Поглощенная доза излучения* определяется отношением энергии излучения к массе облучаемого вещества. Единица поглощенной дозы излучения — *грей* (Гр):  $1 \text{ Гр} = 1 \text{ Дж/кг}$  — доза, при которой облученное вещество массой 1 кг получает энергию любого ионизирующего излучения 1 Дж.

*Мощность поглощенной дозы излучения* определяется отношением дозы излучения к времени облучения. Единица мощности поглощенной дозы — *грей в секунду* (Гр/с).

При рассмотрении воздействия радиоактивных излучений на биообъекты необходимо учитывать, что разные виды излучений действуют по-разному. Так, при определении эффективной дозы, измеряемой в *зивертах* (Зв), учитывается биологическое воздействие радиации. *Эффективная доза* равна поглощенной дозе, умноженной на коэффициент качества, зависящий от вида излучения.

*Коэффициент качества* — усредненный коэффициент относительной биологической эффективности (ОБЭ). Он характеризует опасность данного вида излучения по сравнению с  $\gamma$ -излучением.

Чем больше коэффициент качества, тем опаснее данное излучение. Коэффициент качества равен 1 для фотонов, электронов и мюонов; 3–20 — для нейтронов; 10–20 — для  $\alpha$ -частиц и тяжелых ядер; 5–10 — для протонов.

В целом можно выделить три сравнимых по интенсивности канала набора дозы современным человеком. В первом приближении треть дозы набирается за счет естественного уличного фона, треть — за счет собственного радиоактивного фона помещения и треть — при медицинских диагностических процедурах. В сумме городской житель получает дозу, близкую к 5 мЗв в год, а сельский — около 3,5 мЗв в год. Тем не менее допустимая доза облучения с целью диагностики в нашей стране достаточно велика и составляет 15 мЗв/год.

В зависимости от дозы облучения возможны следующие последовательные реакции биологического объекта: стимуляция развития, генетические изменения, стерилизация, замедление роста, остановка жизнедеятельности, химическое разложение. При этом при любом облучении человека даже небольшой дозой, сравнимой с естественным радиационным фоном, происходит пропорциональное увеличение числа генетических дефектов и онкологических заболеваний.

При облучении всего тела 1 Зв вызывает изменения в крови, 2–5 Зв вызывает облысение и лейкоз, примерно 3 Зв приводит к смерти в течение 30 дней в 50% случаев. При этом разом полученная доза оказывает более сильный эффект, чем постепенно полученная в течение длительного времени.

## **42. Современная физическая картина мира**

### **42.1. Космические лучи**

*Космические лучи* — ионизирующее излучение широкого спектра энергий, приходящее на Землю извне. Их открыл австрийский физик

В. Гесс в 1912 г., когда с помощью усовершенствованного электро-скопа измерил зависимость скорости ионизации воздуха от высоты. С ростом высоты скорость ионизации сначала падает, а на высотах выше 2000 м начинает резко возрастать. Такой минимум объясняется следующим. В верхней, разреженной, атмосфере чем больше концентрация атомов, тем больше скорость ионизации космическими лучами. Однако на высоте 2000 м плотность атмосферы уже настолько велика, что она уже успевает поглотить значительную часть частиц космических лучей, особенно частиц с невысокой энергией.

Процессы взаимодействия космических лучей с атмосферой в значительной мере носят деградиционный характер (сопряжены с потерями энергии быстрой частицей) и каскадный характер (сопряжены с рождением вторичных частиц). Поэтому различают *первичные космические лучи* — космические лучи до входа в атмосферу, и *вторичные космические лучи*, образовавшиеся в результате взаимодействия первичных космических лучей с атмосферой Земли.

Поток космических лучей на входе в атмосферу на высоте 50 км составляет порядка  $10^4$  частиц на квадратный метр в секунду. Состоят они из ядер атомов водорода (90%), гелия (7%) и более тяжелых элементов (1%), а также электронов (1%).

Уже на высоте 20 км процесс взаимодействия приводит к тому, что космические лучи являются в основном вторичными. В элементарных процессах взаимодействия космических лучей с атмосферой рождаются практически все известные элементарные частицы. Характерно каскадное взаимодействие, при котором фотон высокой энергии порождает электронно-позитронную пару, которая, в свою очередь, при торможении порождает фотоны высокой энергии и т. д.

Обращает на себя степенной характер убывания распределения космических частиц по энергии в широком диапазоне энергий — вплоть до  $10^{22}$  эВ. Это отличает космические лучи от привычных нам частиц с равновесными экспоненциальными распределениями. Такой степенной характер определяется их сильной неравновесностью. Так, аналогичный степенной вид имеют вторичные электроны, рождающиеся в результате каскадных процессов торможения релятивистских электронов в различных средах.

По своему происхождению от космических лучей галактического происхождения отделяют солнечные космические лучи, генерируемые на Солнце во время солнечных вспышек. Интенсивность солнечных космических лучей может быть велика и достигать порядка  $10^{10}$  частиц на квадратный метр в секунду. Состоят они в основном из протонов, но имеются и более тяжелые ядра и электроны. Энергия частиц солнечных космических лучей может достигать  $10^{11}$  эВ. Солнечные космические лучи могут представлять опасность для космонавтов.

Космические лучи почти равномерно заполняют пространство нашей Галактики. Однако в околоземном пространстве сила Лоренца магнитного поля планеты отклоняет лучи. При этом на расстоянии от нескольких сот до нескольких десятков тысяч километров от поверхности Земли возникают радиационные пояса — тороидальные области, полные заряженных космических частиц. Эти пояса характеризуются повышенной радиацией, и их расположение необходимо учитывать в космонавтике.

Космические лучи в значительной мере отвечают за естественный фоновый уровень радиации на поверхности нашей планеты.

## **42.2. Четыре вида фундаментальных взаимодействий**

В повседневной жизни мы сталкиваемся с разнообразными силами, возникающими при столкновении тел, трении, взрыве, натяжении нити, сжатии пружины и т. д. Однако все перечисленные силы являются результатом электромагнитного взаимодействия атомов друг с другом. Теория электромагнитного взаимодействия была создана Максвеллом в 1863 г.

Другим давно известным взаимодействием является гравитационное взаимодействие между телами, обладающими массой. В 1915 г. Эйнштейн создал общую теорию относительности, связавшую гравитационное поле с искривлением пространства-времени.

В 30-е гг. XX в. было обнаружено, что ядра атомов состоят из нуклонов, причем ни электромагнитные, ни гравитационные взаимодействия не могут объяснить, что удерживает нуклоны в ядре. Для описания взаимодействия нуклонов в ядре было предложено сильное взаимодействие.

При продолжении изучения микромира выяснилось, что некоторые явления не описываются тремя типами взаимодействия. Поэтому для описания распада нейтрона и других подобных процессов было предложено слабое взаимодействие.

Сегодня все известные в природе силы являются продуктом четырех фундаментальных взаимодействий, которые можно расположить по убыванию интенсивности в следующем порядке:

- сильное взаимодействие;
- электромагнитное взаимодействие;
- слабое взаимодействие;
- гравитационное взаимодействие.

Фундаментальные взаимодействия переносятся элементарными частицами — переносчиками фундаментальных взаимодействий. Эти частицы называют калибровочными бозонами. Процесс фундаментальных взаимодействий тел можно представить следующим образом. Каждое из тел испускает частицы — переносчики взаимодействий, которые поглощаются другим телом. При этом тела испытывают взаимное влияние.

Сильное взаимодействие может возникать между адронами (см. ниже). Оно является короткодействующим и характеризуется радиусом действия сил порядка  $10^{-15}$  м. Переносчиком сильного взаимодействия между адронами являются *пионы*, причем длительность протекания взаимодействия составляет порядка  $10^{-23}$  с.

Электромагнитное взаимодействие имеет на четыре порядка меньшую интенсивность по сравнению с сильным взаимодействием. Оно возникает между заряженными частицами. Электромагнитное взаимодействие является длиннодействующим и характеризуется бесконечным радиусом действия сил. Переносчиком электромагнитного взаимодействия являются *фотоны*, причем длительность протекания взаимодействия составляет порядка  $10^{-20}$  с.

Слабое взаимодействие имеет на 20 порядков меньшую интенсивность по сравнению с сильным взаимодействием. Оно может возникать между адронами и лептонами (см. ниже). Слабое взаимодействие является короткодействующим и характеризуется радиусом действия сил порядка  $10^{-18}$  м. Переносчиком слабого взаимодействия являются *векторные бозоны*, причем длительность протекания взаимодействия составляет порядка  $10^{-10}$  с.

Гравитационное взаимодействие имеет на 40 порядков меньшую интенсивность по сравнению с сильным взаимодействием. Оно возникает между всеми частицами. Гравитационное взаимодействие является длиннодействующим и характеризуется бесконечным радиусом действия сил. Переносчиком гравитационного взаимодействия, возможно, являются *гравитоны*. Эти частицы пока не найдены, что может быть связано с малой интенсивностью гравитационного взаимодействия. С малой интенсивностью гравитационного взаимодействия связано и то, что из-за малости масс элементарных частиц оно в процессах ядерной физики несущественно.

В 1967 г. Саламом и Вайнбергом была предложена *теория электрослабого взаимодействия*, объединившая электромагнитное и слабое взаимодействия. В 1973 г. была создана теория сильного взаимодействия — *квантовая хромодинамика*. Все это позволило создать *стандартную модель* элементарных частиц, описывающую электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия. Все три рассматриваемых здесь типа взаимодействия возникают как следствие постулата, что наш мир симметричен относительно трех типов калибровочных преобразований.

## **42.3. Элементарные и фундаментальные частицы. Кварки**

*Элементарная частица* — частица субъядерного мира, которую (по существующим представлениям) невозможно расщепить на составные части. Одни элементарные частицы имеют внутреннюю структуру и состоят из других элементарных частиц. Другие эле-

ментарные частицы считаются бесструктурными, их называют *фундаментальными частицами*. Заметим, что элементарных частиц сегодня известно больше, чем изотопов атомов.

Рассмотрим подробнее основные положения стандартной модели.

Все вещество состоит из 12 фундаментальных частиц-фермионов: 6 лептонов (электрон, мюон, тау-лептон и три сорта нейтрино) и 6 кварков ( $u, d, s, c, b, t$ ), которые можно объединить в три поколения фермионов.

Первое поколение включает в себя электрон, электронное нейтрино,  $d$ -кварк и  $u$ -кварк. Второе поколение включает в себя мюон, мюонное нейтрино,  $s$ -кварк и  $c$ -кварк. Третье поколение включает в себя тау-лептон, тау-нейтрино,  $b$ -кварк и  $t$ -кварк. Все обычные атомы содержат только фундаментальные частицы первого поколения. Второе и третье поколения заряженных частиц отсутствуют в обычной материи и наблюдаются только в условиях очень высоких энергий. Нейтрино всех поколений пронизывают Вселенную, но вследствие нейтральных свойств редко взаимодействуют с обычной материей.

Кварки участвуют в сильных, слабых и электромагнитных взаимодействиях; заряженные лептоны (электрон, мюон, тау-лептон) — в слабых и электромагнитных; нейтрино — только в слабых взаимодействиях.

К фундаментальным частицам относят и калибровочные бозоны.

Проведем теперь краткую классификацию элементарных составных (структурных) частиц — адронов. *Адроны* — это частицы, участвующие во всех видах фундаментальных взаимодействий и состоящие из кварков. Адроны подразделяются на мезоны (адроны с целым спином — бозоны) и барионы (адроны с полуцелым спином — фермионы). К последним, в частности, относятся протон и нейтрон.

Кварки являются фермионами и обладают дробным электрическим зарядом. Так, кварки  $u, c, t$  имеют положительный заряд  $\frac{2}{3}e$ , а кварки  $d, s, b$  имеют отрицательный заряд  $-\frac{1}{3}e$ . В свободном со-

стоянии они не найдены, всегда входят в состав структурных элементарных частиц. Так, протон и нейтрон состоят из трех кварков:

$$p = uud; \quad (42.1)$$

$$n = udd. \quad (42.2)$$

Практически у каждой элементарной частицы существует античастица — частица-двойник, обладающая той же массой и тем же спином, но отличающаяся от нее знаками некоторых характеристик взаимодействия, например заряда. Античастицей для электрона является позитрон, для протона — антипротон и т. д. Исключением из этого правила является, например, фотон, у которого нет античастицы. Согласно теории Дирака, столкновение частицы и античастицы должно приводить к их взаимной аннигиляции, в результате которой возникают другие элементарные частицы или фотоны.

Сегодня стандартная модель проходит экспериментальную проверку, которая состоит в обнаружении предсказанных частиц и их свойств. Уже открыты все элементарные частицы стандартной модели, за исключением *бозона Хиггса*, отвечающего за наличие массы у частиц. Ожидают, что эксперименты на большом адронном коллайдере смогут сильно продвинуть развитие стандартной модели или привести к отказу от нее.

## 42.4. Эволюция Вселенной

*Вселенная* — это совокупность пространства и времени, всех форм материи, а также физических законов и констант, которые управляют ими. Астрономические наблюдения Вселенной позволяют предположить, что возраст Вселенной составляет  $13,73 \pm 0,12$  млрд лет. Протяженность Вселенной не менее 93 млрд световых лет — при наблюдаемой части 13,3 млрд световых лет.

Сегодня считается, что начало Вселенной положил Большой взрыв. На момент этого события вся материя и энергия Вселенной были сконцентрированы в одной точке с бесконечной плотностью.

После Большого взрыва Вселенная начала стремительно расширяться, принимая современную форму. Современная протяженность Вселенной 93 млрд световых лет при возрасте 13,73 млрд лет на первый взгляд противоречит специальной теории относительности, однако общая теория относительности решает это противоречие учетом расширения пространства.

Падение температуры в процессе расширения Вселенной привело к образованию физических сил и элементарных частиц в их современной форме, а далее — к образованию ядер дейтерия, гелия и еще ряда легких изотопов. Через миллион лет после Большого взрыва температура снизилась до 3000 К, и стало возможным возникновение атомов водорода и гелия.

Флуктуации плотности в расширяющейся материи оказывались неустойчивыми, и под действием гравитационных сил началось формирование галактик и звезд. В звездах под действием сжатия увеличивались плотность и температура, что приводило к развитию реакций термоядерного синтеза. В энергетически выгодных реакциях синтеза рождались легкие и средние элементы — вплоть до железа. Тяжелые элементы появились позже, через миллиард лет после Большого взрыва. Появление тяжелых элементов связывают с увеличением заряда ядра в результате поглощения нейтронов с последующим  $\beta$ -распадом.

При формировании звезды из газопылевого облака в периферийной части облака могут сформироваться планеты. При этом начальный случайно приобретенный момент импульса облака обычно определяет одинаковое направление вращения как звезды, так и планет. Возраст Солнца, Земли и других соседних планет оценивают в 4,5–5 млрд лет. Отметим, что существуют как гораздо более молодые звезды возрастом 100 тыс. — 100 млн лет, так и более старые — возрастом 13–15 млрд лет. Уже 3,6–4,1 млрд лет назад на Земле зародились устойчивые живые существа, потомками которых мы являемся.

Согласно теории Большого взрыва, дальнейшая эволюция Вселенной зависит от средней плотности вещества в современной Вселенной. Если плотность не превосходит некоторого критического значения, Вселенная будет расширяться вечно, если же плотность

больше критической, то процесс расширения остановится и начнется обратное сжатие в точку.

Недавние наблюдения показывают, что расширение Вселенной ускоряется и количество материи и энергии существенно отличается от того, что предполагали ранее, поскольку необходимо учитывать так называемые темную энергию и темную материю, которые могут доминировать во Вселенной.

*Темная энергия* — трудно обнаружимая форма энергии, имеющая отрицательное давление и равномерно заполняющая все пространство Вселенной. Согласно общей теории относительности, такое отрицательное давление должно порождать отталкивание, антигравитацию. Оно может объяснить ускоренное расширение Вселенной. Темная энергия должна составлять значительную часть скрытой массы Вселенной. Темная энергия проявляется в основном в гравитационном взаимодействии. Плотность темной энергии невысока и составляет порядка  $10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>, поэтому ее сложно обнаружить экспериментально. Но темная энергия может составлять 70% всей энергии Вселенной.

*Темная материя* — совокупность астрономических объектов, недоступных прямым наблюдениям, но наблюдаемых косвенно по гравитационным эффектам, оказываемым на эти объекты.

Эксперименты позволяют сделать вывод, что всей наблюдаемой Вселенной управляют одни и те же физические законы и константы. Доминирующая сила на масштабах Вселенной — гравитация, достаточно точно описываемая общей теорией относительности. У Вселенной есть, по крайней мере, три измерения в пространстве и одно во времени. Евклидова геометрия достаточно точно описывает Вселенную.

## Физические константы и величины

Ускорение свободного падения  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$

Гравитационная постоянная  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$

Постоянная Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль}$

Газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль К})$

Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$

Боровский радиус  $a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$

Скорость света в вакууме  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

Масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$

Масса протона  $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

Масса нейтрона  $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

Элементарный заряд  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$

Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$

Магнитная постоянная  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$

Постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$

Приведенная постоянная Планка  $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$

Постоянная Стефана-Больцмана  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$

Постоянная Вина  $b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$

Радиус Земли (экваториальный)  $R_3 = 6380 \text{ км}$

Средняя плотность Земли  $\rho_3 = 5,57 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$

Нормальные условия (н. у.): давление  $p_n = 101 \text{ кПа} = 760 \text{ мм рт. ст.}$ ;  
температура  $T_n = 273 \text{ К} = 0 \text{ }^\circ\text{С}$

Молярный объем идеального газа при н. у.  $V_m = 22,4 \text{ дм}^3$ .

## Предметный указатель

- Абсолютно твердое тело 47
- Агрегатные состояния 150
- Адроны 436
- Активность нуклида 420
- Анализатор 290, 292
- Аналогия между поступательным и вращательным движением 54
- Античастица 437
- Барометрическая формула 5, 102, 108, 109
- Биения 4, 64
- Бозон:
  - векторный 386
  - калибровочный 434, 436
  - Хиггса 437
- Большой взрыв 437
- Боровский радиус 399, 440
- Броуновское движение 121, 124
- Вектор поляризации (поляризованность) диэлектрика 191, 192, 197
- Вектор:
  - Умова 80
  - Умова-Пойнтинга 256, 258, 262
- Вероятность 98, 100, 105, 110
- Вечный двигатель:
  - второго рода 139
  - первого рода 129
- Взаимоиндукция 243
- Внутреннее трение 111
- Внутренняя энергия:
  - идеального газа 131
  - реального газа 152
- Водородоподобный:
  - атом 326
  - ион 326
- Волновая функция:
  - антисимметричная 388
  - ограничения 338, 347
  - симметричная 388
- Волновое уравнение 75, 76, 77, 259, 260
- Волновой фронт 72, 73
- Волновые поверхности 271, 278, 281
- Волны:
  - бегущие 72
  - де Бройля 348, 351, 352, 362, 365, 414
  - поперечные 72
  - продольные 72
  - стоячие 318
  - упругие 72
- Волчок Томсона 54
- Вращательное движение 19, 43, 54
- Вращение равномерное 45
- Время релаксации 59, 61, 246, 247
- Вселенная 437, 438
- Вторичная электронная эмиссия с катода 208
- Вязкость 111, 116, 120
- Вязкости:
  - коэффициент 120
  - уравнение 120
- Газ:
  - идеальный 95, 98, 142, 149
  - реальный 148

- Гармонический осциллятор:
  - квантовый 372
  - классический 336
- Гипотеза:
  - де Бройля 332
  - Планка 304
- Градиент 33, 34, 36, 117, 118, 178, 338, 349
- Границы движения 37
- Давление:
  - внутреннее 148, 149, 151
  - света 302, 304–306
- Движение заряженной частицы в неоднородном магнитном поле 227
- Деградационный процесс 425
- Действие 18, 27, 32, 46, 66, 70, 122, 124, 190, 200, 202–209, 211, 226, 227, 239, 240, 279, 297, 306, 309, 324, 366, 367, 418, 425, 438
- Декремент затухания колебаний 61
- Деформация относительная 79, 197
- Диамagnetики 229, 233
- Динамика 18, 23, 43
- Диполь:
  - магнитный 217
  - электрический 161
- Дисперсия:
  - света 296
  - аномальная 296, 301
  - нормальная 296
  - угловая 286, 287
- Дифракционная решетка 283
- Дифракция:
  - в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера) 341
  - на круглом диске 280
  - на круглом отверстии 277
  - от объемных решеток 288, 289
  - от одной щели 281
  - света 277
- Дифференциальное уравнение гармонических колебаний 56, 57, 371
- Диффузия 111, 116, 117, 121, 140
- Диффузии:
  - коэффициент 117, 118, 120, 127
  - уравнение 117
- Диэлектрики:
  - неполярные 190
  - полярные 190, 213
- Диэлектрическая восприимчивость 191–193
- Диэлектрическая проницаемость 159, 192, 193, 197, 297
- Емкость:
  - плоского конденсатора 168, 185, 188, 189
  - сферического конденсатора 185
  - цилиндрического конденсатора 186
- Законы:
  - Ампера 226
  - Био-Савара-Лапласа 218
  - Гаука:
    - для упругого тела 75
    - Дальтона 98
    - Джоуля-Ленца:
      - в дифференциальной форме 203, 204
      - в интегральной форме 203, 204
    - диффузии Фика 118
    - Кирхгофа 314
    - Кулона 154
    - Малюса 291
    - Ньютона второй 24, 34, 36, 52
      - квантовое обобщение 351
    - Ньютона для внутреннего трения 120
    - Ньютона первый 23
    - Ньютона третий 26

- о равномерном распределении энергии по степеням свободы 131–133, 135
- Ома:
  - в интегральной форме 201, 203
  - в локальной (дифференциальной) форме 200, 201, 203, 252
  - для замкнутой цепи 203
  - обобщенный 202, 203
- Планка 320, 321
- преломления вектора напряженности электрического поля 196
- преломления векторов напряженности магнитного поля и магнитной индукции 238
- радиоактивного распада 418
- смещения Вина 316
- сохранения импульса 27
  - релятивистский 92, 216
- сохранения энергии 128, 139, 239
- сохранения механической энергии 36, 37
- сохранения момента импульса 52, 380
- сохранения электрического заряда 155
  - в дифференциальной форме 256
  - в интегральной форме 257
- сохранения электромагнитной энергии (теорема Пойтинга) 256
- сохранения энергии релятивистский 310
- Стефана-Больцмана 316
- теплопроводности Фурье 119
- Фарадея (основной закон электромагнитной индукции) 240
- Замедление времени релятивистское 89
- Заряд:
  - магнитный 217
  - электрический 154
  - элементарный 155
- Заряды:
  - свободные 190, 194, 208
  - связанные 190
- Зоны:
  - Бриллюэна 406, 407
  - Френеля 277, 278
- Излучение:
  - равновесное 311, 312
  - тепловое 311, 312, 317
  - тормозное 392, 423
  - характеристическое 392
- Изобары 413
- Изопроцессы 129
- Изотермы Ван-дер-Ваальса 150
- Изотопы 413
- Изотропия пространства 53, 102, 110, 132
- Импульс
  - релятивистский 92
- Индуктивность контура (коэффициент самоиндукции) 242, 244
- Инерциальные системы отсчета 24
- Интенсивность электромагнитной волны 259, 262, 306
- Интерференция:
  - света 264, 267
  - в тонких пленках 274
- Ионизатор 205
- Ионизация 204
- Ионизации степень 212
- Каскадный процесс 207, 425
- Квантование длины волны струны 356
- Квантовая хромодинамика 435
- Квантовое число:
  - главное 379

- магнитное 380
- орбитальное (азимутальное) 379
- спиновое 382
- спиновое ядерное 414
- Кварки 435, 436
- Кинематика 17, 18, 43
- Кинематические уравнения движения 19
- Классическая механика 17, 99, 324
- Когерентные волны 270
- Когерентности:
  - время 270
  - длина 270
- Колебания:
  - вынужденные 62, 66
  - гармонические 55, 59
  - грузика на пружинке 61, 370
  - заряда в колебательном контуре 62, 69, 370, 372
  - затухающие 55, 59, 61, 62
  - струны 81, 82
  - свободные 55
  - физического маятника 56, 57, 61
- Комптоновская длина волны электрона 311
- Концепция абсолютного детерминизма 337
- Корпускулярно-волновой дуализм 330
- Космические лучи:
  - вторичные 432
  - первичные 432
- Коэффициенты:
  - затухания колебаний 60, 61, 297
  - отражения 127, 128, 141, 360, 362, 367
  - полезного действия (КПД):
    - двигателя внутреннего сгорания 144, 145
    - идеальной тепловой машины 142
  - прозрачности (прохождения) 361
- Кратность вырождения энергетического уровня 382
- Критерий Рэлея 287
- Критическая точка 152
- Критические параметры 151
- Линии:
  - магнитной индукции 217, 224
  - напряженности (силовые) 157
- Логарифмический декремент затухания 59
- Луч:
  - необыкновенный 294
  - обыкновенный 295
- Лучеиспускательная способность (энергетическая светимость) тела 312, 313
- Лучепоглощательная способность (коэффициент поглощения) 313, 314
- Лучепреломление двойное 293
- Магнетики 229
- Магнитная индукция магнитного поля 220
- Магнитная восприимчивость 232
- Магнитная проницаемость 217, 231
- Магнитное поле в центре кругового тока 220
- Магнитный диполь 217
- Магнитный момент 54, 215, 218, 227, 229
- Масса:
  - критическая 427, 428
  - эффективная электрона 409
- Материальная точка 17, 18, 23
- Маятник:
  - математический 57
  - физический 370
- Мезон 387, 436
- Металлы 235, 410, 411

Механика:  
 - квантовая 99, 263  
 - классическая 17, 99, 324, 359, 364  
 - Лагранжева 27  
 - релятивистская 17  
 Микроскоп туннельный сканирующий 368  
 Микрочастица 342, 346, 354, 370  
 Молекулярная орбиталь:  
 - разрыхляющая 396  
 - связывающая 396  
 Молекулярно-кинетическая теория 94, 95, 98  
 Молния 210  
 Момент импульса 53, 55, 230, 382, 384  
 Момент инерции:  
 - материальной точки 18, 48  
 - однородного шара 49  
 - полого тонкостенного цилиндра 48  
 - тонкого кольца 48  
 - сплошного цилиндра и диска 48  
 - тонкого стержня 49  
 Момент силы 47, 52, 53, 162  
 Мощность 29, 30, 203, 312  
 Напряжение:  
 - нормальное 75  
 - пробоя 208  
 - размножения нейтронов 427  
 Напряженность:  
 - магнитного поля прямого тока 220, 222  
 - электрического поля 156, 157, 158, 160, 164  
 Начало термодинамики:  
 - второе 139, 148  
 - первое 128, 139  
 Нейтрино 420, 422, 436  
 Нейтрон 155, 218, 332, 367, 413  
 Неравенство Клаузиуса 445  
 Нормальные условия 146  
 Ночное видение 317  
 Нуклид 420  
 Обменное взаимодействие 394  
 Однородность:  
 - времени 37, 86  
 - пространства 28, 86, 90  
 Оператор:  
 - Гамильтона (гамильтониан) 349, 350  
 - Лапласа 77, 346, 348, 396  
 Оптика:  
 - волновая 154, 263, 264  
 - геометрическая 264, 281  
 - законы 264, 265  
 Оптическая длина пути 270, 271  
 Оптическая разность хода 270, 271, 273  
 Оптическая среда:  
 - мутная 126  
 - прозрачная 126  
 Опыт Юнга 271, 302  
 Опыты Франка и Герца 326  
 Парамагнетики 233, 235  
 Перемещение  
 - угловое 43, 47, 54  
 Переноса явления 81, 111, 114, 116  
 Период полураспада 419, 421  
 Петля гистерезиса 197  
 Плазма:  
 - высокотемпературная 213, 214  
 - неизотермическая 213  
 - низкотемпературная 213  
 Плотность энергии:  
 - упругой волны 78  
 - электростатического поля 189  
 - магнитного поля 247

- Плотность распределения вероятностей 100
- Поглощение частиц 124–127, 146
- Подвижность частиц 122
- Позитрон 423, 425, 437
- Показатель преломления 266, 270, 296
- Поле:
- вблизи поверхности заряженного проводника 188
  - магнитное 156, 214, 217
    - Земли 108, 214
  - плоского конденсатора 168, 185, 189
  - потенциальное 32, 34
  - равномерно заряженного шара 170
  - равномерно заряженной бесконечной нити 169
  - равномерно заряженной бесконечной плоскости 167, 179
  - равномерно заряженной сферы 170, 185
  - электрическое 154
  - электромагнитное 249
- Полупроводники 410
- Поляризатор 291, 293
- Поляризации плоскость 290
- Поляризация диэлектрика 190
- Поляризованная электромагнитная волна 289
- Поляризованность диэлектрика 191
- Постоянная:
- Авогадро 109, 149, 440
  - Больцмана 109
  - Вина 316
  - газовая 204
  - магнитная 214
  - Планка 320
    - приведенная 344
  - Ридберга 326, 328, 393
  - Стефана-Больцмана 316–318, 440
  - электрическая 155
- Постулаты Бора 324
- Поступательное движение 19, 44, 47
- Потенциал:
- ионизации 38, 127, 205
  - Леннарда-Джонса 35
  - электростатического поля 173
- Потенциальная энергия упругодеформированного тела 34
- Потенциальная яма 368
- Потенциальный барьер 353, 357, 363
- Потенциальный ящик 353
- Поток вектора:
- магнитной индукции (магнитный поток) 225
  - напряженности электрического поля 157, 164–166
  - электрического смещения 164
- Поток энергии бегущей волны 80
- Потоко сцепление 243
- Правило:
- левой руки 226
  - Ленца 239, 241
  - правого винта 226
- Правила смещения 420
- Преобразования:
- Галилея 83
  - Лоренца 85
- Прецессионная теория диамагнетизма 229–232
- Приближение:
- адиабатное 400, 402
  - одноэлектронное 402
  - самосогласованного поля 402
  - сильной связи 403
  - слабой связи (приближение почти свободных электронов) 403, 410
- Призма Николя 293

## Принципы:

- Гюйгенса-Френеля 281, 284
- детального равновесия 314
- различности тождественных частиц 386, 395
- относительности Галилея 85
- Паули 388
- соответствия 342
- суперпозиции:
  - волн 81
  - волновых функций 339
  - электрических полей 160

Проводимость (удельная электропроводность) 205, 410

Пройденный путь 19

Пространство четырехмерное 90

Протон 41, 155

## Процесс:

- адиабатный 136, 144
- изобарный 131, 135
- изотермический 131, 136
- изохорный 144, 146
- круговой 140
- необратимый 140, 148
- обратимый 140
- тепловой 31, 136

Пьезоэлектрики 196

Работа 29

## Равновесие:

- безразличное 35
- неустойчивое 34, 35
- устойчивое 35

Равновесия условия 32

## Разность потенциалов:

- в поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра 180
- в поле равномерно заряженной бесконечной плоскости 167, 179

- в поле равномерно заряженной сферы 170

## Радиоактивность:

- естественная 418
- искусственная 418

## Радиоактивных излучений:

- дозы 429, 430
- регистрация 429, 430

Разрешающая способность 283, 288

## Разряд:

- газовый 204, 205
- дуговой 210
- искровой 210
- коронный 211
- несамостоятельный 204, 206
- самостоятельный 204, 206
- тлеющий 209

## Распределение:

- Больцмана 102, 109
- Максвелла 102
  - по модулю скорости 105, 106
  - по скорости 104, 105
  - по составляющей скорости 104

Рассеяние частиц 309

Расщепление уровней энергии 414

Резонанс 70

Рекомбинация 204

Релятивистский инвариант 92

Релятивистский интервал между событиями 90

Релятивистское преобразование скоростей 90

Рентгеноструктурный анализ 289

Самоиндукция 241

Сверхтонкая структура 414

Свободный объем 150

## Связь:

- гетерополярная (ионная) 394

- гомеополярная (ковалентная) 394
- Сегнетоэлектрики 196
- Сечение:
  - молекулы 113
  - столкновения 41, 113
- Сила:
  - Ампера 226
  - взаимодействия двух параллельных токов 226
  - Лоренца 227
  - центральная 53
  - электродвижущая 202
- Силы:
  - диссипативные 31, 59
  - консервативные 31, 33
  - сторонние 202, 203
  - ядерные 415
- Система отсчета 19
- Скорость:
  - групповая 260, 332
  - наиболее вероятная 105
  - среднеквадратичная 105
  - средняя 105
  - угловая 233, 241
  - фазовая 260, 294
- Сложение колебаний 62, 63
  - векторная диаграмма 62
- Собственные:
  - значения энергии 348
  - функции 348
- Сокращение длины релятивистское 216
- Соленоида:
  - магнитное поле 221
  - индуктивность 241
- Солнечный ветер 213
- Соотношение:
  - Эйнштейна 124
  - неопределенностей 339
- для координаты и импульса 339
- для времени и энергии 342
- Спротивление 201
- Состояние:
  - свободное 369
  - связанное 368
- Соударение:
  - абсолютно неупругое 38
  - боковое 38
  - неупругое 38
  - упругое 38
  - центральное 38
- Спектр:
  - дискретный 348
  - излучения тела 312
  - непрерывный (сплошное) 348
  - рентгеновский 391, 393
- Спектральная лучеиспускающая способность (спектральная энергетическая светимость) тела 312
- Спектральная лучепоглощательная способность (спектральный коэффициент поглощения) 313
- Специальная теория относительности 85
- Спин 381
- Спин-орбитальное взаимодействие 384
- Средняя длина пробега молекул 116
- Стандартная модель элементарных частиц 435
- Статика 435
- Степени свободы молекул 131
- Стример 209
- Тело:
  - серое 311
  - черное 311
- Темная:

- материя 437
- энергия 439
- Температура 40, 95, 103, 104
- Теоремы:
  - Блоха 402
  - Гаусса для магнитного поля:
    - в дифференциальной форме 224, 225
    - в интегральной форме 224, 225
  - Гаусса для электрического поля в вакууме:
    - в дифференциальной форме 172
    - в интегральной форме 165
  - Гаусса для электрического поля в диэлектрике 193
  - Карно 144
  - о циркуляции вектора напряженности магнитного поля 221
  - о циркуляции вектора напряженности электрического поля 174
  - о циркуляции вектора магнитной индукции 174
  - Остроградского-Гаусса 252, 258
  - сложения вероятностей 339
  - Стокса 252
  - Штейнера 50
  - Эрэнфеста 350
- Теория:
  - волновая 264, 305
  - зонная 400
  - корпускулярная 264
  - электрослабого взаимодействия 435
- Тепловая машина 141
- Теплоемкость:
  - молярная 96, 109, 134
  - удельная 134–136
- Теплопроводность 118
- Теплопроводности:
  - коэффициент 118
  - уравнение 119
- Теплота 128
- Термодинамика 128, 129, 136
- Термодинамическая вероятность 147
- Термоэлектронная эмиссия 208
- Ток:
  - поверхностный 231
  - постоянный 245
  - смещения 249
  - электрический 159, 190, 199, 205
- Тока:
  - плотность 198–200
  - сила 198–200, 210
- Токи Фуко (вихревые токи) 241
- Тонкая структура 414
- Тороида
  - магнитное поле 223,
- Траектория 18, 19, 65, 126, 174
- Транспорт частиц:
  - диффузионный 127
  - прямолинейный 127
- Ударная ионизация 207
- Удельная электропроводность (проводимость) 410
- Удельное сопротивление 201
- Ультрафиолетовая катастрофа 319
- Универсальная функция Кирхгофа 315
- Управляемый термоядерный синтез 214, 367
- Уравнения:
  - адиабаты 136–138
  - Ван-дер-Ваальса 148, 150
  - динамики вращательного движения 52, 54, 60
  - Майера 133
  - Максвелла 249

- в дифференциальной форме 252
- в интегральной форме 249
- магнитостатики основные 255
- Менделеева-Клапейрона 96, 108, 131, 136–138, 146
- молекулярно-кинетической теории основное 96, 97
- переноса (общий вид) 114–116
- плоской волны 260
- Пуассона 138
- релятивистской динамики основное 90, 92
- состояния термодинамической системы 96
- Шредингера:
  - в операторной форме 345, 346, 349, 350
  - для кристаллов 402
  - для свободной частицы 345, 346, 352
  - общее (основное уравнение нерелятивистской квантовой механики) 347
  - стационарное 347
  - Эйнштейна 306, 308
- электростатики основные 255
- Ускорение:
  - нормальное 22, 228
  - полное 22, 23
  - тангенциальное 22, 23
  - угловое 43
- Условие нормировки:
  - волновой функции 337, 338
  - функции распределения 98
- Фазовые переходы 148, 150
- Фермионы 386, 436
- Ферромагнетики 233
- Фигуры Лиссажу 65
- Физика:
  - квантовая 302
  - молекулярная 17
  - статистическая 94
  - твердого тела 400
  - Физическая кинетика 95
  - Формулы:
    - Больцмана 145
    - Брэгга-Вульфа 289
    - Комптона 311
    - Ридберга 326
    - Рэлея-Джинса 318
    - Эйлера 331
    - Эйнштейна 123
  - Фотоионизация 208
  - Фотоны 124, 198, 208, 302
  - Фотоэффект
    - внешний 306
    - внутренний 306
  - ядерный 425
  - Фундаментальные взаимодействия
    - сильное 415
    - электромагнитное 422, 433
    - слабое 422
    - гравитационное 422
  - Функция распределения:
    - по энергии 432
    - степенная 110
    - экспоненциальная 60, 110
  - Холодильная машина 141
  - Центр масс (инерции) 27
  - Цикл
    - двигателя внутреннего сгорания 144
    - Карно 142, 144
    - обратный 145, 146
    - прямой 140
  - Частицы:
    - фундаментальные 435, 436
    - элементарные 436–438

- Частота столкновений молекул 111
- Шкала электромагнитных волн 262
- Экспоненциальный вид распределения 110, 123
- Электреты 196
- Электрическая емкость проводника 183
- Электрический (дипольный) момент 161
- Электрическое поле электрического диполя 162
- Электрическое смещение (индукция) 156, 159
- Электродинамика 154
- Электромагнетизм 154
- Электромагнитная индукция 239
- Электрон 229
- Электронная лавина 207
- Электростатика 154
- Электростатическая индукция 181
- Эквипотенциальные поверхности 178
- Энергетическая зона:
- валентная 412
  - запрещенная 412
  - проводимости 412
  - разрешенная 401
- Энергия:
- индуктивности 248
  - кинетическая 31, 34, 47, 92
  - релятивистская 92
  - механическая 31, 34, 36, 37, 78, 241
  - молекул 95, 109
    - вращательная 397
    - колебательная 397
  - конденсатора 188
  - потенциальная 27, 31, 34
  - покоя 310, 334
  - полная 346, 359
  - электромагнитного поля 256
- Энтропия 139, 145
- Эффект:
- Зеемана 384, 385
  - аномальный (сложный) 385
  - нормальный (простой) 385
  - Комптона 302, 309, 425
  - туннельный (туннелирование) 365
  - Штарка 384
- Эффективная радиационная температура 316
- Явления на разломах 196
- Ядерная реакция:
- распада (деления) 426
  - синтеза (термоядерная реакция) 428
  - цепная 427
- Ядра:
- заряд 127, 323
  - зарядовое число 390, 393, 413
  - квантовый характер 412
  - масса 412
  - массовое число 413
  - модели 415
  - радиус 412
  - спин 412
  - среднее время жизни 419
  - удельная энергия связи 415
  - энергия связи 421
- Ядро:
- дочернее 423, 418
  - родительское (материнское) 418
- $\alpha$ -распад 420–423
- $\alpha$ -частица 420–423
- $\beta$ -распад 420–423
- $\beta$ -частица 420–423
- $\gamma$ -частица 420–423

Главный редактор — *А. Е. Илларионова*  
Художник — *В. А. Антипов*  
Верстка — *Н. А. Кирьянова*  
Корректор — *В. Ш. Мерзлякова*

Ответственный за выпуск — *М. Д. Писарева*

*Учебное издание*

**Никеров Виктор Алексеевич**

## **Физика**

### **Современный курс**

Санитарно-эпидемиологическое заключение  
№ 77.99.60.953.Д.007399.06.09 от 26.06.2009 г.

Подписано в печать 18.07.2012. Формат 60×84 1/16.  
Печать офсетная. Бумага газетная. Печ. л. 28,25.  
Тираж 1500 экз.

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К<sup>о</sup>»  
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732.  
Для писем: 129347, Москва, п/о И-347.  
Тел./факс: 8 (495) 741-34-28;  
8 (499) 182-01-58, 182-42-01, 182-11-79, 183-93-01.  
E-mail: sales@dashkov.ru — отдел продаж;  
office@dashkov.ru — офис;  
<http://www.dashkov.ru>

Отпечатано в ГУП Академиздатцентр «Наука» РАН,  
ОП Производственно-издательский комбинат «ВИНИТИ»-«Наука»,  
140014, Московская обл., г. Люберцы, Октябрьский пр-т, д. 403.  
Тел./факс: 554-21-86, 554-25-97, 974-69-76