УДК 537.8

О ПОНИМАНИИ, ВЫЧИСЛЕНИИ И ИЗМЕРЕНИИ ДИВЕРГЕНЦИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

А. С. Чуев.
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана» Национальный исследовательский университет техники и технологий (МГТУ им. Н. Э. Баумана),
Россия, Москва, e-mail: chuev@mail.ru

В математической теории поля и полевой физике широко распространено представление о дивергенции (расходимости) векторных полей с нулевым значением вне истоков и стоков поля и практически неопределяемым значением внутри последних. Однако это представление не соответствует очевидно наблюдаемому факту пространственной расходимости и сходимости физических векторных полей. Проблема описания и вычисления дивергенции любого физического поля, точнее сказать, скалярного поля дивергенции векторного поля, соответствующего своему понятию – реально наблюдаемой пространственной расходимости и сходимости силовых линий поля, а также возможность экспериментального измерения этого параметра обсуждается в данной статье. Предложены варианты вычисления и измерения дивергенции статических электрических и магнитных полей.

Ключевые слова: *физические поля, дивергенция, теория поля, электрическое поле, магнитное поле, намагниченность.*

The mathematical theory of fields and field physics is widespread understanding of divergence vector fields with zero out the source and drain of the field and almost undetectable levels in the past. However, this contrasts with a clearly observable facts spatial divergence and convergence of the physical vector fields. The problem of describing and calculating the divergence of any physical field, more precisely, the scalar field divergence vector field corresponding to its concept – actually observed spatial divergence and convergence of the field lines, and the possibility of experimental measurement of this parameter is discussed in this article. The variants of calculations and measurements of the divergence of static electric and magnetic fields.

Key words: *physical fields, divergence, field theory, the electric field, magnetic field, the magnetization.*

Истина бытия – это сущность,
истина сущности есть понятие.
Гегель

Понятие «дивергенция» переводится на русский язык как расходимость (можно к этому отнести и сходимость) линий векторного поля. Логически это понятно, в пространственно расходящемся или сходящемся векторном потоке обязательно есть изменение плотности линий поля, что возможно (при сохраняющейся величине потока) только за счет изменения модуля вектора, посему дивергенция (расходимость) неотделима от изменений модуля вектора. В однородном векторном поле дивергенция, согласно своему понятию, должна быть равна нулю.

Несмотря на сказанное, в математической теории поля и полевой физике дивергенция считается, чаще всего, ненулевой только в истоках и стоках поля, при этом числовое значение дивергенции в них, как правило, неопределимо по причине неопределенности их размеров. Например, для центральных полей типа электрического и гравитационного дивергенция считается равной нулю всюду кроме истоков и стоков. Если же брать в качестве примера магнитное поле, то равенство нулю дивергенции вектора магнитной индукции B принято безусловным и возведено в закон (четвертое уравнение Максвелла).

Реже встречается определение дивергенции – как объемной плотности потока векторного поля в той или иной точке поля. Такое определение более подходяще к явлению расходимости, хотя ненулевое значение дивергенции в этом случае приходится приписывать и однородным (не расходящимся) векторным полям. Далее рассматриваются варианты адекватного представления дивергенции векторных полей с возможностью ее теоретического вычисления и практического измерения.

Хорошо известны изображения пространственно неоднородных полей в виде расходящихся и сходящихся силовых линий полей центрального типа (рис.1) и соленоидального поля стержневого магнита (рис.2). Силовые линии поля строятся по касательным, определяющим направление силы в любой точке пространства, окружающего электрический заряд или магнит.

Густота линий поля определяет числовое значение полевого вектора в любой точке поля. Сам вектор касателен к линии поля, проходящей через данную точку, а его направление определяется действующим соглашением о положительной направленности.

Пространственная расходимость и сходимость линий поля, создаваемых электрическими зарядами

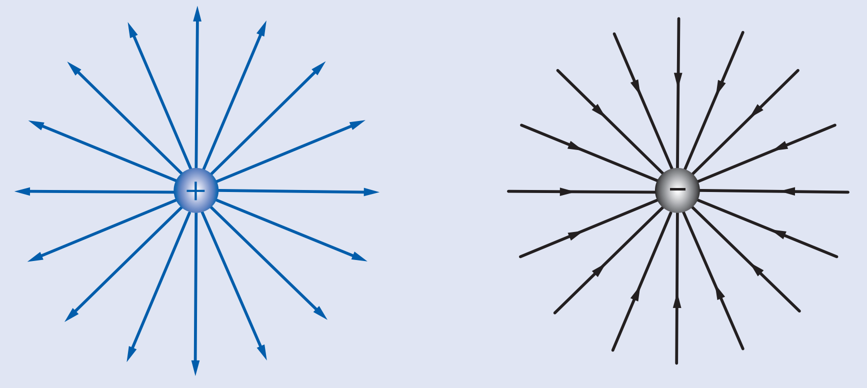

Рис. 1. Пространственная расходимость и сходимость линий электрического поля

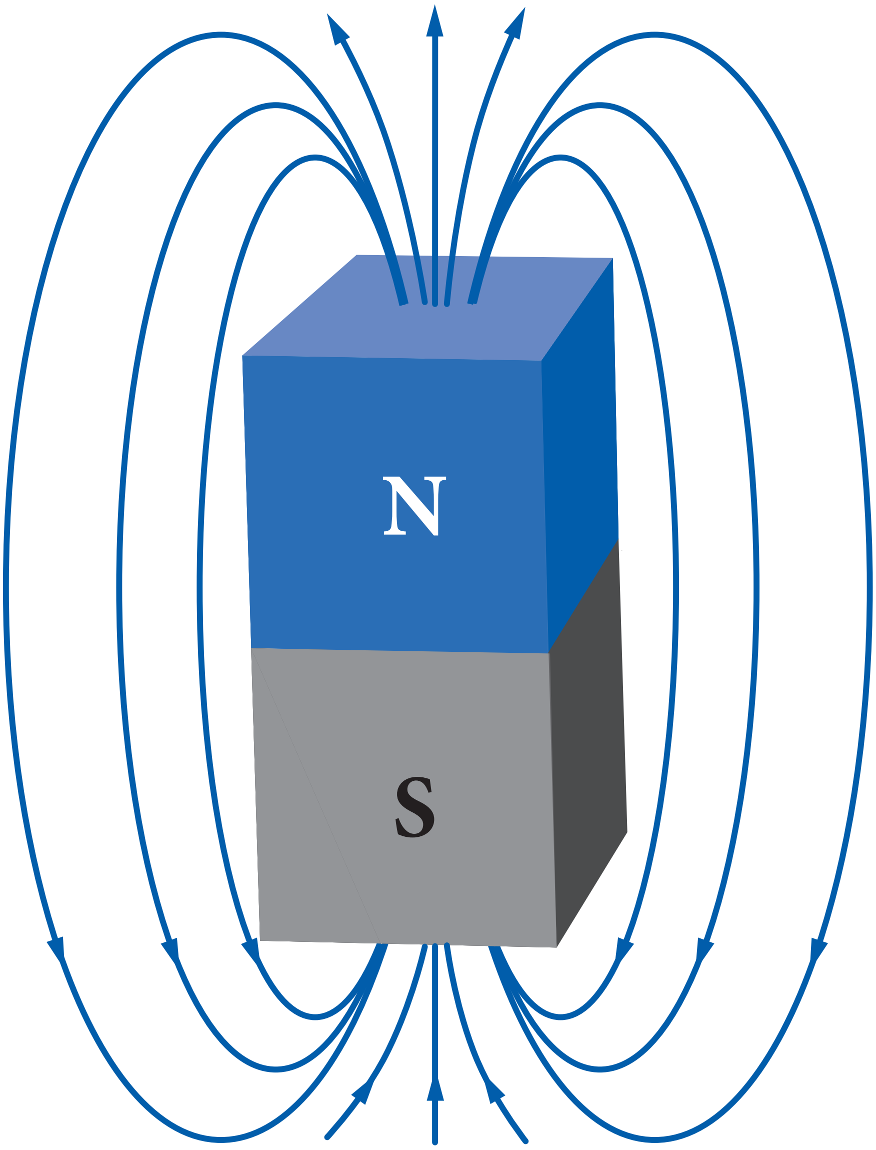

Рис. 2. Пространственная расходимость и сходимость силовых линий магнитного поля

очевидна, потому как густота линий убывает при отдалении от центра, указывая на ослабление поля при отдалении от источника или стока поля. Однако в математической теории поля и в большинстве физических толкований [1–3] дивергенция векторных полей центрального типа (рис. 1) всюду вне источника и стока считается равной нулю.

Приводимая на рис. 2 картина силовых линий магнитного поля тоже наглядно иллюстрирует, что данное поле неоднородно. Густота силовых линий магнитного поля, определяющих величину и направление силового вектора B, вблизи торцов магнита самая большая, а в отдалении от торцов магнита становится значительно меньше. На бесконечно большом удалении от магнита значение магнитной индукции будет нулевым. Однако в соответствии с четвертым уравнением Максвелла дивергенция вектора магнитной индукции B принимается всюду равной нулю. Считается также, что источников и стоков у магнитного поля нет, а линии поля замкнуты сами на себя.

Очевидное несоответствие господствующих представлений о дивергенции электрического и магнитного полей – самому понятию (расходимость) связано, скорее всего, с гидродинамической аналогией, а также с математическим описанием центральных полей в сферической системе координат.

Приведем несколько примеров из учебников с имеющейся там трактовкой понятия дивергенции. Возьмем классический учебник И. Е. Тамма «Основы теории электричества» [1, стр.586]. Тамм пишет: «Отметим в заключение, что в гидродинамике дивергенция скорости жидкости v имеет непосредственное физическое значение. Действительно, в каждой точке жидкости

$$div\,\vec{v} = \lim \frac{\oint v_n dS}{dV} \quad \text{при } dV \to 0 \qquad (1)$$

равна рассчитанному на единицу объема количеству жидкости, вытекающей из элемента объема dV, окружающего рассматриваемую точку».

Другой источник [2, стр.24], описывая дивергенцию статического электрического поля, излагает так: «В дифференциальной форме теорема Гаусса является локальной теоремой: дивергенция поля **E** в данной точке зависит только от плотности электрического заряда ρ в этой точке и больше ни от чего. Это одно из замечательных свойств электрического поля. Например, в разных точках поля точечного заряда поле $\mathbf{E}$ отличается друг от друга. Это же относится, вообще говоря, и к пространственным производным $\partial E_x/\partial x$, $\partial E_y/\partial y$, $\partial E_z/\partial z$. Однако, как утверждает теорема Гаусса, сумма этих производных, которая определяет дивергенцию $\mathbf{E}$, оказывается во всех точках поля (вне самого заряда) равной нулю».

В последней фразе чувствуются сильные нотки сомнения в правильности излагаемого, но они прикрыты ссылкой на авторитет теоремы Гаусса. Действительно, трудно объяснить положение, согласно которому производные по координатам есть, но их сумма всегда равна нулю. Это явно не соответствует элементарной логике. Ведь координатные проекции изменяющегося вектора вполне могут быть одного знака, а изменение вектора может быть и вовсе только по одной координате.

В источнике [3] приводятся иллюстрации, изображенные на рис. 3, среди которых есть одна, позволяющая трактовать дивергенцию согласно ее понятию – как расходимость или сходимость потока векторного поля. Выделенная область на рис. 3б не содержит источников и стоков, однако дивергенция поля в этой области не равна нулю и это правильно. Согласно своему понятию дивергенция должна быть ненулевой в любой точке неоднородного поля, то есть в любой точке поля, где наблюдается изменение плотности линий векторного поля, выражаемое в пространственной расходимости или сходимости векторов. Ненулевую дивергенцию для стока векторного поля иллюстрирует рис. 3е, но как уже отмечалось, определить в этом случае конкретное значение дивергенции без знания границ стока не представляется возможным.

Математически дивергенция выражается не только формулой (1), но и как функция пространственной производной вектора, обозначаемая оператором набла [4, стр. 358]:

$$div\ \vec{A} = \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (2)$$

Формула (2) выражает дивергенцию, как изменение модуля вектора, то есть изменение вектора в своем собственном направлении. Данное выражение верно в декартовой системе координат. При любых изменениях модуля вектора $\vec{A}$ значение пространственной производной согласно формуле (2) будет отличным от нуля. При неизменности модуля вектора $\vec{A}$ формула (2) дает нулевой результат. Математически это основано на свойстве вектора – сохранять свое значение по модулю при любых поворотных изменениях системы координат, что общеизвестно.

Таким образом, формула (2) выражает не совсем привычное на первый взгляд, но истинное представление, соответствующее своему понятию – *дивергенции* векторного поля, как скорости *изменения вектора* в любой точке поля *в своем собственном направлении*, то есть по модулю.

Подтверждение такому (или примерно такому) пониманию дивергенции можно обнаружить в других источниках. В учебнике по математике [4, стр.359] встречается такая фраза: «…всякое векторное поле $\mathbf{A}$ дает некоторое скалярное поле $\mathrm{div}\mathbf{A}$, а именно поле своей расходимости». Другой источник [5, стр.402]: «Дивергенция $div\ \vec{a}$ векторного поля а в точке M есть скаляр (действительное число). Рассматривая дивергенцию в каждой точке области определения векторного поля а, мы получаем скалярное поле $div\ \vec{a}$».

Именно так и следует понимать, дивергенция – это скалярное поле значений расходимости, а не одно (и, как правило, неопределимое) значение, приписываемое лишь стокам и истокам векторного поля.

Понимание ошибочности привязки понятия дивергенции лишь к истокам и стокам векторного поля в физике зреет уже давно. Осознание этого уже появилось в гидродинамике [6]. По мнению автора не за горами признание аналогичного положения и в других областях физики, в частности в электростатике и магнитостатике.

Попытку вывести понятие дивергенции из «прокрустова ложа» истоков и стоков можно обнаружить в источнике [7, стр.171]. Там приводится такая формула:

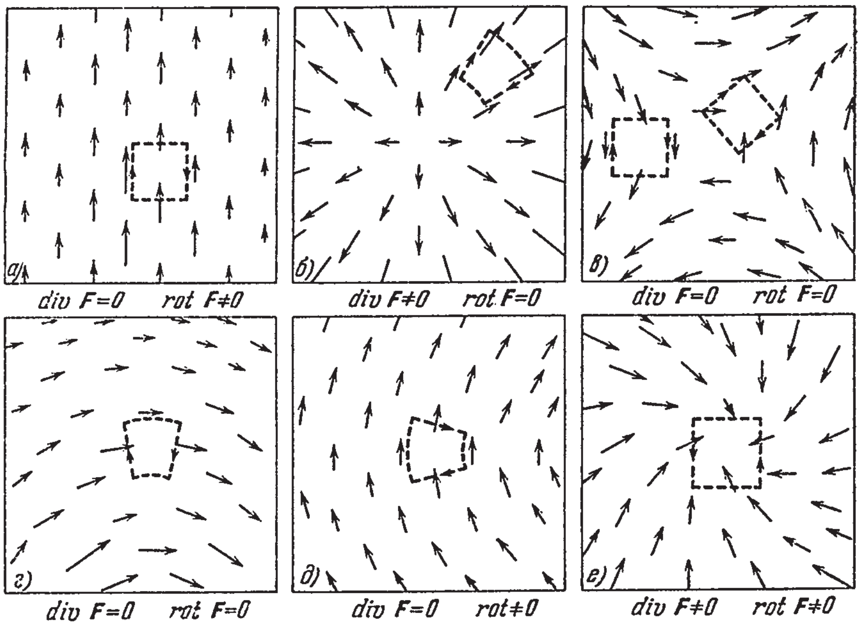

Рис. 3. Значения дивергенции и ротора в выделенной области векторного поля

$$div\ \vec{F}(\vec{r}) = \lim \frac{\int\limits_{S_1} d\vec{S} \cdot \vec{F}(\vec{r}_1)}{\int\limits_{V_1} dV}, \quad \text{при } \delta \to 0 \tag{4}$$

где: V_1– область, содержащая точку ($\vec{r}$), S_1- замкнутая поверхность, ограничивающая область V_1, δ– наибольшее расстояние от точки ($\vec{r}$) до точек поверхности S_1.

В формуле (4) нет устремления объема в точку, а анализируются внешняя поверхность и объем, которым принадлежит рассматриваемая точка поля. При правильной интерпретации этой формулы и применительно к векторным полям центрального типа она дает достаточно верный результат оценки величины дивергенции векторного поля.

В источнике [8] для дивергенции приводится еще одна отличная от выражения (1) формула:

$$div\ \vec{F} = \lim \frac{\Phi_{\vec{F}}}{V}, \quad \text{при } S \to 0 \tag{5}$$

где: $\Phi_{\vec{F}}$ – поток векторного поля $\vec{F}$ через сферическую поверхность площадью S, ограничивающую объем V. (Примеч. автора – почему сферическую, а не просто замкнутую площадь не очень понятно).

Здесь дивергенция определяется как объемная плотность потока векторной величины в той или иной точке пространства векторного поля. Считается [8], что такое определение дивергенции применимо не только к декартовым системам координат. В чем-то аналогичный подход обнаруживается и в работе [9, стр.22]: «…дивергенция векторного поля **a** (M) является объемной плотностью потока векторного поля **a** (M) в данной точке M».

Однако, если векторное поле однородное, то объемная плотность потока векторного поля будет иметь одно определенное для всех точек поля значение, а расходимости (надо понимать, дивергенции) линий поля не будет. Налицо противоречие. В наглядных примерах по рис.1 и рис.2 видно, что дивергенция (расходимость) электрических и магнитных силовых линий определяется неоднородностью поля, которое связано с изменением модуля вектора, так его значение определяется плотностью потока линий поля, зависящей от пространственного удаления рассматриваемой точки от источника или стока поля. В однородном векторном поле дивергенции (расходимости) нет и быть не может.

По мнению автора, дивергенция, по сути своей, должна быть не плотностью потока векторного поля, что присуще и однородным векторным полям, а *скоростью пространственного изменения плотности потока вектора* в той или иной точке поля, которое по идее должно совпадать с пространственной производной вектора по формуле (2). Математически это можно выразить так:

$$div\ \vec{F} = \lim \frac{\Delta(\vec{F}\vec{S}_n)}{V} = \frac{d|F|}{d\vec{\tau}_{\vec{F}}}, \quad \text{при } V \to 0 \text{ и } S \to 0 \tag{6}$$

где: $\frac{\Delta(\vec{F}\vec{S}_n)}{V}$ – изменение плотности потока векторной величины $\vec{F}$в рассматриваемой точке поля (объеме V предельно малого размера); $\vec{\tau}_F$ – единичный вектор, касательный к направлению линии поля в данной точке поля и совпадающий с направлением вектора $\vec{F}$.

Почти полное соответствие отстаиваемому здесь пониманию дивергенции обнаруживается в источнике [10, стр. 206]: «Дивергенцию векторной функции … еще называют расходимостью. Она определяет скорость изменения каждой компоненты вектора в своем «собственном» направлении». Но если есть изменение «каждой компоненты вектора в своем собственном направлении», то не замечать или отрицать результирующее изменение самого вектора в своем собственном направлении – просто нелепо.

Для сравнения приведем в табличном формате различные варианты определения и понимания (толкования) дивергенции, в том числе отстаиваемые автором в настоящей работе (см. таблицу 1).

Таблица 1.

Возможные определения и толкования дивергенции

Определение дивергенции	Математическое определение	Условие определения	Физический смысл дивергенции
Общепринятое определение, разделяемое и автором	$div\ \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	Пространственная производная вектора в рассматриваемой точке поля	Пространственная расходимость или сходимость векторного поля
Общепринятое определение, не разделяемое автором	$div\ \vec{F}(M) = \lim \frac{\oint \vec{F} \cdot d\vec{S}}{dV}$ при $dV \to 0$	Объемная плотность потока через замкнутую поверхность предельно малого объема	Дивергенция – это истоки и стоки векторного поля
Встречающийся в литературе вариант, не разделяемый автором	$div\ \vec{F} = \frac{\vec{F}\vec{S}_n}{V}$ при $S \to 0$ и $V \to 0$	Объемная плотность потока при $S \to 0$ и $V \to 0$	Объемная плотность потока векторного поля
Авторский вариант 1	$div\ \vec{F} = \lim \frac{\Delta(\vec{F}\vec{S}_n)}{V}$ при $S \to 0$ и $V \to 0$	Дивергенция – скаляр, численно равный градиенту объемной плотности потока	Пространственное изменение объемной плотности потока вектора
Авторский вариант 2	$div\ \vec{F} = \frac{d\|F\|}{d\vec{\tau}_{\vec{F}}}$	Дивергенция – это изменение модуля вектора	Пространственное изменение модуля вектора

Приведем расчетные оценки дивергенции для различных вариантов ее определения по таблице 1, применительно к вектору $\vec{D}$ электростатического поля в точке М, находящейся на расстоянии r от центрального заряда q_0.

А. Общепринятое значение дивергенции вне истоков и стоков поля равно нулю ($div\ \vec{D} = 0$).

Б. Значение, вычисленное из условия равномерной объемной плотности заряда, приходящегося на весь рассматриваемый сферический объем, что можно понимать как своеобразное (грубое) определение дивергенции для полей центрального типа, составляет:

$$div\ \vec{D} = \frac{q_0}{V} = \frac{3q_0}{4\pi r^3}.$$

В. Авторские варианты определения дивергенции по вариантам 1 и 2 по модулю должны быть эквивалентны. Значение дивергенции по варианту 1:

$$div\ \vec{D} = \lim \frac{\Delta(\vec{D} \cdot \vec{S}_n)}{\Delta V} = \frac{d\vec{D}}{dr} = = \frac{d}{dr}\left(\frac{q_0}{4\pi r^2}\right) = -\frac{q_0}{2\pi r^3}.$$

По варианту 2, если принимать дивергенцию расходящихся полей положительной:

$$div\ \vec{D} = -\frac{d\vec{D}}{dr} = \frac{q_0}{2\pi r^3}.$$

Ввиду общепринятого представления о дивергенции магнитного поля – как повсеместно равной нулю, а также из-за соленоидальной формы этого поля, задача расчета дивергенции магнитного поля, кажется, вообще не ставилась. Практические расчеты магнитных цепей обычно исходят из условия сохранения в магнитопроводе и примыкающем к полюсам магнита пространстве *магнитного потока* $\Phi = B \cdot S$. Однако, тема естественного (при этом условии) изменения числового значения *индукции магнитного поля* B, обусловливаемого увеличением вне магнита *площади* потока S, как правило, не затрагивается.

В расчетах магнитных цепей обычно дополнительно используют еще одну физическую величину *напряженность магнитного поля* H, хотя в действительности она применима лишь к токовым источникам магнитного поля, а не к источникам поля в виде постоянных магнитов. Этот вопрос более подробно рассмотрен в авторской работе [11].

Расчетное определение дивергенции магнитного поля, создаваемого стержневым магнитом типа, изображенного на рис. 2, возможно двумя путями. В первом варианте следует принимать неизменным поток магнитной индукции $\Phi = B \cdot S$, выходящий из торца магнита и расходящийся в окружающем пространстве. Тогда изменение модуля магнитной индукции будет обратно пропорционально увеличению площади потока. Изменение площади потока вне постоянных магнитов можно определить известным эмпирическим методом с использованием железных опилок.

Второй вариант расчета основан на принятии неизменным модуля суммарного *магнитного дипольного момента*, создаваемого молекулами и атомами магнита. В этом случае дивергенцию рассчитывают как уменьшение модуля векторов *магнитной индукции* и *намагниченности* в окружающем магнит пространстве, исходя из условия увеличения объема пространства, приходящегося на суммарный *магнитный дипольный момент* тела магнита. В расчетах магнитных систем с малыми воздушными зазорами этот вариант расчета (из приведенных двух) будет единственно возможным и он дает верный результат. Близкий к этому подход, правда, с энергетических позиций и с некорректным, по мнению автора, использованием напряженности магнитного поля H, описан в работе [12, стр.457].

Теперь рассмотрим возможность опытного измерения дивергенции, что должно поставить завершающую точку в теоретических разногласиях математиков и физиков об этом параметре.

Для статического электрического поля проблема опытного измерения дивергенции решается достаточно просто. Измеряем *напряженность* поля в двух точках, лежащих на линии поля в окрестности точки, в которой определяется дивергенция. Разницу полученных измерений делим на расстояние между точками измерений, это и будет средним значением дивергенции вектора **E** для искомой точки поля. Дивергенция «материального» [12] вектора **D**, который чуть выше фигурировал в расчетах, определяется по этим измерениям с учетом электрической постоянной ε_0 и относительной диэлектрической проницаемости среды.

Для статического магнитного поля практическое измерение дивергенции выполняется подобным же образом, правда определять линии поля здесь несколько сложнее, потому как оно не центральное. Кроме того, следует учитывать, что измеряя значение полевого параметра магнитной индукции **B**, мы фактически измеряем намагниченность вакуума $\mathbf{J}_0$. В работах [13, 14] показано, что вектор **B** относится к чисто полевым (по мнению автора, фантомным) величинам, которые модельного (материального) представления не имеют, хотя вроде бы на практике и измеримы. На самом деле измерение магнитной индукции **B** сводится к измерению разности электрических потенциалов (в датчиках Холла) или электродвижущей силы, образуемой при изменении (во времени) магнитного потока Φ, который выражаем и через другие магнитные величины. Покажем это в формулах.

Вне магнита индукция **B** связана с намагниченностью среды соотношением

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{J}_0.$$

В воздухе $\mu \approx 1$, поэтому максимальная величина магнитного потока определяется произведением *площади* S измерительной рамки на *магнитную постоянную*

μ_0 и на вектор *намагниченности* вакуума $\mathbf{J}_0$, который не вполне оправданно (при отсутствии токов проводимости) считают вектором *напряженности* магнитного поля $\mathbf{H}$. Алгебраическое соотношение названных величин имеет вид:

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \mu_0\vec{J}_0\cdot\vec{S}\,.$$

При фиксированной величине *площади* S измерительной рамки и ее ориентации перпендикулярно измеряемому полю пространственные изменения магнитного потока будут соответствовать соответствующим изменениям *намагниченности* окружающего магнит пространства. По этим измерениям можно определить дивергенцию векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{J}_0$ в интересующей нас точке поля.

ВЫВОДЫ

1. Математические и физические представления дивергенции с приписыванием ей нулевого значения вне истоков и стоков поля малопродуктивны и не соответствуют реальности. Реальная дивергенция – это опытно измеряемая и теоретически вычисляемая расходимость (или сходимость) силовых линий электрического, магнитного или гравитационного полей. Любое векторное поле, неоднородное в трехмерном евклидовом пространстве, обязательно характеризуется наличием своего скалярного поля дивергенции с вычисляемым или измеряемым значением дивергенции в каждой точке поля.
2. Для полей центрального типа дивергенцию в каждой точке поля можно грубо вычислять как объемную плотность источника поля (заряда или массы) в сферическом объеме, на поверхности которого расположена рассматриваемая точка. Более точно дивергенция вычисляется как пространственное изменение плотности потока векторного поля. В такой форме дивергенция вычислима для полей любого типа и формы.
3. Наиболее простое и точное представление дивергенции в любой точке векторного поля – это скорость пространственного изменения вектора в своем собственном направлении, то есть пространственное изменение модуля вектора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тамм И.Е. Основы теории электричества. Учеб. Пособие для вузов.– 11-е изд., испр. и доп.– М.: Физматлит.– 2003.– 616 с.*
2. *Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. Изд. 4-е испр.– М.: БИНОМ. Лаборатория знаний.– 2003.– 320 с.*
3. *Парселл Э. Электричество и магнетизм: Учебное руководство; Пер с англ./Под ред. А.Н. Школьникова и А.О. Вайсберга.– 3-е изд., испр.– М.: Наука.– 1983.– (Берклеевский курс физики).– 410 с.*
4. *Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 2. Изд. 19 испр.– М.: Наука.– 1965.*
5. *Гаврилова В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля.– М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2003.– 496 с.*
6. *Волков П.К. О природе движения жидкости. /Вестник Югорского государственного университета.– 2011.– Выпуск 2 (21).– С. 8–28.*
7. *Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Корн Г., Корн Т.– М.: НАУКА.– 1973.– 832 с.*
8. *Дивергенция. URL: http://ru.math.wikia.com/wiki/Дивергенция (дата обращения – 10.11.2012).*
9. *Болсун А.И., Гронский В.К., Бейда А.А. Методы математической физики: Учеб. пособие.– Минск.: Высш. Школа.– 1988.– 199 с.*
10. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. Под ред. А.Н. Тихонова.– М.: Изд. МГУ.– 1987.– 358 с.*
11. *Чуев А.С. Магнитное поле – какие векторы первичны и что мы измеряем? //Законодательная и прикладная метрология.– 2012.– №6.– С. 45–48.*
12. *Боровик Е.С., Еременко В.В., Мильнер А.С. Лекции по магнетизму.– 3-е изд. перераб. и доп.– М.: ФИЗМАТЛИТ.– 2005.– 512 с.*
13. *Чуев А.С. Системный подход в физическом образовании инженеров. //Наука и образование. –2012.– №2.– URL: http://technomag.edu.ru/doc/299700.html (дата обращения: 2.02.2012).*
14. *Чуев А.С. Полевые электромагнитные величины – фантом или реальность? //Законодательная и прикладная метрология.– 2012.– №3.– С. 71–75.*

Дата принятия 14.01.2013